

WYKORZYSTANIE RACHUNKU DYSTRYBUCYJNEGO DO OPISU TARCZY ZARYSOWANEJ

JACEK GŁADYSZ, MACIEJ MINCH (WROCLAW)

*Institut Budownictwa
Politechniki Wrocławskiej*

W pracy sformułowano zasadę wariacyjną typu Lagrange'a dla tarczy zarysowanej. Następnie wykorzystując otrzymane równanie pola Lamé wraz ze stowarzyszonymi warunkami brzegowymi (zewnętrznymi i wewnętrznymi) wyprowadzono globalne równanie różniczkowe w klasie dwuwymiarowych wektorowych funkcji uogólnionych. W modelu uwzględniono doświadczalnie potwierdzony efekt nieciągłości wektora przemieszczenia spowodowany pojawieniem się rysy.

1. Wprowadzenie

Dotychczasowe sposoby obliczania żelbetowych tarcz zarysowanych rozwijały się w dwóch kierunkach. Pierwszy z nich wyznaczają prace, w których zastosowano kontynuálny model obliczeń. Przykładowo można tu wymienić prace [1, 2] (metoda różnic skończonych) oraz [3] (metoda elementów skończonych). Globalny obraz efektów zarysowania otrzymany w tych pracach jest poprawny, jednak zaburzenia w miejscach rys są z założenia niedokładne. Drugi kierunek polega na formułowaniu ścisłych modeli matematycznych dla ciał kruchych z defektami. Literatura w tej dziedzinie jest niezwykle bogata. Wymienić tu można prace [4], w której rozwiązań poszukuje się poprzez przekształcenia całkowe i wprowadzenie funkcji zespolonych, oraz prace [5, 6, 7], gdzie podano teorie defektów. Teorie te polegają na budowaniu pewnych potencjałów modelujących defekty.

Wykorzystanie matematycznych modeli dla ciał kruchych w konstrukcjach z betonu zbrojonego napotyka jednak na pewne trudności. Dlatego też teorie żelbetu rozwijają się niezależnie, choć wykorzystują również rozwiązania matematycznych teorii defektów. Jedną z udanych prób wzbogacania matematycznego modelu płyty zarysowanej stanowi praca [8]. W pracy tej dokonano opisu płyty przy pomocy rachunku dystrybucyjnego.

W niniejszej pracy wyprowadzono różniczkowe równanie tarczy zarysowanej w klasie dwuwymiarowych wektorowych funkcji uogólnionych, uwzględniające nieciągłość wektora przemieszczenia w miejscu rysy. Rozpatrywana jest tarcza o dowolnym kształcie, z ogólnymi warunkami brzegowymi. Celem zwiększenia przejrzystości zapisu założono istnienie pojedynczej rysy krzywoliniowej wewnątrz jej obszaru.

2. Podstawowe związki i definicje

Poniżej przedstawiono definicje i związki teorii dystrybucji wykorzystywane w dalszej części pracy (zob. np. [9]).

DEFINICJA 1. Przestrzenią $D(\Omega)$ dwuwymiarowych wektorowych funkcji próbnych nazywa się zbiór wszystkich funkcji φ określonych w dowolnym obszarze Ω przestrzeni euklidesowej R^2 , spełniających następujące warunki:

- a) $\varphi \in C^\infty(\Omega)$,
- b) nośnik funkcji φ jest zbiorem zwartym.

DEFINICJA 2. Dystrybucją lub funkcją uogólnioną nazywa się każdy funkcjonal $f: D(\Omega) \rightarrow R^1$ liniowy i ciągły w $D(\Omega)$, tzn. funkcjonal o następujących właściwościach:

$$\langle f, a\varphi + b\psi \rangle = a\langle f, \varphi \rangle + b\langle f, \psi \rangle, \quad \text{gdzie } a, b \in R \quad (2.1)$$

DEFINICJA 3. Działania na dystrybucji określone są w następujący sposób:
Suma dystrybucji:

$$\langle f_1 + f_2, \varphi \rangle = \langle f_1, \varphi \rangle + \langle f_2, \varphi \rangle \quad (2.2)$$

Iloczyn funkcji gładkiej i dystrybucji

$$\langle \beta f, \varphi \rangle = \langle f, \beta \varphi \rangle, \quad \beta \in C^\infty(R^2) \quad (2.3)$$

Pochodna dystrybucji

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle \quad (2.4)$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, D^α — jest operatorem różniczkowym rzędu α .

Z definicji 3 wynika, że dystrybucja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

W dalszych rozważaniach istotne znaczenie mają dystrybucje (będące uogólnieniem funkcji δ -Diraca) o danej gęstości skoncentrowanej na krzywej $l \in R^2$ o następujących własnościach:

$$\begin{aligned} \langle \psi \delta_l, \varphi \rangle &= \int \psi(x) \varphi(x) ds, \\ \langle D^\alpha(\psi \delta_l), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \int \psi(x) D^\alpha \varphi(x) ds, \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie: $x = (x_1, x_2)$.

3. Wariacyjny opis przemieszczenia dla tarczy zarysowanej

Podstawowy układ równań dla płaskiego stanu naprężenia składa się z: równań równowagi

$$\operatorname{div} S + b = 0; \quad (3.1)$$

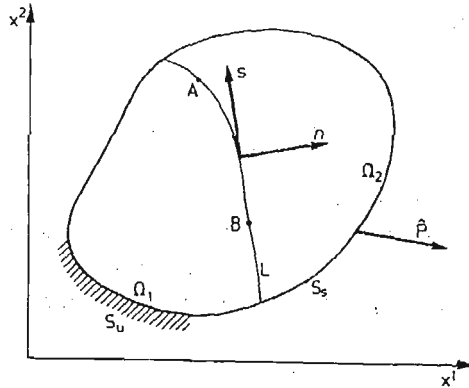
związków geometrycznych

$$E = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \equiv \hat{\nabla} u; \quad (3.2)$$

oraz związków fizycznych

$$S = 2\mu \left(E + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{1} \operatorname{tr} E \right); \quad (3.3)$$

Tutaj S , E , u , b oznaczają kolejno tensor naprężenia, tensor odkształcenia, wektor przemieszczenia oraz wektor sił masowych; λ i μ są stałymi Lamégo. Ponadto $\mathbf{1}$ jest tensorem jednostkowym.



Rys. 1.

Do układu równań pola (3.1)÷(3.3) należy dołączyć jeszcze warunki brzegowe (rys. 1).

— przemieszczeniowe $u = \hat{u}$ na S_u (3.4)

— naprężeniowe $Sn = \hat{p}$ na S_s (3.5)

gdzie \hat{u} i \hat{p} są funkcjami zadanymi odpowiednio na brzegu S_u i S_s , n zaś oznacza wektor normalny zewnętrzny do S .

Zakłada się, że układ równań (3.1)÷(3.3) spełniony jest w obszarze dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej Ω ograniczonej powierzchnią $S = S_u \cup S_s$.

Do opisu omawianego zagadnienia wykorzystano zasadę wariacyjną typu Lagrange'a. Oznacza to założenie o poszukiwanej funkcji u , że spełnia ona związki geometryczne (3.2), związki fizyczne (3.5) oraz przemieszczeniowe warunki brzegowe (3.4).

Przyjęto funkcjonal w postaci:

$$J[u(x)] = \int_{\Omega} U(u(x)) d\Omega - \int_{\Omega} b(x)u(x) d\Omega - \int_{S_s} \hat{p}(x)u(x) ds \quad (3.6)$$

gdzie

$$U = \frac{1}{2} \mu \left(\hat{\nabla} u \hat{\nabla} u + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \operatorname{div} u \operatorname{div} u \right) \quad (3.7)$$

jest funkcją energii odkształcenia.

Poszukuje się ekstremali funkcjonau (3.6) na zbiorze dopuszczalnych wartości wektora przemieszczenia u w obszarze Ω , przy założeniu istnienia jednego załamania dzielącego ten obszar na dwa podobszary Ω_1 i Ω_2 (rys. 1).

Przyjęto, że poszukiwana funkcja $u \in C^2(\Omega/L)$ (dla $x \in L$ funkcja $u(x)$ ma nieciągłość).

Warunkiem koniecznym na to, by \mathbf{u} było rzeczywistym przemieszczeniem w tarczy, jest zerowanie się pierwszej wariacji funkcjonału (3.6), co po prostych przekształceniach można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \delta J = & - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left\{ \mu \left[\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div } \mathbf{u} \right] + \mathbf{b} \right\} \delta \mathbf{u} d\Omega + \\ & + \int_{S_s} [\hat{\mathbf{p}} - P(\mathbf{u})] \delta \mathbf{u} ds + \int_L P(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} ds = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie:

$$P(\cdot) = \mu \left(\hat{\nabla} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{1} \text{div} \right) (\cdot) \mathbf{n} \quad (3.9)$$

jest operatorem napięcia powierzchniowego.

Pojawienie się ostatniej całki we wzorze (3.8) wynika z uwzględnienia dodatkowego brzegu wewnątrz tarczy, tzn. linii $L = L_1 \cup L_2$ (L_1 i L_2 stanowią odpowiednio lewy i prawy brzeg rysy). Należy zwrócić uwagę na fakt, że wektory \mathbf{n} normalne do brzegu L_1 i L_2 mają przeciwne zwroty.

Warunek (3.8) musi być spełniony dla dowolnej wariacji $\delta \mathbf{u}$. Stąd otrzymuje się: przemieszczeniowe równanie różniczkowe tarczy

$$\mu \left(\nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

naturalne naprężeniowe warunki brzegowe

$$P(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{p}} \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \in S_s \quad (3.11)$$

oraz dodatkowe warunki brzegowe

$$[P(\mathbf{u})]_L = \mathbf{0} \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \in L \quad (3.12)$$

gdzie $[]_L$ oznacza różnicę prawostronnej i lewostronnej granicy wyrażenia w nawiasie na krzywej L .

4. Równanie różniczkowe tarczy zarysowanej

W poprzednim rozdziale obszar tarczy podzielony został na dwa podobszary Ω_1 i Ω_2 , w których funkcja \mathbf{u} jest ciągła. Obecnie będzie poszukiwane rozwiązanie w całym obszarze Ω przy założeniu, że \mathbf{u} należy do klasy funkcji uogólnionych. W tym celu w oparciu o związki z rozdziału 1 formalnie oblicza się wyrażenia:

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = & \int_{\Omega} \{ \nabla^2 \mathbf{u} \} \boldsymbol{\varphi} d\Omega - \int_S \left[\left(\frac{\partial}{\partial n} \mathbf{u} \right) \boldsymbol{\varphi} - \left(\frac{\partial}{\partial n} \boldsymbol{\varphi} \right) \mathbf{u} \right] ds + \\ & + \int_L \left[\left(\frac{\partial}{\partial n} \mathbf{u} \right)_L \boldsymbol{\varphi} - \frac{\partial}{\partial n} \boldsymbol{\varphi} [\mathbf{u}]_L \right] ds, \end{aligned} \quad (4.1)$$

oraz

$$\begin{aligned} \langle \text{grad div } \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \int_{\Omega} \{ \text{grad div } \mathbf{u} \} \boldsymbol{\varphi} d\Omega + \int_S [\text{div } \mathbf{u} \mathbf{u} - \\ &- \text{div } \mathbf{u} \boldsymbol{\varphi}] ds - \int_L [[\mathbf{u}]_L \text{div } \boldsymbol{\varphi} - [\text{div } \mathbf{u}]_L \boldsymbol{\varphi}] \mathbf{n} ds; \end{aligned} \quad (4.2)$$

tutaj $\{ \}$ oznacza różniczkowanie w zwykłym sensie; $[\mathbf{u}]_L$ zaś oznacza skok wektora przemieszczenia przy przejściu przez rysę. Ponadto prawo fizyczne rządzące defektem opisane jest wyrażeniem:

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x})]_L = \mathbf{g}(\mathbf{x}); \quad (4.3)$$

gdzie: $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ jest funkcją gęstości defektu ciągłą dla $\mathbf{X} \in L$. Przykładową postać gęstości defektu (związku konstytutywnego w rysie) można znaleźć w pracy [10].

Całość dotychczasowych rozważań dotyczyła szczególnego przypadku rysy dzielącej obszar Ω na dwie części. Można wykazać, że uogólnienie na przypadek rysy wewnętrznej (np. na łuku \widehat{AB} — rys. 1) w niczym nie zmienia przeprowadzonych wyżej rozważań. Sprowadza się to do przyjęcia na pozostałej części krzywej L warunku

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x})]_L = \mathbf{0} \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \notin \widehat{AB}, \quad (4.4)$$

oraz związków definiujących zachowanie się funkcji gęstości defektu na końcach rysy

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial s}(A) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial s}(B) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

Po elementarnych przekształceniach wzoru (3.10) i wykorzystaniu relacji (3.11), (3.12) oraz (4.1)÷(4.3) otrzymano równanie różniczkowe na wektor przemieszczenia $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ w klasie funkcji uogólnionych

$$\begin{aligned} \mu \left\langle \left(\nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle + \langle \mathbf{b}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \\ = \int_S [\mathbf{u} P(\boldsymbol{\varphi}) + (\hat{\mathbf{p}} - P(\mathbf{u})) \boldsymbol{\varphi}] ds + \int_{\widehat{AB}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) P(\boldsymbol{\varphi}) ds. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ostateczne globalne równanie różniczkowe tarczy zarysowanej można zapisać w postaci:

$$\mu \left(\nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{u} + \mathbf{b} = -P(\mathbf{g} \delta_L) + (\hat{\mathbf{p}} - P(\mathbf{u})) \delta_{S_s} - P(\mathbf{u} \delta_{S_s}). \quad (4.7)$$

Jeżeli przyjmie się siły masowe w formie:

$$\mathbf{b} = -P(\hat{\mathbf{u}} \delta_{S_s}). \quad (4.8)$$

to równanie (4.7) przyjmie postać:

$$\mu \left(\nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{u} = -P(\mathbf{g} \delta_L) + (\hat{\mathbf{p}} - P(\mathbf{u})) \delta_{S_s} + P[(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \delta_{S_s}] \quad (4.9)$$

W ten sposób otrzymano równanie różniczkowe tarczy zarysowanej, które zawiera w sobie komplet warunków brzegowych zewnętrznych oraz dodatkowo spełnia warunek graniczny w rysie.

Wykorzystując definicję splotu, można zapisać rozwiązanie równania różniczkowego (4.9) w formie przedstawienia całkowego na funkcję $u(\mathbf{x})$

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) P(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) ds + \int_S \{ P(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) [u(\mathbf{y}) - \hat{u}(\mathbf{y})] - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [P(u(\mathbf{y})) - \hat{p}(\mathbf{y})] \} ds \quad (4.10)$$

gdzie $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jest funkcją Greena spełniającą równanie

$$\mu \left(\nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \quad (4.11)$$

oraz założone warunki brzegowe (3.4) i (3.5).

5. Podsumowanie

Wyprowadzone globalne równanie różniczkowe opisuje ścisły matematyczny model tarczy zarysowanej. Pojawienie się w równaniu (4.9) warunków brzegowych wynika z zastosowania do analizy funkcji uogólnionych. Równanie to uwzględnia nieciągłość wektora przemieszczenia w miejscu rysy, zapewniając jednocześnie ciągłość wektora napięcia powierzchniowego przy przejściu przez krzywą L . Skonstruowany model posłuży do wyznaczania przemieszczeń w tarczy zarysowanej metodą całek brzegowych, gdzie efekt rysy traktowany jest jako małe zaburzenie.

Literatura cytowana w tekście

1. F. LEONHARDT, E. MÖNNING, *Vorlesungen über Massivbau*, 2, Springer, Berlin 1975.
2. N. KARPIENKO, *Teoria deformirovanija żelezobetona s treščinami*. Stroizdat, Moskva 1976.
3. L. CEDOLIN, S. DEI POLI, B. S. KAPUR, *Finite element analysis of reinforced concrete deep beams*. Con-
struzioni in cemento armato, 3-13, Politecnico di Milano, Italcementi 1977.
4. J. SNEDDON, *Zagadnienie szczelin w matematycznej teorii sprężystości*, PWN, Warszawa 1962.
5. H. ZORSKI, *Theory of discrete defects*, Arch. Mech., 18, 3, 301 - 372, 1966.
6. E. KOSSECKA, *Mathematical theory of defects*, Part I, Statics, Arch. Mech., 26, 6, 995 - 1010, 1974.
7. J. D. ESHELBY, *The continuum theory of lattice defects*, Solid State Physics, 3, 79, 1956.
8. A. BARYŁA, E. SOBOCIŃSKA, *Teoria płyt żelbetowych z rysami*. PWN, Warszawa—Łódź 1983.
9. L. SCHWARTZ, *Theorie des distributions*, Paris 1966.
10. M. MINCH, *Metoda teoretycznego wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach zarysowanych*. Rozp.
Inż., 28, 3, 445 - 468, 1980.

Резюме

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО СЧЁТА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЗАРИСОВАННОГО ДИСКА

В работе введено дифференциальное уравнение зарисованного диска используя классический вариационный принцип типа Лягранжа. Получено уравнение поля Ляме вместе с относительными наружными и внутренними береговыми условиями в трещине. Мы представили валовое дифференциальное уравнение в классе двумерных обобщённых векторных функций. В модели мы взяли во внимание опытно опровергаемый эффект прерывности вектора перемещения вызванный возникновением трещины.

S u m m a r y

THE APPLICATION OF DISTRIBUTION CALCULUS TO THE DESCRIPTION OF CRACKED PLATE

In this paper the differential equation of the cracked plate, using the classical variational method of Lagrange is worked out. The displacements equation of Lamé with the boundary conditions and compatibility conditions in the crack is obtained. The total differential equation in the class of the two-dimensional general vector functions is shown. In this model the effect of discontinuity displacement vector into account is taken.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 sierpnia 1984 roku
