

HYBRYDOWA METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W ZAGADNIENIU KONTAKTOWYM

WIESŁAW OSTACHOWICZ

Politechnika Gdańska

1. Wstęp

W pracy przedstawiono metodę określania nacisków w sprężystych elementach konstrukcyjnych, które znajdują się w stanie fizycznego kontaktu pod wpływem obciążeń zewnętrznych lub odkształceń początkowych.

Zakładamy, że układ rzeczywisty modelujemy jednocześnie odkształcalnymi elementami skończonymi i sztywnymi elementami skończonymi (KRUSZEWSKI, [1]), czyli stosujemy hybrydową metodę elementów skończonych.

Zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązania zagadnienia kontaktowego przedstawiono między innymi w pracy PARSONSA i WILSONA, [2]. CHAN i TUBA, [3] oraz OHTE, [4] stosowali metodę elementów skończonych do rozwiązywania płaskich zagadnień kontaktowych. W pracy SCHAFFERA, [5] przedstawiono specjalny element kontaktowy, który stosowano w rozpatrywanym tam modelu tarcia.

Modelowanie układów rzeczywistych jednocześnie odkształcalnymi elementami skończonymi i sztywnymi elementami skończonymi umożliwia analizę konstrukcji, której poszczególne elementy cechuje duża rozpiętość sztywności.

Stosowanie hybrydowej metody elementów skończonych jest bardziej uzasadnione z punktu widzenia dokładności obliczeń, [1].

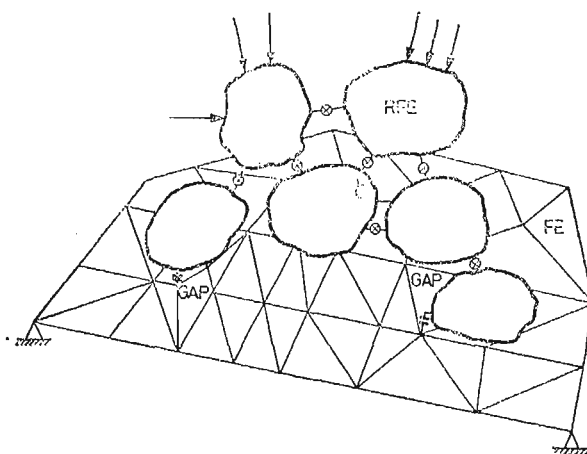
Zakładamy, że własności sprężyste elementów konstrukcyjnych określa prawo Hooke'a. Zgodnie z tym prawem dopuszczalne są małe przemieszczenia układu oraz liniowa zależność między naprężeniami i odkształceniami elementów.

Do określenia stanu naprężeń na powierzchniach styku stosujemy kryterium Coulomba. Na podstawie obliczeń sił węzłowych na powierzchni styku określamy jeden z trzech przypadków: poślizg, brak kontaktu lub adhezję.

Na podstawie przedstawionych założeń opracowano algorytm obliczeń oraz program komputerowy przystosowany do analizy zagadnienia przestrzennego.

2. Sformułowanie problemu

Model rozpatrywanego układu przedstawiono na rys. 1. Układ dyskretny składa się ze sztywnych elementów skończonych, oznaczonych dalej przez RFE (Rigid Finite Element)



Rys. 1. Model dyskretny układu rzeczywistego

oraz odkształcalnych elementów skończonych, oznaczanych przez DFE (Deformable Finite Element). Sposób przeprowadzenia dyskretyzacji układu rzeczywistego w tym przypadku przedstawiono w pracach KRUSZEWSKIEGO [1, 6]. Szytywne elementy skończone połączone są elementami sprężysto-tłumiącymi, których opis podano w pracy [1]. Odkształcalne elementy skończone połączone są w węzłach według powszechnie znanych zasad. Zakładamy ponadto możliwość łączenia sztywnych elementów skończonych między sobą oraz RFE i DFE innym typem elementu zwanym GAP (z ang. przerwa).

Rozpatrzmy punkty p i r znajdujące się na powierzchniach dwóch elementów (RFE lub DFE). Jeżeli istnieje możliwość styku elementów w tych punktach to przyjmujemy, że łączy je wspomniany element o nazwie GAP (rys. 2). Warunki kontaktu rozpatrywane są przy założeniu kryterium poślizgu Coulomba. Dla elementu GAP przewiduje się trzy możliwe rodzaje warunków kontaktu: adhezja (brak możliwości poślizgu), poślizg i utrata kontaktu.

W przypadku adhezji lub poślizgu GAP odkształca się niezależnie w trzech kierunkach, \bar{n} , \bar{t} , \bar{s} (rys. 3). Model GAP przyjmujemy zatem jako układ trzech sprężyn łączących wspomniane wyżej punkty p i r . Osie tych sprężyn określają kierunki \bar{n} , \bar{t} oraz \bar{s} .

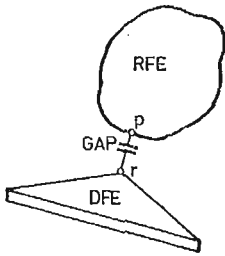
Zakładamy dalej, że sprężyny te mają własności liniowe. Różnicę przemieszczeń końców tych sprężyn określa wektor

$$\{\Delta u\} = \text{col}[\Delta u_t, \Delta u_s, \Delta u_n], \quad (2.1)$$

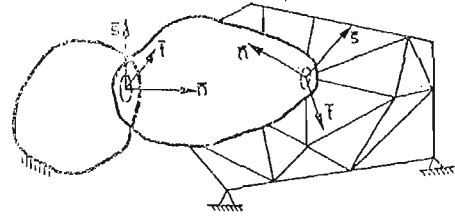
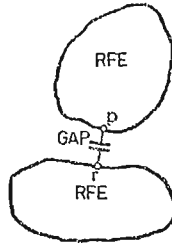
gdzie Δu_t i Δu_s oznaczają różnicę przemieszczeń w kierunku osi \bar{t} i \bar{s} , Δu_n w kierunku \bar{n} .

Oznaczamy przez k_t , k_s i k_n współczynniki sztywności sprężyn odpowiednio w kierunkach stycznych i kierunku normalnym. GAP może być obciążony w kierunku osi \bar{t} i \bar{s} obciążeniem, które powoduje rozciąganie lub ściskanie sprężyn o sztywności k_t i k_s , natomiast sprężyna o sztywności k_n przenosi jedynie obciążenia ściskające.

2.1 Siły normalne. Rozpatrzmy przypadek styku ciał w punktach p i r (rys. 2). Jeżeli sprężyna o sztywności k_n jest ściskana to siła normalna \bar{N} ma znak ujemny. W tym przy-



Rys. 2. Element GAP łączący elementy skończone (DFE, RFE)



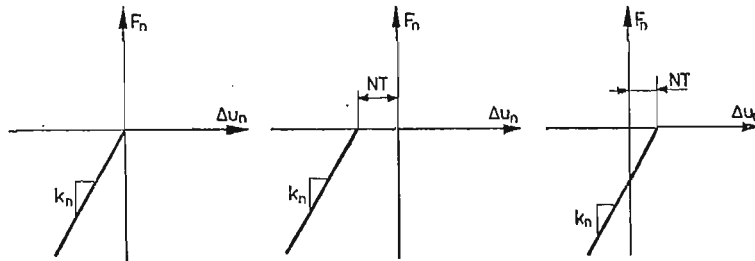
Rys. 3. Układy współrzędnych związane z GAP

padku możliwa jest adhezja lub poślizg na płaszczyźnie styku. Jeżeli siła \bar{N} ma wartość dodatnią, kontakt między ciałami jest przerwany.

Różnicę przemieszczeń końców sprężyny o sztywności k_n określamy związkiem

$$\Delta u_n = u_{np} - u_{nr} + NT, \quad (2.2)$$

gdzie u_{np} i u_{nr} oznaczają przemieszczenia punktów p oraz r w kierunku normalnym \bar{n} , NT (normal translation) oznacza luz wstępny (dla $NT > 0$) lub odkształcenie wstępne (gdy $NT < 0$). Zależność funkcyjną między obciążeniem i przemieszczeniem końców sprężyny o sztywności k_n przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Zależność obciążenia od odkształcenia sprężyny o sztywności k_n

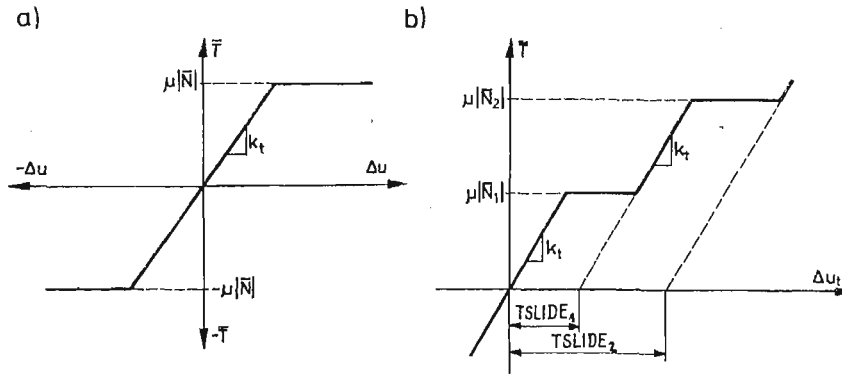
2.2 Siły styczne. Siły styczne w GAP, \bar{T} i \bar{S} , określone są tylko wówczas gdy $\bar{N} < 0$. Jeżeli wartości bezwzględne sił \bar{T} i \bar{S} są mniejsze od iloczynu $\mu|N|$, (gdzie μ oznacza współczynnik tarcia Coulomba) w rozważanym GAP nie występuje poślizg. Jest to przypadek adhezji i wówczas siły wzajemnego oddziaływania ciał powodują przyrost przemieszczeń końców sprężyn o sztywności k_t i k_s .

Różnicę przemieszczeń końców sprężyn w kierunku stycznym określamy związkiem

$$\begin{aligned} \Delta u_t &= u_{tp} - u_{tr} - TSLIDE, \\ \Delta u_s &= u_{sp} - u_{sr} - SSLIDE, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie u_{tp} , u_{sp} oraz u_{tr} , u_{sr} oznaczają przemieszczenia punktów p i r w kierunkach \bar{s} i \bar{t} , $TSLIDE$ i $SSLIDE$ określają poślizg wstępny GAP odpowiednio w kierunku \bar{t} i \bar{s} .

Na rys. 5a przedstawiono zależności funkcyjne między obciążeniem i różnicą przemieszczeń końców sprężyny o sztywności k_t w przypadku, gdy $TSLIDE = 0$. Na rys. 5b przed-



Rys. 5. Zależność obciążenia od odkształcenia sprężyny o sztywności k_t

stawiono tę samą zależność w przypadku poślizgu wstępnego. Zaznaczone na rysunku wielkości $TSLIDE_i$ obliczamy iteracyjnie ze związku

$$TSLIDE_i = (u_{tp} - u_{tr})_i - (\mu|N_i|/k_t), \quad (2.4)$$

gdzie i oznacza kolejny krok iteracji.

Analogiczne zależności funkcyjne opisują przemieszczenie GAP w kierunku osi \bar{s} . Poślizg $SSLIDE_i$ określa związek

$$SSLIDE_i = (u_{sp} - u_{sr})_i - (\mu|N_i|/k_s). \quad (2.5)$$

Proces iteracyjny określania stanu GAP trwa do chwili gdy w kolejnych dwóch iteracjach różnica między wynikami obliczeń (obciążenie GAP i jego ewentualny poślizg) mieści się w przedziale z góry określonej tolerancji.

3. Tworzenie macierzy sztywności

Macierz sztywności układu określamy sumując energię odkształcenia elementów sprężystych łączących RFE, energię odkształcenia DFE oraz elementów typu GAP. Poszczególne elementy skończone (RFE, DFE i GAP) opisujemy w lokalnych układach współrzędnych. Przyjmujemy nieruchome, prawoskrętne układy kartezjańskie.

W przypadku RFE początki układów lokalnych pokrywają się w stanie równowagi ze środkami mas elementów, [1]. W pracy [1] podano szczegółowo sposób tworzenia macierzy sztywności elementu. Sposób opisu DFE w jego lokalnym układzie współrzędnych podano w pracy BATHE i WILSONA, [7]. Tam też przedstawiono sposób tworzenia macierzy sztywności różnych typów elementów.

Położenie modelu dyskretnego w przestrzeni określamy w układzie globalnym współrzędnych (X_1, X_2, X_3) . W układzie tym opisujemy przemieszczenia uogólnione środków mas wszystkich RFE, przemieszczenia wszystkich węzłów DFE oraz przemieszczenia węzłów GAP. Istnieje zatem konieczność transformacji macierzy sztywności elementów z ich układów lokalnych do układu globalnego. Transformacja polega na obustronnym mnożeniu lokalnej macierzy sztywności przez macierz współczynników kierunkowych.

Macierz ta w przypadku metody RFE przyjmuje postać

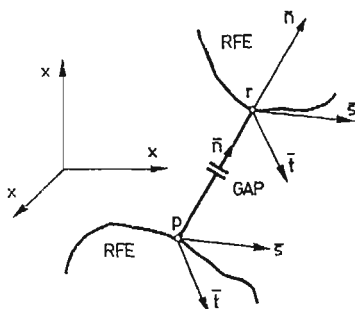
$$[\Theta_r] = \begin{bmatrix} \Theta_{r11} & \Theta_{r12} & \Theta_{r13} & 0 & 0 & 0 \\ & \Theta_{r22} & \Theta_{r23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Theta_{r33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{Sym.} & & & \Theta_{r11} & \Theta_{r12} & \Theta_{r13} \\ & & & & \Theta_{r22} & \Theta_{r23} \\ & & & & & \Theta_{r33} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

gdzie: $\Theta_{r\alpha\beta} = \cos(X_{r\alpha}, X_\beta)$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$,

$X_{r\alpha}$ — oś układu lokalnego,

X_β — oś układu globalnego.

W metodzie DFE transformacji dokonujemy analogicznie jak w metodzie RFE mnożąc lokalne macierze sztywności przez macierz współczynników kierunkowych [7].



Rys. 6. Wzajemne usytuowanie osi układów współrzędnych \bar{t} , \bar{s} , \bar{n} oraz X_1 , X_2 , X_3

Macierz sztywności GAP tworzymy na podstawie równania równowagi tego elementu w lokalnym układzie współrzędnych. Rozpatrzmy punkty p i r (rys. 6). Na rysunku tym przedstawiono wzajemne usytuowanie lokalnych współrzędnych \bar{t} , \bar{s} , \bar{n} i globalnych X_1 , X_2 , X_3 . Zakładamy, że kierunki osi \bar{t} , \bar{s} , \bar{n} w punktach, które łączy GAP są takie same. Oznacza to, że macierz współczynników kierunkowych każdego z dwóch układów lokalnych związanych z GAP są takie same.

Równanie równowagi GAP w lokalnym układzie współrzędnych przyjmuje postać

$$\{F_L\} = [K_L] \{u_L\}, \quad (3.2)$$

gdzie

$$\{F_L\}^T = [\bar{T}_p, \bar{S}_p, \bar{N}_p, \bar{T}_r, \bar{S}_r, \bar{N}_r],$$

$$\{u_L\}^T = [u_{tp}, u_{sp}, u_{np}, u_{tr}, u_{sr}, u_{nr}],$$

$$[K_L] = \begin{bmatrix} k_t & 0 & 0 & -k_t & 0 & 0 \\ 0 & k_s & 0 & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & 0 & k_n & 0 & 0 & -k_n \\ -k_t & 0 & 0 & k_t & 0 & 0 \\ 0 & -k_s & 0 & 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & -k_n & 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

Równanie (3.2) sprowadzamy do układu globalnego. Na podstawie rys. 6 otrzymujemy

$$\{u_L\} = [\Theta_i] \{u_G\}, \quad (3.3)$$

gdzie

$$\{u_G\}^T = [u_{1p}, u_{2p}, u_{3p}, u_{1r}, u_{2r}, u_{3r}],$$

$$[\Theta_i] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Theta_{i11} & \Theta_{i12} & \Theta_{i13} & 0 & 0 & 0 \\ & \Theta_{i22} & \Theta_{i23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Theta_{i33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \Theta_{i11} & \Theta_{i12} & \Theta_{i13} \\ \text{Sym.} & & & & \Theta_{i22} & \Theta_{i23} \\ & & & & & \Theta_{i33} \end{array} \right],$$

przy czym

$$\begin{aligned} \Theta_{i1\beta} &= \cos(\bar{t}, X_\beta), \\ \Theta_{i2\beta} &= \cos(\bar{s}, x_\beta), \\ \Theta_{i3\beta} &= \cos(\bar{n}, X_\beta), \\ \beta &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Wektor sił węzłowych w globalnym układzie współrzędnych przyjmuje postać

$$\{F_G\} = [\Theta_i]^T \{F_L\}, \quad (3.4)$$

gdzie

$$\{F_G\}^T = [F_{1p}, F_{2p}, F_{3p}, F_{1r}, F_{2r}, F_{3r}],$$

a wektor $\{F_L\}$ określa związek (3.2).

Mnożąc lewostronnie równanie (3.2) przez macierz $[\Theta_i]^T$ na podstawie (3.4) otrzymujemy

$$\{F_G\} = [\Theta_i]^T [K_L] \{u_L\}. \quad (3.5)$$

Podstawiając (3.3) do związku (3.5) otrzymujemy

$$\{F_G\} = [K_G] \{u_G\}, \quad (3.6)$$

gdzie $[K_G]$ jest globalną macierzą sztywności elementu typu GAP o postaci

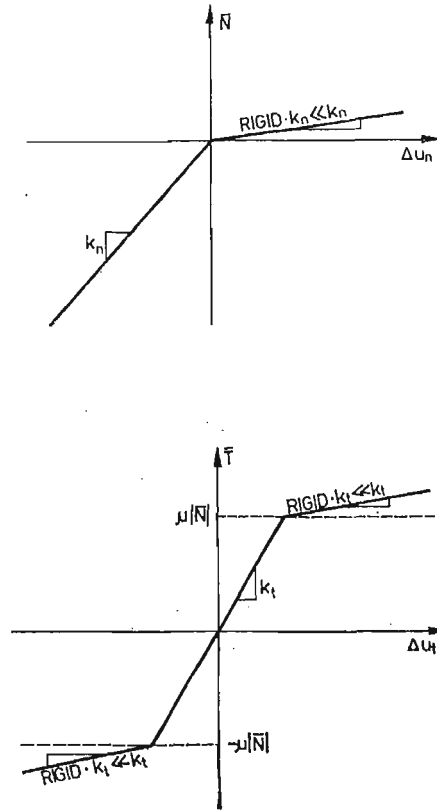
$$[K_G] = [\Theta_i]^T [K_L] [\Theta_i]. \quad (3.7)$$

Jeżeli jeden z punktów elementu typu GAP (p lub r) znajduje się na powierzchni RFE, to wektor przemieszczeń tego punktu przedstawiamy w funkcji współrzędnych uogólnionych RFE za pomocą związku

$$\{u_L\} = [\Theta_{ri}] [B_{ri}] \{q_r\}, \quad (3.8)$$

gdzie

$$[\Theta_{ri}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Theta_{ri1,1} & \Theta_{ri1,2} & \Theta_{ri1,3} & 0 & 0 & 0 \\ & \Theta_{ri2,2} & \Theta_{ri2,3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Theta_{ri3,3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \Theta_{ri1,1} & \Theta_{ri1,2} & \Theta_{ri1,3} \\ \text{Sym.} & & & & \Theta_{ri2,2} & \Theta_{ri2,3} \\ & & & & & \Theta_{ri3,3} \end{array} \right],$$



Rys. 9. Zmodyfikowana zależność obciążenia i odkształcenia sprężyny o sztywności k_i

W przypadku rozwarcia punktów styku nie można przyjąć, że sprężyny obciążone w kierunku normalnym i kierunkach stycznych mają zerową sztywność ponieważ prowadzi to do niestabilności procedury iteracyjnej.

W sytuacji, gdy siła normalna osiąga wartość dodatnią przyjmujemy, że sprężyna ma niewielką sztywność (w stosunku do sztywności k_n). Podobnie, gdy siły styczne osiągną wartości $\mu|N|$ przyjmujemy niewielką sztywność sprężyn stycznych (w stosunku do sztywności k_t i k_s). Zmodyfikowane zależności funkcyjne między obciążeniem i przyrostami przemieszczeń końców sprężyn przedstawiono na rys. 8 i 9. Na podstawie tych zależności siły normalne i styczne, które obciążają GAP przyjmują wartości

$$\begin{aligned} N &= k_n \cdot \Delta u_n, & \text{dla } \Delta u_n < 0, \\ N &= \text{RIGID} \cdot k_n \cdot \Delta u_n, & \text{dla } \Delta u_n \geq 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

oraz

$$\begin{aligned} T &= 0, & \text{dla } \Delta u_t \geq 0, \\ T &= k_t \cdot \Delta u_t, & \text{dla } |k_t \cdot \Delta u_t| \leq \mu|N|, \\ T &= \text{sign} \left[\mu|N| + \text{RIGID} \cdot k_n \cdot \left(|\Delta u_t| - \frac{\mu|N|}{k_n} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{gdzie } \text{sign} &= +1, & \text{dla } \Delta u_t &\geq 0, \\ \text{sign} &= -1, & \text{dla } \Delta u_t &< 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 0, & \text{dla } \Delta u_s &\geq 0, \\ S &= k_s \cdot \Delta u_s, & \text{dla } |k_s \cdot \Delta u_s| &\leq \mu|N|, \\ S &= \text{sign} \left[\mu|N| + \text{RIGID} \cdot k_s \cdot \left(|\Delta u_s| - \frac{\mu|N|}{k_n} \right) \right], & & (4.3) \\ \text{gdzie } \text{sign} &= +1, & \text{dla } \Delta u_s &\geq 0, \\ \text{sign} &= -1, & \text{dla } \Delta u_s &< 0. \end{aligned}$$

5. Zbieżność iteracji

Zbieżność procedury może być określona na podstawie obserwacji stanu każdego GAP oraz każdego elementu skończonego, czyli modelu dyskretnego konstrukcji. Obserwacja dotyczy stanu naprężeń i przemieszczeń w węzłach elementów oraz stanu wszystkich GAP w kolejnych iteracjach.

Stan GAPu oznaczony przez IFLAG określamy następująco

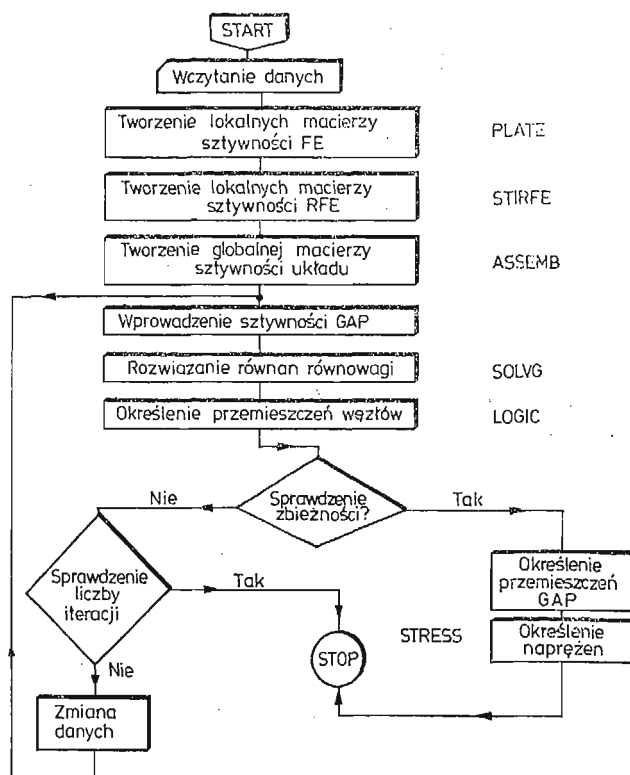
$$\begin{aligned} \text{IFLAG} &= 1 & \text{przypadek adhezji,} \\ \text{IFLAG} &= 2 & \text{przypadek poślizgu,} \\ \text{IFLAG} &= 0 & \text{przypadek utraty kontaktu.} \end{aligned}$$

Zakończenie procedury obliczeń następuje w momencie, gdy w kolejnych dwóch iteracjach różnica między wynikami obliczeń (obciążenie GAP i jego stan) mieści się w przedziale z góry określonej tolerancji.

6. Komputerowy program obliczeń

Na rysunku 10 przedstawiono schemat blokowy programu komputerowego. Program ten składa się z 9 modułów i w obecnej wersji stosowany był do analizy układu hybrydowego, złożonego z RFE i DFE typu płytowego. Moduły programu napisano w języku Fortran-4. Program PLARFE jest programem głównym. W programie tym podaje się dane wielkości fizycznych i geometrycznych, które opisują kontaktujące się ciała. Określamy w nim również współrzędne wszystkich potencjalnych punktów styku ciał (elementów GAP). Podajemy współczynniki sztywności sprężyn każdego GAP, współczynniki tarcia, luzy wstępne oraz ewentualnie wstępny poślizg. Ponadto określamy maksymalną liczbę iteracji oraz zakres tolerancji zbieżności wyników.

Lokalne macierze sztywności elementów typu DFE tworzymy w podprogramie PLATE a macierze sztywności RFE określa podprogram STIFRE. Podprogram PLATE opracowano na podstawie algorytmu przedstawionego w pracy DESAI, [8]. Podprogram PLATE współpracuje z modułami CARVDE i SIMUL, które realizują operację odwracania i mnożenia macierzy.



Rys. 10. Schemat blokowy programu komputerowego

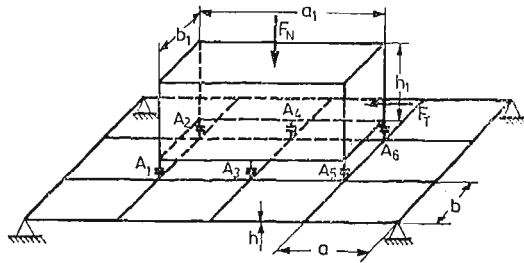
Globalną macierz sztywności określa podprogram ASSEMB. W kolejnym etapie realizacji obliczeń rozwiązujemy równania równowagi układu. Zadanie to realizuje podprogram SOLVG, który opracowano na podstawie metody rozwiązywania układu liniowych równań algebraicznych (metodą eliminacji Gaussa).

Na podstawie wyników podprogramu SOLVG podprogram LOGIC określa przemieszczenia i obciążenia elementów typu GAP. Ponadto określa on stan GAP, czyli parametr IFLAG. Podprogram LOGIC zmienia sztywność GAP według zależności funkcyjnych z rys. 8 i 9.

Obliczenia stanu GAP mają charakter iteracyjny. Proces ten kończy się w przypadku gdy wyniki dwóch kolejnych kroków iteracji mieszczą się w określonym zakresie tolerancji. Wówczas podprogram STRESS oblicza naprężenia w wybranych punktach i kończy się realizacja programu. Program kończy obliczenia również w przypadku, gdy liczba iteracji przewyższa z góry założoną wartość.

7. Przykład

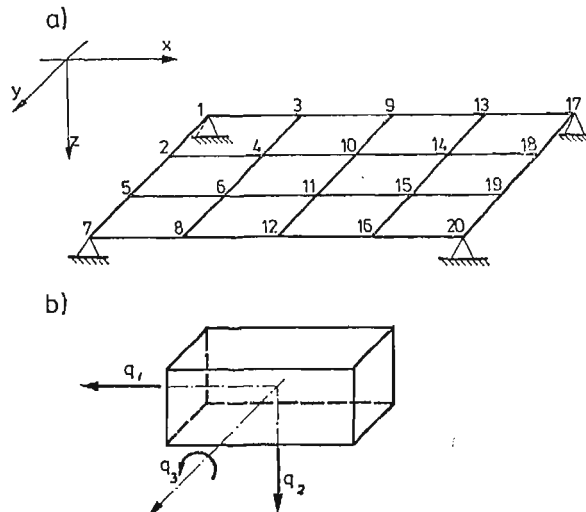
Określić przemieszczenia węzłów elementów typu DFE, elementu RFE oraz GAP układu przedstawionego na rys. 11. Ponadto określić siły normalne i styczne w punktach



Rys. 11. Model dyskretny układu obliczeniowego

A1-A6 oraz ich stan (parametr IFLAG). Wymiary elementów DFE i RFE przedstawiono na rys. 11. Przyjęto następujące dane liczbowe

- długość DFE $a = 0,1$ m
- szerokość DFE $b = 0,1$ m
- grubość DFE $h = 0,015$ m
- długość RFE $a_1 = 0,2$ m
- szerokość RFE $b_1 = 0,1$ m
- wysokość RFE $h_1 = 0,1$ m
- moduł Young'a $E = 0,21 \cdot 10^{12}$ N/m²
- liczba Poissona $\nu = 0,3$



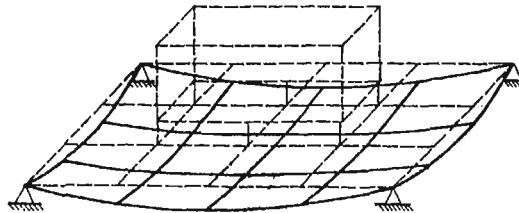
Rys. 12. Numery węzłów DFE oraz przemieszczenia RFE

Elementy typu DFE mają jednakowe wymiary i własności fizyczne. Są to płytowe elementy prostokątne, czterowęzłowe, o trzech stopniach swobody w węzle. Opis tego elementu znajduje się w pracy ZIENKIEWICZA, [9].

Sztywny element skończony RFE obciążają dwie siły, w kierunku stycznym \bar{F}_T i kierunku normalnym \bar{F}_N (rys. 11). Przyjęto stałą wartość siły $F_N = 2 \cdot 10^5$ N. Wartość siły F_T zmienia się według tablicy 3.

Tablica 1

Numer węzła	I iteracja			V iteracja		
	z_i	$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_i$	$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_i$	z_i	$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_i$	$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_i$
i	cm	rad	rad	cm	rad	rad
1	0,000	0,0565	-0,0548	0,000	0,0501	-0,0854
2	0,483	0,0291	-0,0303	0,430	0,0260	-0,0594
3	0,480	0,0299	-0,0337	0,769	0,0221	-0,0584
4	0,754	0,0175	-0,0128	0,989	0,0147	-0,0419
5	0,483	-0,0291	-0,0303	0,430	-0,0260	-0,0594
6	0,755	-0,0175	-0,0128	0,989	-0,0147	-0,0419
7	0,000	-0,0565	-0,0548	0,000	-0,0501	-0,0854
8	0,480	-0,0299	-0,0337	0,769	-0,0220	-0,0584
9	0,636	0,0101	0,0013	1,060	0,0079	0,0018
10	0,741	0,0075	0,0030	1,170	0,0086	0,0039
11	0,741	-0,0075	0,0030	1,170	-0,0086	0,0039
12	0,636	-0,0101	0,0013	1,060	-0,0079	0,0018
13	0,463	0,0265	0,0336	0,746	0,0176	0,0584
14	0,706	0,0155	0,0156	0,924	0,0121	0,0455
15	0,706	-0,0155	0,0156	0,924	-0,0121	0,0455
16	0,463	-0,0265	0,0336	0,746	-0,0176	0,0584
17	0,000	0,0497	0,0523	0,000	0,0411	0,0820
18	0,425	0,0256	0,0308	0,354	0,0214	0,0601
19	0,425	-0,0256	0,0308	0,354	-0,0214	0,0601
20	0,000	-0,0497	0,0523	0,000	-0,0411	0,0820



Rys. 13. Przemieszczenia węzłów płyty w I iteracji

Własności sprężyste elementów typu GAP są jednakowe i wynoszą odpowiednio

$$k_N = 0,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m},$$

$$k_T = 0,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}.$$

Współczynnik tarcia GAP przyjęto równy

$$\mu = 0,1.$$

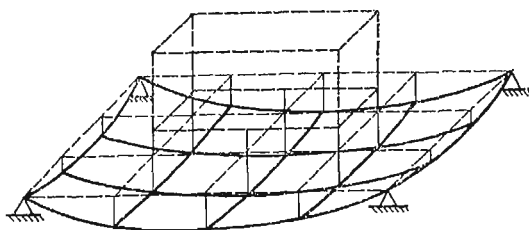
W tablicach 1 - 3 przedstawiono wyniki obliczeń. W tablicy 1 zestawiono przemieszczenia węzłów elementów skończonych dla obciążenia $F_T = 18 \cdot 10^3 \text{ N}$. Numerację węzłów przedstawiono na rys. 12a. W pierwszej kolumnie tej tablicy oraz na rys. 13 przedstawiono wyniki pierwszego kroku iteracji. W drugiej kolumnie zestawiono wyniki piątego kroku iteracji. Wyniki te przedstawiono graficznie na rys. 14.

Tablica 2

Iteracja	Przemieszczenia		
	q_1	q_2	q_3
	cm	cm	rad
I	0,0140	0,7350	0,00246
V	0,0188	0,9590	0,00326

Tablica 3

GAP	A1	A2	A3	A4	A5	A6
$F_T = 12\ 000\ \text{N}$						
\bar{N} [N]	51 500	51 500	0	0	48 500	48 500
\bar{T} [N]	3 000	3 000	0	0	3 000	3 000
IFLAG	1	1	0	0	1	1
$F_T = 14\ 000\ \text{N}$						
\bar{N} [N]	51 750	51 750	0	0	48 250	48 250
\bar{T} [N]	3 500	3 500	0	0	3 500	3 500
IFLAG	1	1	0	0	1	1
$F_T = 16\ 000\ \text{N}$						
\bar{N} [N]	52 000	52 000	0	0	48 000	48 000
\bar{T} [N]	4 000	4 000	0	0	4 000	4 000
FLAG	1	1	0	0	1	1
$F_T = 18\ 000\ \text{N}$						
\bar{N} [N]	52 250	52 250	0	0	47 750	47 750
\bar{T} [N]	4 500	4 500	0	0	4 500	4 500
IFLAG	1	1	0	0	1	1
$F_T = 20\ 000\ \text{N}$						
\bar{N} [N]	52 500	52 500	0	0	47 500	47 500
\bar{T} [N]	0	0	0	0	0	0
IFLAG	2	2	0	0	2	2



Rys. 14. Przemieszczenia węzłów płyty w V iteracji

W tablicy 2 przedstawiono przemieszczenia RFE w pierwszym i piątym kroku iteracji dla obciążenia jak wyżej. Przemieszczenia q_i ($i = 1, 2, 3$) przyjęto zgodnie z rys. 12b.

W tablicy 3 zestawiono wyniki obliczeń dla pięciu wariantów obciążenia. Elementy typu GAP oznaczono jak na rys. 11. Siłę normalną w GAP oznaczono przez \bar{N} natomiast siłę styczną przez \bar{T} . Stan GAP określamy parametrem IFLAG zdefiniowanym w rozdz. 5. Wyniki obliczeń zamieszczone w tablicy 3 otrzymano po 5 krokach iteracji. Obliczenia przeprowadzono na komputerze ICL-4. Łączny czas obliczeń całego procesu iteracyjnego nie przekroczył 3 minut.

Literatura cytowana w tekście

1. J. KRUSZEWSKI i inni, *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1975.
2. S. PARSONS, E. A. WILSON, *Finite element analysis of elastic contact problem using differential displacements*, Int. Jour. for Num. Meth. in Eng., vol. 2, 1970, str. 387 - 395.
3. S. K. CHAN, T. S. TUBA, *A finite element method for contact problems of solid bodies — Parts I, II*, Int. Jour. Mech. Sci., vol. 13, 1971, str. 615 - 639.
4. S. OHTE, *Finite element analysis of elastic contact problems*, Bull. of JSME, vol. 16, 1973, str. 797 - 804.
5. H. SCHÄFER, *A contribution to the solution of contact problems with the aid of bound elements*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., vol. 6, 1975, str. 335 - 354.
6. J. KRUSZEWSKI i inni, *HESAS — system obliczeń konstrukcji oparty na metodach elementów skończonych*, Mechanika i Komputer, t. 1, 1978, str. 81 - 100.
7. K. J. BATHE, E. L. WILSON, *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1976.
8. C. S. DESAI, *Finite Element Methods*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
9. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.

Резюме

ГИБРИДНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

В работе представлено метод определения контактных давлений в упругих элементах конструкций, которые находятся в состоянии физического контакта под влиянием внешних нагрузок или начальных деформаций.

Реальная система моделирована одновременно при помощи конечных элементов и жестких конечных элементов.

Во всех случаях когда существует возможность контакта тел, мы вводим частный конечный элемент обозначенный GAP.

Процедура определения состояния напряжения и деформации GAP итерационного характера. Проведена программа на ЭВМ, а также пример вычислений.

S u m m a r y

HYBRID FINITE ELEMENT METHOD IN CONTACT PROBLEMS

In the paper a method of finding distributions of tractions in elastic structural elements being in the contact under the influence of external loads have been proposed. The real structures have been represented by a system of rigid as well as deformable finite elements. On surfaces where the possibility of a contact between structural elements can occur, the special finite element, referred to as GAP, have been introduced. The procedure of calculating the stresses and deformation of GAP is of an iterative character. The description of the program for computers and the example of application have been given.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 maja 1982 roku
