

KLASA PRZEPŁYWÓW POWOLNYCH W KANAŁACH KOŁOWO ZAKRZYWIONYCH

STANISŁAW TOKARZEWSKI (WARSZAWA)

IPPT PAN

Spis ważniejszych oznaczeń

- (r, θ) — współrzędne biegunowe,
 R — położenie ścianki kanału,
 u — prędkość promieniowa,
 v — prędkość obwodowa,
 p — ciśnienie,
 u_R, u_t — prędkości promieniowe postawione na ściance kanału,
 v_R, v_t — prędkości wzdłużne postawione na ściance kanału,
 Q_0 — wydatek cieczy przez wybrany przekrój kanału,
 $\tilde{\Psi}$ — funkcja prądu.

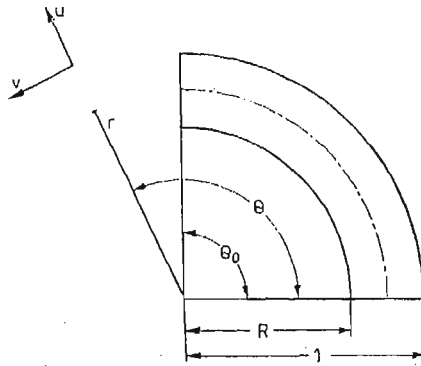
1. Wstęp

Przepływy z małymi liczbami Reynoldsa, zwane powszechnie przepływami powolnymi, realizują się na dużą skalę zarówno w technice, jak i w przyrodzie. Mamy z nimi do czynienia między innymi w procesie przepływu krwi w naczyniach krwionośnych, w procesach smarowania, flotacji, sedymentacji i wielu innych. Do opisu przepływów powolnych powszechnie używa się równań Stokesa [5]. Równania te należą do podstawowych równań mechaniki płynów. Poszukiwanie więc klas ścisłych rozwiązań równań Stokesa opisujących przepływy powolne jest zadaniem ważnym zarówno z teoretycznego, jak również z praktycznego punktu widzenia. Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie pewnej klasy przepływów powolnych realizujących się w płaskim kanale, którego ścianki mające kształt dwóch współśrodkowych łuków okręgów są przepuszczalne dla cieczy. Poszukiwane przepływy powolne opisywać będziemy za pomocą tak zwanej funkcji prądu spełniającej równanie biharmoniczne, określone w biegunowym układzie współrzędnych. Klasa ścisłych rozwiązań równania biharmonicznego powszechnie używana w literaturze jest wyrażona za pomocą szeregów Fouriera [9, 5]. Nieznane współczynniki tych szeregów wyznacza się

z warunków brzegowych, wykonując odpowiednie operacje całkowania. Klasy funkcji prądu uzyskane natomiast w tej pracy mają postać nieskończonych szeregów funkcyjnych, których poszczególne wyrazy są iloczynami kolejnych pochodnych funkcji prędkości postawionych na ściankach kanału mnożonych przez ściśle określone wielomiany zależne wyłącznie od jednej zmiennej promieniowej. Przepływy powolne otrzymane w tej pracy istotnie więc się różnią od klas przepływów powolnych wyrażonych szeregami Fouriera.

2. Sformułowanie zadania

Rozważmy dwuwymiarowy kanał, którego obydwie ścianki mają kształt dwóch współśrodkowych łuków okręgów opartych na tym kącie środkowym $\theta = \theta_0$ (rys. 1). Kanał taki nazywać będziemy kanałem zakrzywionym. Założmy, że ścianki rozważanego kanału



Rys. 1.

są dla cieczy przepuszczalne. Niech przez przekrój $\theta = 0$, ściankę górną oraz ściankę dolną (rys. 1) wpływa do wnętrza kanału ciecz odpowiednio: o wydatku Q_0 , z prędkością o składowych U_1, V_1 oraz z prędkością o składowych U_R, V_R . Przyjmujemy, że w przepływie powstającym w kanale (rys. 1) siły bezwładności są pomijalnie małe w stosunku do sił lepkich. Celem pracy jest wyznaczenie klasy przepływów powolnych realizujących się w dwuwymiarowych kanałach zakrzywionych (rys. 1), mających ścianki przepuszczalne.

3. Podstawowe równania

Do opisu dwuwymiarowych przepływów powolnych powstających w kanałach zakrzywionych o ściankach przepuszczalnych (rys. 1) używa się następujących równań Stokesa:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0.$$

oraz stawia się następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} u(R, \theta) &= U_R(\theta), & v(R, \theta) &= V_R(\theta), \\ u(1, \theta) &= U_1(\theta), & v(1, \theta) &= V_1(\theta), \end{aligned} \quad (3.1b)$$

gdzie

$$r = \frac{r'}{R_0}, \quad p = \frac{p'R_0}{uU_0}, \quad u = \frac{u'}{u_0}, \quad v = \frac{v'}{u_0} \quad (3.1c)$$

są odpowiednio bezwymiarowym promieniem, bezwymiarowym ciśnieniem, bezwymiarową prędkością promieniową oraz bezwymiarową prędkością obwodową. Przedmiotem poszukiwań będzie klasa funkcji $\{u, v, p\}$ spełniająca ściśle równania Stokesa (3.1a) oraz warunki brzegowe (3.1b). Wygodnie jest poszukiwaną klasę przepływów powolnych $\{u, v, p\}$, rozwiązującą zagadnienie brzegowe (3.1), przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r}, & v &= -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r}, \\ p &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r, u) + \int_0^r \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) dr, \end{aligned} \quad (3.2a)$$

gdzie funkcja $\tilde{\Psi}$, zwana funkcją prądu, spełnia równanie biharmoniczne

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \tilde{\Psi} = 0 \quad (3.2b)$$

oraz warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \theta} \Big|_{r=R} &= U_R(\theta), & -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} \Big|_{r=R} &= V_R(\theta), \\ \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \theta} \Big|_{r=1} &= U_1(\theta), & -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} \Big|_{r=1} &= V_1(\theta). \end{aligned} \quad (3.2c)$$

Związki (3.2) i (3.1) są równoważne. Stąd w dalszej części pracy ograniczymy się wyłącznie do wyznaczenia klasy funkcji prądu $\tilde{\Psi}$ rozwiązującej zagadnienie brzegowe (3.2b - c). Poszukiwana klasa przepływów powolnych $\{u, v, p\}$ wynika bowiem natychmiast ze związków (3.2a). Niech funkcja $\tilde{\Psi}(r, \theta, R, U_R, V_R)$ spełnia związki (3.2b - c) w przypadku, gdy $U_1 = V_1 = 0$. Nietrudno wykazać, że funkcja $\tilde{\Psi}\left(\frac{r}{R}, \theta, \frac{1}{R}, U_1, V_1\right)$ powstała w wyniku prostej zamiany argumentów spełnia te same zależności (3.2b - c) przy założeniu jednak, że $U_R = V_R = 0$. Stąd wygodnie jest poszukiwaną klasę funkcji prądu $\tilde{\Psi}$ rozwiązującą zagadnienie brzegowe (3.2b - c) przedstawić w postaci następującej sumy

$$\tilde{\Psi}(r, \theta) = \Psi(r, \theta, R, U_R, V_R) + \Psi\left(\frac{r}{R}, \theta, \frac{1}{R}, U_1, V_1\right), \quad (3.3)$$

gdzie R, U_R, V_R, U_1, V_1 są z góry danymi parametrami. Aby więc znaleźć poszukiwaną klasę przepływów powolnych $\{u, v, p\}$ należy, po pierwsze: rozwiązać równanie biharmoniczne

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Psi = 0 \quad (3.4a)$$

wraz z dołączonymi do niego następującymi warunkami brzegowymi

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = U_R(\theta), \quad - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=R} = V_R(\theta), \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \Big|_{r=1} = 0, \quad - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad (3.4c)$$

po drugie: zbudować na podstawie (3.3) funkcję prądu $\tilde{\Psi}$ oraz po trzeciej: wyznaczyć w oparciu o zależności (3.2a) poszukiwaną klasę przepływów powolnych $\{u, v, p\}$. W dalszej części pracy ograniczymy się do rozwiązania zagadnienia brzegowego (3.4).

4. Klasa rozwiązań równania biharmonicznego

Na wstępie wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$L = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial^n f(\theta)}{\partial \theta^n} = f^{(n)}(\theta), \quad (4.1)$$

które używać będziemy w dalszej części tekstu. Przy użyciu zależności (4.1) równanie biharmoniczne (3.4a) przyjmuje postać

$$\left(L^2 + L \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} L \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right) \Psi = 0. \quad (4.2)$$

Rozwiązanie równania (4.2) wygodnie jest wyrazić za pomocą następującego nieskończonego szeregu funkcyjnego

$$\Psi = \sum_{s=0}^{\infty} W_s(r) f^{(2s)}(\theta), \quad (4.3)$$

gdzie $W_s(r)$ jest funkcją wyłącznie promienia r , $f^{(2s)}(\theta)$ zaś oznacza $2s$ -tą pochodną dowolnej funkcji $f(\theta)$, zależnej jedynie od kąta θ . Podstawiając związek (4.3) do zależności (4.2) i przyrównując do zera wyrażenia przy tych samych rzędach pochodnych funkcji $f(\theta)$, otrzymujemy następujące równania rekurencyjne określające funkcje $W_s(r)$:

$$L^2 W_s = - \left(L \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} L \right) W_{s-1} - \frac{1}{r^4} W_{s-2}, \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

$$W_{-1} = W_{-2} = 0.$$

Ogólne rozwiązanie układu równań (4.4) przyjmuje postać

$$W_s(r) = \sum_{m=0}^s (-1)^m \left[(r^2 \alpha_{s-m} + \gamma_{s-m}) \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + (r^2 \beta_{s-m} + \delta_{s-m}) \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right] \quad (4.5)$$

gdzie α_s , β_s , γ_s i δ_s są dowolnymi stałymi. W celu ustalenia kryteriów zbieżności otrzymanego szeregu (4.3), (4.5) wygodnie jest N -tą sumę cząstkową związku (4.3), (4.5) przekształcić do równoważnej postaci

$$\sum_{s=0}^N W_s(r) f^{(2s)}(\theta) = \sum_{m=0}^N (-1)^m \left\{ a_{N,m} \frac{\ln^{2n+1} r}{(2m+1)!} + b_{N,m} \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right\}, \quad (4.6)$$

gdzie

$$a_{N,m} = \sum_{s=0}^{N-m} (r^2 \alpha_s + \gamma_s) f^{(2s+2m)}(\theta), \quad b_{N,m} = \sum_{s=0}^{N-m} (r^2 \beta_s + \delta_s) f^{(2s+2m)}(\theta). \quad (4.7)$$

Granicę ciągu (4.3) możemy na podstawie (4.6) zapisać następująco

$$\sum_{s=0}^{\infty} W_s(r) f^{(2s)}(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N (-1)^m \left\{ a_{N,m} \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + b_{N,m} \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right\}. \quad (4.8)$$

Ciąg funkcji (4.8) jest zbieżny, gdy spełnione są jednocześnie następujące nierówności:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} a_{N,m} &= a_{\infty,m} < \infty, & \lim_{N \rightarrow \infty} b_{N,m} &= b_{\infty,m} < \infty, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ a_{\infty,m} \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + b_{\infty,m} \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right\} &< \infty. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do związków (4.9) otrzymujemy na podstawie (4.8) i (4.7) następujące kryteria zbieżności szeregu (4.3), (4.5) obowiązujące w przedziale $\frac{1}{\varrho} \leq r \leq \varrho$:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{4m^2} \frac{f^{(2m+2)}(\theta)}{f^{(2m)}(\theta)} \ln^2 \varrho \right| &< 1, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{\eta_{m+1}}{\eta_m} \frac{f^{(2m+2)}(\theta)}{f^{(2m)}(\theta)} \right| &< 1, \quad (\eta = \alpha, \beta, \gamma, \delta). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ostatecznie więc poszukiwaną klasę ścisłych rozwiązań równania biharmonicznego określają szeregi (4.3), (4.5) wraz z nierównościami (4.10).

5. Szeregi Fouriera

Znaną klasę rozwiązań równania biharmonicznego określonego w biegunowym układzie współrzędnych są następujące szeregi Fouriera:

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{N=0}^{\infty} F_N(r) \cos N\theta, \quad (N = 0, 1, 2 \dots), \quad (5.1a)$$

przy czym

$$F_N(r) = \lim_{n \rightarrow N} (A_n r^{n+2} + B_n r^{n-2} + C_n r^n + D_n r^{-n}), \quad (5.1b)$$

gdzie A_n , B_n , C_n i D_n są dowolnymi stałymi. Interesujące jest przejście od szeregów (4.3), (4.5) do szeregów (5.1). Przyjmijmy dowolną funkcję $f(\theta)$ w postaci

$$f(\theta) = \cos n\theta \quad (5.2)$$

i podstawmy ją do związku (4.3). Po wykorzystaniu zależności (4.5) otrzymujemy

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[(r^2 \alpha_{s-m} + \gamma_{s-m}) \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + (r^2 \beta_{s-m} + \delta_{s-m}) \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right] \times (-1)^s n^{2s} \cos n\theta. \quad (5.3)$$

Zakładając, że szereg (5.3) jest bezwzględnie zbieżny, związek (5.3) daje się po zmianie kolejności sumowania przedstawić w postaci

$$\Psi(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) \cos n\theta, \quad (5.4a)$$

$$F_n(r) = \sum_{m=0}^{\infty} n^{2m} \left[(r^2 \alpha_{(n)} + \gamma_{(n)}) \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + (r^2 \beta_{(n)} + \delta_{(n)}) \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right],$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$w_{(n)} = \sum_{s=0}^{\infty} w_s n^{2s}, \quad (w = \alpha, \beta, \gamma, \delta). \quad (5.4b)$$

Nieskończona suma wyrazów szeregu (5.4a) równa się

$$F_n(r) = (A_n r^{n+2} + B_n r^{n-2} + C_n r + D_n r^{-n}), \quad (5.5)$$

$$A_n = \frac{1}{2} \left(B_{(n)} + \frac{\alpha_{(n)}}{n} \right), \quad B_n = \frac{1}{2} \left(\beta_{(n)} - \frac{\alpha_{(n)}}{n} \right), \quad (5.6)$$

$$C_n = \frac{1}{2} \left(\delta_{(n)} + \frac{\gamma_{(n)}}{n} \right), \quad D_n = \frac{1}{2} \left(\delta_{(n)} - \frac{\gamma_{(n)}}{n} \right).$$

Przechodząc do granicy

$$F_N(r) = \lim_{n \rightarrow N} F_n(r), \quad (N = 0, 1, 2 \dots) \quad (5.7)$$

otrzymujemy dokładnie funkcję (5.1b). A zatem, przy założeniu, że przeprowadzane operacje obliczeniowe (5.2 - 5.7) są zbieżne, zależności (5.6 - 5.7) pozwalają przejść od uzyskanych w tej pracy klas rozwiązań (4.3), (4.5) do klas rozwiązań (5.1) powszechnie używanych w literaturze.

6. Klasa przepływów powolnych

Klasę rozwiązań równania biharmonicznego (4.3), (4.5) wykorzystamy do rozwiązania zagadnienia brzegowego (3.4). Z warunków brzegowych (3.4c) otrzymujemy natychmiast

$$\delta_s = -\beta_s, \quad \gamma_s = -2\beta_s - \alpha_s. \quad (6.1)$$

Pozostałe dwa warunki brzegowe (3.4b) spełnimy przyjmując funkcję prądu $\Psi(r, \theta)$ w postaci

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{s=0}^{\infty} \overset{1}{W}_s(r) U_R^{(2s-1)}(\theta) + \overset{2}{W}_s(r) V_R^{(2s)}(\theta), \quad (6.2a)$$

gdzie

$$\overset{1}{W}_0(R) = R, \quad \frac{d}{dr} \overset{1}{W}_0(r)|_{r=R} = 0, \quad (6.2b)$$

$$\overset{2}{W}_0(R) = 0, \quad R \frac{d}{dr} \overset{2}{W}_0(r)|_{r=R} = -R, \quad (6.2c)$$

$$\overset{1}{W}_s(R) = \overset{2}{W}_s(R) = 0, \quad (s = 1, 2, 3 \dots) \quad (6.2d)$$

oraz

$$U^{(-1)}(\theta) = - \int_0^{\theta} U(\theta) d\theta. \quad (6.2e)$$

Nałożone na funkcję $W_s(r)$ warunki brzegowe (6.1 - 6.2) prowadzą do następujących wzorów rekurencyjnych

$$W_s(r) = \sum_{m=0}^s (-1)^m \left\{ [(r^2-1)\alpha_{s-m} - 2\beta_{s-m}] \frac{\ln^{2m+1} r}{(2m+1)!} + (r^2-1)\beta_{s-m} \frac{\ln^{2m} r}{(2m)!} \right\}, \quad (6.3a)$$

gdzie

$$\alpha_k(R) = \frac{[2(R^2-1)]M_k(R) - [(R^2-1) - 2\ln R]N_k(R)}{4R^2\ln^2 R - (R^2-1)^2},$$

$$\beta_k(R) = \frac{-[2R^2\ln R + (R^2-1)]M_k(R) + (R^2-1)(\ln R)N_k(R)}{4R^2\ln^2 R - (R^2-1)^2}, \quad (6.3b)$$

przy czym

$$M_k(R) = - \sum_{m=1}^k (-1)^m \left\{ \left[(R^2-1) \frac{(\ln R)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right] \alpha_{k-m} + \right. \\ \left. - \left[2 \frac{(\ln R)^{2m+1}}{(2m+1)!} - (R^2-1) \frac{(\ln R)^{2m}}{(2m)!} \right] \beta_{k-m} \right\}, \quad (6.3c)$$

$$N_k(R) = - \sum_{m=1}^k (-1)^m \left\{ \left[\frac{2R^2(\ln R)^{2m+1}}{(2m+1)!} + (R^2-1) \frac{(\ln R)^{2m}}{(2m)!} \right] \alpha_{k-m} + \right. \\ \left. + \left[2(R^2-1) \frac{(\ln R)^{2m}}{(2m)!} + (R^2-1) \frac{(\ln R)^{2m-1}}{(2m-1)!} \right] \beta_{k-m} \right\}. \quad (6.3d)$$

Wartości początkowe wprowadzane do wzorów (6.3a - d) równają się

$$\alpha_0^1(R) = \frac{2(R^2-1) \cdot R}{4R^2\ln^2 R - (R^2-1)^2}, \quad \beta_0^1(R) = - \frac{[2R^2\ln R + (R^2-1)] \cdot R}{4R^2\ln^2 R - (R^2-1)^2},$$

$$\alpha_0^2(R) = \frac{R(R^2-1 - 2\ln R)}{4R^2\ln^2 R - (R^2-1)^2}, \quad \beta_0^2(R) = - \frac{R(R^2-1)\ln R}{4R^2\ln R - (R^2-1)^2}. \quad (6.3e)$$

Ostatecznie więc poszukiwaną klasę przepływów powolnych realizujących się w kanałach kołowo zakrzywionych o ściankach przepuszczalnych określają związki (6.3), (4.3), (3.3), (3.2a). Zakres stosowalności otrzymanych rozwiązań określają nierówności (4.10) po podstawieniu do nich

$$f(\theta) = U_R(\theta), \quad f(\theta) = V_R(\theta), \quad f(\theta) = U_1(\theta), \quad f(\theta) = V_1(\theta). \quad (6.4)$$

Nierówności te, ze względu na skomplikowane formuły iteracyjne (6.3), są trudne lub wręcz niemożliwe do rozwiązania. Stąd wyznaczenie dokładnego zakresu stosowalności otrzymanych wyników pozostaje problemem nie rozwiązany. Należy jednak zauważyć, że w przypadku gdy funkcje prędkości postawione na ściankach kanału są wyrażone za pomocą wielomianów zmiennej θ , uzyskane w tej pracy formuły są zbieżne.

7. Przykład zastosowania otrzymanych rozwiązań

Niech przez ścianki kanału kołowo zakrzywionego zasysana jest ciecz z następującymi prędkościami:

$$\text{I. } U_R(\theta) = \frac{\theta^n}{n!}, \quad V_R(\theta) = 0, \quad U_1(\theta) = 0, \quad V_1(\theta) = 0, \quad (7.1a)$$

$$\text{II. } U_R(\theta) = 0, \quad V_R(\theta) = \frac{\theta^n}{n!}, \quad U_1(\theta) = 0, \quad V_1(\theta) = 0, \quad (7.1b)$$

$$\text{III. } U_R(\theta) = 0, \quad V_R(\theta) = 0, \quad U_1(\theta) = \frac{\theta^n}{n!}, \quad V_1(\theta) = 0, \quad (7.1c)$$

$$\text{IV. } U_R(\theta) = 0, \quad V_R(\theta) = 0, \quad U_1(\theta) = 0, \quad V_1(\theta) = \frac{\theta^n}{n!}. \quad (7.1d)$$

Funkcję prądu opisującą przepływ powolny w kanale uzyskujemy natychmiast na podstawie formuł (6.2a) i (3.3)

$$\text{I } \Psi_n(r, \theta) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} {}^1 W_s(r, R) \frac{\theta^{n+1-2s}}{(n+1-2s)!}, \quad (7.2a)$$

$$\text{II } \Psi_n(r, \theta) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} {}^2 W_s(r, R) \frac{\theta^{n-2s}}{(n-2s)!}, \quad (7.2b)$$

$$\text{III } \Psi_n(r, \theta) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} {}^1 W\left(\frac{r}{R}, \frac{1}{R}\right) \frac{\theta^{n+1-2s}}{(n+1-2s)!}, \quad (7.2c)$$

$$\text{IV } \Psi_n(r, \theta) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} {}^2 W\left(\frac{r}{R}, \frac{1}{R}\right) \frac{\theta^{n-2s}}{(n-2s)!}, \quad (7.2d)$$

gdzie symbol $E\left(\frac{n}{2}\right)$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą od $\frac{n}{2}$, R zaś jest parametrem. Niech teraz przez ścianki rozważanego kanału wpływa do jego wnętrza ciecz z prędkością,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \theta^n, \quad (f = U_R, V_R, U_1, V_1), \quad (7.3a)$$

o której założyliśmy, że jest rozwijalna w szereg Taylora w przedziale $-\infty < \theta < +\infty$. Oznacza to, że spełniona jest następująca nierówność:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+2)}(\theta_0)}{f^{(n)}(\theta_0)} \right| < \frac{n^2}{\theta^2}, \quad (f = U_R, V_R, U_1, V_1). \quad (7.3b)$$

Następnie zbudujemy szereg nieskończony następujący

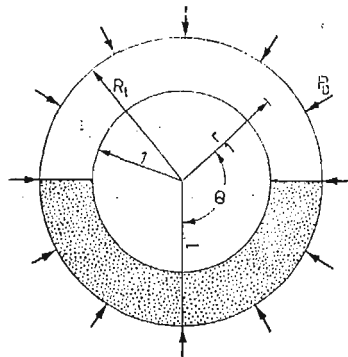
$$\tilde{\Psi}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \{U_R^{(n)}(0) {}^1 \Psi_n(r, \theta) + V_R^{(n)}(0) {}^2 \Psi_n(r, \theta) + U_1^{(n)}(0) {}^3 \Psi_n(r, \theta) + V_1^{(n)}(0) {}^4 \Psi_n(r, \theta)\} \quad (7.4)$$

i zauważmy w oparciu o (7.1 - 7.2), że każdy wyraz tego szeregu, a także ich suma, spełniają równanie biharmoniczne (3.4a) oraz warunki brzegowe (7.3a). Szereg (7.4) przedstawia więc klasę przepływów powolnych realizujących się w kanałach kołowo zakrzywionych, w przypadku gdy pochodne funkcji prędkości postawionych na ściankach kanału spełniają nierówność (7.3b).

8. Przykład rozwiązania zagadnienia fizycznego

Niech nieskończenie długi, sztywny walec o promieniu 1 położony będzie wewnątrz nieskończenie długiego, elastycznego cylindra o promieniu R_t (rys. 2). Niech w chwili $t = 0$ połowę objętości wąskiej szczeliny między rurą a walcem wypełnia nieściśliwa ciecz lepka. Pod wpływem ciśnienia zewnętrznego elastyczna powierzchnia cylindra przemieszcza się. Niech przemieszczenia promieniowe powierzchni rury będą z góry zadane. Oznaczmy je przez R_t . O przemieszczeniach obwodowych zaś założymy, że równają się zeru. Wyznamy pole prędkości cieczy ściskanej wypełniającej szczelinę (patrz rys. 2). W tym celu wprowadzmy dalsze upraszczające założenia. Przyjmijmy, że następujący stosunek

$$(R_t - 1) \ll 1 \quad (7.1)$$



Rys. 2.

oraz następująca liczba Reynoldsa

$$\frac{\dot{R}_t(R_t - 1)}{V} \ll 1 \quad (7.2)$$

są małe, gdzie przez \dot{R}_t oznaczyliśmy prędkość promieniową powierzchni rury ściskającej ciecz. Wprowadzone założenia pozwalają bezpośrednio wykorzystać wyniki uzyskane w niniejszej pracy, dane związkami (6.2 - 6.3). Jako warunki brzegowe przyjmujemy

$$U_R(\theta) = \dot{R}_t, \quad V_R(\theta) = 0. \quad (7.3)$$

Podstawiając (7.3) do (6.2a) oraz korzystając z (6.3) otrzymujemy natychmiast funkcję prądu

$$\Psi = \{[(r^2 - 1)\alpha_0 - 2\beta_0] \ln r + (r^2 - 1)\beta_0\} \dot{R}_t \cdot \theta \quad (7.4a)$$

oraz wynikające z tej funkcji prędkości: promieniową

$$u = \left\{ \left[\left(r - \frac{1}{r} \right) \alpha_0 - \frac{2}{r} \beta_0 \right] \ln r + \left(r - \frac{1}{r} \right) \beta_0 \right\} \dot{R}_t, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_t, \quad (7.4b)$$

oraz prędkość obwodową

$$v = - \left\{ 2r\alpha_0 \ln r + \left(r - \frac{1}{r} \right) (\alpha_0 + 2\beta_0) \right\} \dot{R}_t \cdot \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_t, \quad (7.4c)$$

gdzie wielkości α_0 , β_0 , θ_t zależą od czasu i równają się odpowiednio

$$\alpha_0 = \frac{2(R_t^2 - 1)}{4R_t^2 \ln^2 R_t - (R_t^2 - 1)^2}, \quad \beta_0 = - \frac{[2R_t^2 \ln R_t + (R_t^2 - 1)] R_t}{4R_t^2 \ln^2 R_t - (R_t^2 - 1)^2}, \quad (7.4d)$$

$$\theta_t = \frac{1}{2} \frac{R_0^2 - 1}{R_t^2 - 1} \pi, \quad (7.4e)$$

przy czym zachodzi następująca nierówność:

$$R_0 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2R_0^2}} < R_t \leq R_0. \quad (7.4f)$$

W ramach przyjętych założeń związku (7.4) opisują proces powolnego wyciskania cieczy z kołowo zakrzywionej szczeliny.

9. Końcowe uwagi

W niniejszej pracy uzyskano za pomocą funkcji prądu klasę przepływów powolnych realizujących się w kanałach kołowo zakrzywionych o przepuszczalnych ściankach (rys. 1). Rozwiązania uzyskano w postaci nieskończonych szeregów funkcyjnych, których poszczególne wyrazy są iloczynami kolejnych pochodnych funkcji prędkości postawionych na ściance kanału mnożonych przez odpowiednio wyznaczone wielomiany zmiennej $\ln r$. Współczynniki tych wielomianów liczy się w oparciu o formuły iteracyjne zamieszczone w niniejszej pracy. Uzyskane w punkcie 7 konkretne rozwiązania wskazują, że klasa rozwiązań (6.3), (4.3), (3.3), (3.2a) daje poprawne wyniki, w przypadku gdy promień zbieżności funkcji prędkości postawionych na ściance kanału jest nieskończony. Należy również zaznaczyć, że ze względu na skomplikowane formuły obliczeniowe wyznaczenie dokładnego zakresu stosowalności otrzymanych w tej pracy rozwiązań jest niezwykle trudne i wymaga dalszych badań.

References

1. R. FINN, W. NOLL, *On the uniqueness and nonexistence of Stokes flow*, Arch. Rat. Mech. Anal. 1, 98, 1957.
2. J. HAPPEL, H. BRENNER, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey 1965.
3. S. KAPLUN, *Low Reynolds number flow past a circular cylinder*, Jour. of Mat. and Mech. 6, 595, 1957.

4. M. KRAKOWSKI, A. CHARNES, *Stokes' paradox and biharmonic flows*, Carnegie Inst. of Techn. Tech. Rep. 37, 1951.
5. H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6th ed. London Cambr. Univ. Press 1932.
6. W. E. LANGLOIS, *Slow viscous flow*, The Macmillan Comp, New York 1964.
7. N. J. MUSKHELISVILI, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, P. Noordhoff 1953.
8. A. SZANIAWSKI, A. ZACHARA, *Przepływ laminarny w kanale o zmiennym przekroju z ruchomymi i porowatymi ściankami*, Mech. Teor. i Stos. 3, 16, 1978.
9. S. TIMOSHENKO, *Theory of plates and shells*, Mcgraw-Hill Book Comp New York 1940.

Р е з ю м е

КЛАСС МЕДЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ИСКРИВЛЁННЫХ КАНАЛАХ

Найдено класс медленных течений в искривлённых каналах когда функции скорости заданные на стенках канала достаточно гладкие. Решения тогда получаются в форме бесконечных рядов.

S u m m a r y

A CLASS OF CREEPING FLOWS IN THE CURVED CHANNELS

A class of two dimensional creeping flows has been obtained in the curved channels for the case when velocity functions prescribed at the permeable walls of the channels are sufficiently smooth. Results have been obtained in the form of infinite functional series.

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 stycznia 1985 roku

—————