

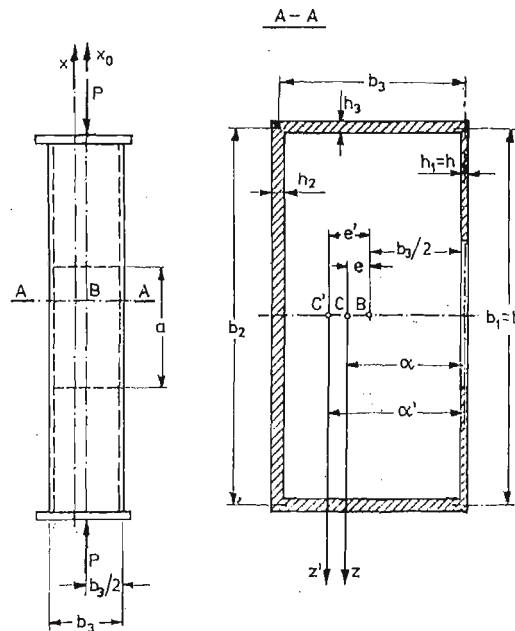
NOŚNOŚĆ GRANICZNA ŚCIANKI RÓWNOMIERNIE ŚCISKANEJ SKRZYNKOWEGO PODZESPOŁU CIENKOŚCIENNEGO

TADEUSZ GAŁKIEWICZ, ANDRZEJ ŻELIGOWSKI (ŁÓDŹ)

*Politechnika Łódzka
Instytut Mechaniki Stosowanej*

Celem pracy jest przedstawienie sposobu określenia stanu granicznego słupa o konstrukcji skrzynekowej (rys. 1), ściskanego mimośrodowo w przypadku, gdy jedna boczna ściana słupa jest równomiernie ściskana i pracuje w stanie zakrytycznym. Sposób prowadzenia obliczeń omówiony zostanie na przykładzie liczbowym. Niechaj siła P ściska słup wzdłuż osi x_0 (rys. 1) równoległej do osi x , tzn. do osi nie obciążonego słupa, i niech wymiary przekroju poprzecznego słupa (rys. 1) są następujące:

$$b_1 = b_2 = b = 0,8 \text{ m}, \quad b_3 = b/2 = 0,4 \text{ m};$$

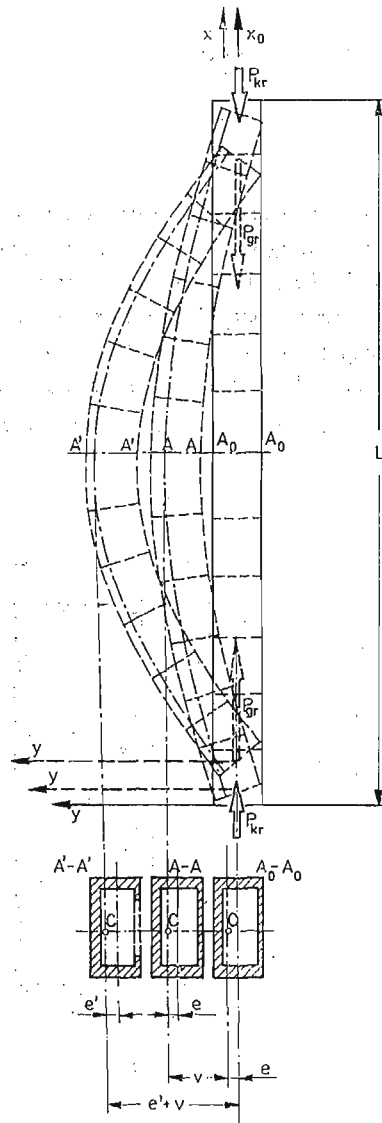


Rys. 1.

grubość cieńszej ścianki bocznej $h_1 = h = 0,004$ m, grubość grubszych ścianek bocznych $h_2 = h_3 = 2h = 0,008$ m.

W omawianym przypadku cieńsza boczna ścianka słupa jest znacznie mniej sztywna na zginanie niż ścian doń przylegających, więc w dalszych obliczeniach przyjęto, że oba brzegi cieńszej ściany równoległe do osi x są sztywno zamocowane.

Zadanie rozwiązane zostało w dwóch wariantach. W wariantcie I rozpatrzono słup krótki, następnie w wariantcie II analizie wytrzymałościowej poddano słup długi (rys. 2) wzmocniony równomiernie rozmieszczonymi przeponami.



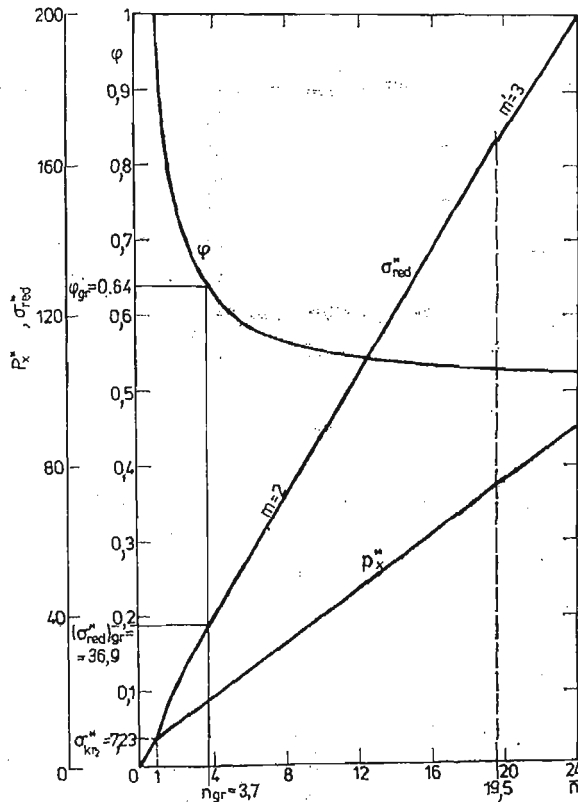
Rys. 2.

przeponami oznaczono przez a . Założono, że przepony są podatne na zginanie, więc oddziałują na ścianki boczne słupa jak podparcie rolkowe.

W obliczeniach przyjęto, że cieńsza ścianka słupa jest pasmem płytowym o szerokości b (rys. 1), podpartym na równomiernie rozstawionych przeponach, o brzegach równoległych do osi x sztywno zamocowanych. W pracy uwzględniono fakt przemieszczenia się przepon w kierunku prostopadłym do osi słupa wynikający z uginania się słupa.

Słup poddany jest mimośrodowemu ściskaniu. Przekroje poprzeczne słupa ściskane są siłą P i równocześnie zginane momentem Pe , gdzie e jest odległością środka ciężkości „pracującego przekroju poprzecznego” słupa od linii działania siły P . W omawianym przypadku wraz ze zwiększeniem się siły P wzrasta w sposób istotny ugięcie słupa, a więc i wymiar e . Obliczenia komplikują się, gdyż okazuje się, że wraz ze wzrostem obciążenia pojawia się lokalna utrata stateczności bocznej ściany słupa, w związku z czym w stanie zakrytycznym wzrostowi obciążenia towarzyszy malenie sztywności ściskania i sztywności zginania słupa.

Powtarzającym się elementem cieńszej ściany słupa (elementem tracącym stateczność) jest płyta prostokątna o bokach $a \times b$ i grubości h , ściskana w kierunku osi x . Brzegi tej płyty równoległe do osi x są w przybliżeniu sztywno utwierdzone, natomiast brzegi poprzeczne podparte są na przeponach swobodnie. Wyniki rozwiązania nieliniowego zagad-



Rys. 3.

nienia ściskania takich płyt [1] dla przypadku płyty kwadratowej ($a = b$) podane są na rys. 3.

Niżej przytoczone zostały oznaczenia, zależności i wzory niezbędne do określenia stanu krytycznego i granicznego płyty. Naprężenia krytyczne:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 k_m, \quad \sigma_{kr}^* = \frac{\sigma_{kr}}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} k_m, \quad (1)$$

gdzie

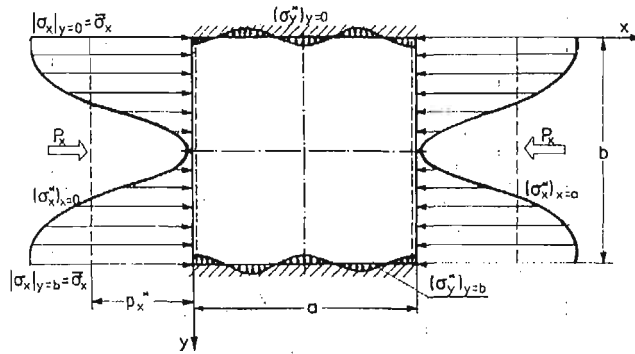
$$k_m = \left(\frac{m}{a/b}\right)^2 + \frac{8}{3} + \frac{16}{3} \left(\frac{a/b}{m}\right)^2. \quad (2)$$

W omawianym przykładzie $a = b = 0,8$ m, $h = 0,004$ m, $m = 2$, $E = 2,06 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$, $\sigma_{prop} = \sigma_{spr} = 190$ MPa, więc $k_m = 8$, $\sigma_{kr} = 37,24$ MPa, $\sigma_{kr}^* = 7,23$.

Po utracie stateczności rozkład naprężeń błonowych w płycie nie jest jednorodny (rys. 4). Średnie naprężenia σ_x oznaczone zostały symbolem p_x

$$p_x = (\delta_x)_{\bar{s}_x} = \frac{1}{bh} \int_0^b (\sigma_x)_{x=\text{const}} h dy = \frac{1}{b} \int_0^b (\sigma_x)_{x=\text{const}} dy \quad (3)$$

w wielkościach bezwymiarowych $p_x^* = \frac{p_x}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^2$.



Rys. 4.

Naprężenia błonowe σ_x przy brzegu płyty (tzn. gdy $y = 0$ bądź $y = b$) oznaczono symbolem $\bar{\sigma}_x$, czyli $\bar{\sigma}_x = |\sigma_x|_{y=0} = |\sigma_x|_{y=b}$, przez \bar{n} zaś stosunek $\bar{\sigma}_x/\sigma_{kr}$. Okazuje się, że całkowite skrócenie w kierunku osi x środkowej powierzchni płyty wzdłuż brzegu $y = 0$ i wzdłuż brzegu $y = b$ jest takie, jak gdyby wzdłuż brzegu występował jednokierunkowy stan naprężenia, czyli skrócenie płyty wynosi:

$$\Delta a = \bar{\sigma}_x a / E, \quad \text{a więc} \quad e_x = \Delta a / a = \bar{\sigma}_x / E.$$

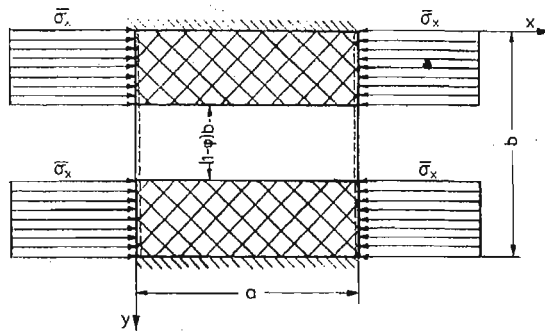
W praktycznych obliczeniach przyjmuje się często, że po utracie stateczności ściskanej płyty wyłącza się z pracy jej część, a pozostałe części o szerokości zredukowanej równej $b\varphi$ obciążona jest naprężeniami stałymi równymi $\bar{\sigma}_x$. Współczynnik redukcyjny płyty φ wynosi $\varphi = p_x / \bar{\sigma}_x$.

Rozkład naprężeń błonowych w płycie wydzielonej myślowo z cieńszej ścianki słupa pokazany jest na rys. 4. W obliczeniach przyjęto, że płyta ta wzdłuż brzegów $y = 0, y = b$ jest sztywno utwierdzona i opiera się przegubowo na dwóch kolejnych przęponach. Uproszczony model zastępczy płyty pokazany jest na rys. 5.

WARIANT I ($v = 0$)

Wariant I dotyczy przypadku słupa (rys. 1) na tyle krótkiego, iż można przyjąć, że ugięcie jego $v = 0$. Siła krytyczna dla takiego słupa wynika z zależności

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F} + \frac{P_{kr}e}{I_z} \alpha = \frac{P_{kr}}{F} \left(1 + \frac{Fe\alpha}{I_z} \right) \Rightarrow P_{kr} = \frac{\sigma_{kr} F}{1 + Fe\alpha/I_z} \quad (4)$$



Rys. 5.

gdzie σ_{kr} — naprężenie krytyczne płyty tracącej stateczność, F — pole przekroju poprzecznego słupa, α — odległość środka ciężkości pola F od powierzchni środkowej cieńszej ścianki, e — mimośród ($e = \alpha - b_3/2$), I_z — moment bezwładności pola F względem osi centralnej z .

W omawianym przypadku: $\sigma_{kr} = 37,24$ MPa, $F = 5 \cdot bh = 0,016$ m², $\alpha = 0,3b = 0,24$ m, $e = 0,05b = 0,04$ m, $I_z = 0,217b^3h = 444,4 \cdot 10^{-6}$ m⁴, więc $P_{kr} = 0,4427$ MN.

W stanie krytycznym wyężenie materiału dalekie jest od stanu granicznego, gdyż $\sigma_{max} = \sigma_{kr} = 37,24$ MPa $\ll \sigma_{prop} = 190$ MPa, słup może więc pracować w stanie zakrytycznym aż do momentu, gdy w płycie $\max \sigma_{red} = \sigma_{prop} = 190$ MPa, czyli gdy

$$\max(\sigma_{red}^*) = (\sigma_{red}^*)_{gr} = \frac{\sigma_{prop}}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^2 = \frac{190}{2,06 \cdot 10^5} \left(\frac{0,8}{0,004} \right)^2 = 36,9$$

Z wykresu rys. 3 wynika, że wówczas $\bar{n} = \bar{n}_{gr} = 3,7$, $\varphi = \varphi_{gr} = 0,64$, $\bar{\sigma}_x = (\bar{\sigma}_x)_{gr} = \bar{n}_{gr} \sigma_{kr} = 3,7 \cdot 37,24 = 137$ MPa.

W stanie zakrytycznym pole „pracującego przekroju” (zredukowane pole) cieńszej bocznej ścianki wynosi $\varphi b_1 h_1 = \varphi bh$, więc „pole pracujące” całego słupa $F' = \varphi b_1 h_1 + b_2 h_2 + 2b_3 h_3 = (\varphi + 4)bh = 0,0148$ m².

Wprowadzono oznaczenia: α' — odległość środka ciężkości pola F' od powierzchni środkowej cieńszej bocznej ścianki, (rys. 1) e' — mimośród ($e' = \alpha' - b_3/2$), I_z' — moment bezwładności pola F' względem osi centralnej tego pola — czyli względem osi z' .

W omawianym przypadku: $\alpha' = 0,324b = 0,26$ m, $e' = 0,074b = 0,059$ m, $I_z' = 368,6 \cdot 10^{-6}$ m⁴.

Siłę graniczną określa się ze wzoru analogicznego do (4). Wynosi ona:

$$P_{gr} = \frac{(\bar{\sigma}_x)_{gr} F'}{1 + F' e' \alpha' / I_z} = 1,26 \text{ MN.}$$

Siła ta jest większa od siły krytycznej 2,85 razy.

WARIANT II ($v \neq 0$)

Wariant II dotyczy przypadku słupa na tyle długiego, iż w obliczeniach uwzględnić należy jego uginanie się.

Analizie poddano słupek o przekroju poprzecznym takim, jak w wariancie I podparty przegubowo. Przyjęto przykładowo $L = 20a = 16 \text{ m}$. Słupek poddany jest ściskaniu siłą P działającą stale wzdłuż osi x_0 (rys. 2). Siłę tę można zredukować do środka ciężkości „pracującego przekroju” poprzecznego słupka. Moment gnący w przekroju poprzecznym zmienia się na długości słupka, gdyż zależy od rzędnej linii ugięcia v i od położenia środka ciężkości tego przekroju. Moment ten wynosi:

- w stanie dokrytycznym $M_g = P(e+v)$,
- w stanie zakrytycznym $M_g = P(e'+v)$.

Stan dokrytyczny

Do chwili utraty stateczności ścianki równania różniczkowe osi ugiętej słupka ma postać $EI_z v'' = -P(e+v)$, więc

$$v'' + \beta^2 v = -\beta^2 e, \quad (5)$$

gdzie $\beta = \sqrt{P/EI_z}$.

Rozwiązaniem tego równania, uwzględniającym przyjęte warunki brzegowe jest funkcja

$$v = e \left[\frac{2 \sin^2(\beta L/2)}{\sin(\beta L)} \sin(\beta x) + \cos(\beta x) - 1 \right], \quad (6)$$

więc

$$v_{max} = v_{x=L/2} = 2e \left[\frac{\sin^3(\beta L/2)}{\sin(\beta L)} - \sin^2(\beta L/4) \right] = e \left[\frac{1}{\cos(\beta L/2)} - 1 \right]. \quad (7)$$

W połowie długości słupka w przekroju poprzecznym maksymalne naprężenia ściskające cieńszą bocznią ściankę wynoszą

$$\sigma_1 = \frac{P}{F} + \frac{P(e+v_{max})}{I_z} \alpha = \frac{P}{F} \left[1 + \frac{F(e+v_{max})\alpha}{I_z} \right], \quad (8)$$

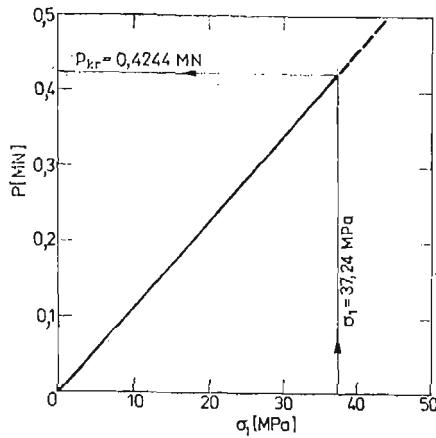
stąd

$$P = \sigma_1 F / [1 + F(e+v_{max})\alpha / I_z]. \quad (9)$$

We wzorze tym wielkości F , e , α , I_z są takie, jak w I wariancie, natomiast ugięcie v_{max} określa się ze wzoru (7). Zależność P od σ_1 wynikająca z powyższego wzoru pokazana jest na rys. 6. W omawianym przypadku traci stateczność cieńsza z bocznych ścianek słupka. Poprzednio wykazano, że dla tej ścianki $\sigma_1 = (\sigma_1)_{kr} = 37,24 \text{ MPa}$, więc z wykresu (rys. 6) widać, że dla tej wartości naprężenia siła

$$P = P_{kr} = 0,4244 \text{ MN.}$$

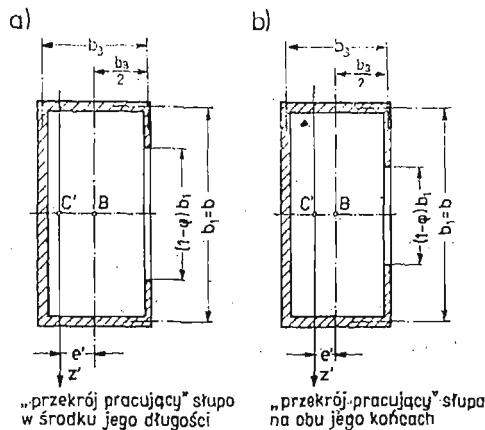
Siła ta jest więc o 4.1% mniejsza od siły krytycznej otrzymanej dla przypadku słupka krótkiego (patrz WARIANT I).



Rys. 6.

Stan zakrytyczny

Po utracie stateczności pole powierzchni „pracującego przekroju” F zmienia się wzdłuż długości słupa. Najmniejsze pole jest w przekroju najbardziej obciążonym, tzn. w środku długości słupa (rys. 7a), natomiast największe przy obu jego końcach (rys. 7b). W oma-



Rys. 7.

wianym przykładzie różnice liczbowe między polami przekrojów pokazanymi na rys. 7a i 7b nie są duże. Chcąc ocenić wpływ długości słupa na wyniki rozwiązań wariantów I i II postąpiono ostrożnie, przyjmując w obliczeniach, że w stanie granicznym słupa pola wszystkich jego przekrojów poprzecznych są jednakowe i są takie, jakie były przy określaniu siły granicznej w wariantie I. Po podstawieniu do wzorów (5) ÷ (7) zamiast współrzędnej e współrzędną $e' = 0,059$ m, zamiast momentu I_z moment $I_{z'} = 368,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$ i przyjęciu w pierwszym przybliżeniu wartości granicznej np. $(P_{gr})_1 = 1,1$ MN (czyli wartości nieco mniejszej od wartości uzyskanej w I wariantcie), otrzymano:

$$(\beta L)_1 = 1,926, \quad (v_{max})_1 = 0,0444 \text{ m}$$

Maksymalne naprężenie w cieńszej bocznej ścianie wynosi

$$\sigma_1 = \frac{P_{gr}}{F'} + \frac{P_{gr}(e' + v_{max})}{I_{z'}} \alpha' = \frac{P_{gr}}{F'} \left[1 + \frac{F'(e' + v_{max})}{I_{z'}} \alpha' \right]$$

stąd

$$P_{gr} = \frac{\sigma_1 F'}{[1 + F'(e' + v_{max}) \alpha' / I_{z'}]}$$

Jeżeli do powyższego wzoru podstawimy $\sigma_1 = (\sigma_1)_{gr} = 137,8$ MPa (patrz I wariant) $F' = 0,0148$ m², $e' = 0,059$ m, $v_{max} = 0,0444$ m, $\alpha' = 0,26$ m, $I_{z'} = 368,6 \cdot 10^{-6}$ m⁴, to otrzyma się drugie przybliżenie wartości siły granicznej. Okazuje się, że dokładniejsza wartość siły granicznej wynosi $(P_{gr})_2 = 0,981$ MN.

Powtarzanie powyższych obliczeń prowadzi do dalszego uściślenia rozwiązania. Otrzymuje się kolejno następujące wyniki:

$$\begin{aligned} (\beta L)_2 &= 1,82, & (v_{max})_2 &= 0,371 \text{ m}, & (P_{gr})_3 &= 1,018 \text{ MN}, \\ (\beta L)_3 &= 1,853, & (v_{max})_3 &= 0,0392 \text{ m}, & (P_{gr})_4 &= 1,007 \text{ MN}, \\ (\beta L)_4 &= 1,842, & (v_{max})_4 &= 0,03855 \text{ m}, & (P_{gr})_5 &= 1,01 \text{ MN}. \end{aligned}$$

W wariancie II siła graniczna jest większa od krytycznej 2,38 razy.

Podsumowanie

Celem pracy jest przedstawienie sposobu określenia stanu krytycznego i granicznego cienkościennego słupa o budowie skrzynkowej doznającego lokalnej utraty stateczności i pracującego w stanie zakrytycznym. W pracy wykazano, jak dla konkretnego przypadku ocenić wpływ długości słupa na wartość siły krytycznej i siły granicznej. Okazało się, że przy długim słupie ten wpływ jest istotny. W analizowanych w pracy przykładach siła graniczna w wariancie II (tzn. w słupie dłuższym) jest mniejsza od siły uzyskanej w wariancie I o $\sim 20\%$.

Literatura

1. T. GAŁKIEWICZ, A. ŻELIGOWSKI, *Stateczność i stan zakrytyczny konstrukcji cienkościennych**. Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12. IPPT PAN 1974-78. Inst. Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej.
2. T. KARMAN, E. E. SECHLER, L. H. DONNELL, *The strength of thin plates in compression*. Trans. ASME 54, 1932.
3. A. S. VOLMIR, *Ustoicivost deformiruiemych sistem*. Nauka, Moskwa 1967.

*) Zagadnienie rozwiązano stosując metodę Bubnowa-Galerkina aproksymując ugięcie płyty za pomocą funkcji $w = f(1 - \cos 2\pi y/b) \sin(m\pi x/a)$, przy uwzględnieniu możliwości skokowego narastania wraz z obciążeniem liczby półfal m . Naprężenia zredukowane określone zostały wg hipotezy Hubera w $m \times 196$ punktach.

Р е з ю м е

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ТОНКОЙ БОКОВОЙ СТЕНКИ ТОНКОСТЕННОГО СТОЛБА

Проблема касается равномерно сжатой тонкой боковой стенки тонкостенного столба содержащей между хрупкими диафрагмами и прилегающими к этой стенке гораздо негнущимися боковыми стенками. Приводя результаты решения представлено один с методов использования помещенными формулами и диаграммами. Доказано, что длина сжатого столба имеет влияние на величину критической и граничной силы.

S u m m a r y

ULTIMATE STRENGTH OF UNIFORM COMPRESSED FLANGE
OF THIN-WALLED BOX SUBSTRUCTURE

The problem considered is similar to that which occurs during uniform compression of thin plate element of the column. Such an element is situated between two significantly flexurally stiffer walls of the column and on two other sides is connected to slender diaphragm. Results are given in the form of expressions and tables. An exemplary illustration of their practical application is also presented. It has been proved that the length of the compressed column have an effect on the critical loading as well as on the load carrying capacity of the structure considered.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 sierpnia 1984 roku
