

MODELOWANIE MATEMATYCZNE AUTOMATYCZNIE STEROWANEGO ŚMIGŁOWCA W RUCHU PRZESTRZENNYM

KRZYSZTOF JANKOWSKI (WARSZAWA)
JERZY MARYNIAK

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

Przedmiotem prezentowanej pracy jest zbudowanie modelu fizycznego i matematycznego śmigłowca wraz z umieszczonym na nim układem sterowania automatycznego, przy możliwie małej liczbie założeń upraszczających. Celowość zbudowania takiego modelu wynika z potrzeby bardziej dokładnego zbadania szeregu zagadnień dynamiki ruchu przestrzennego śmigłowca z uwzględnieniem wszystkich głównych stopni swobody, wpływu ruchu wirnika nośnego, śmigła ogonowego, statecznika poziomego oraz turbin silników. W dotychczas opublikowanych pracach z tej tematyki [6, 8, 10] zagadnienia te nie są całościowo rozpatrywane.

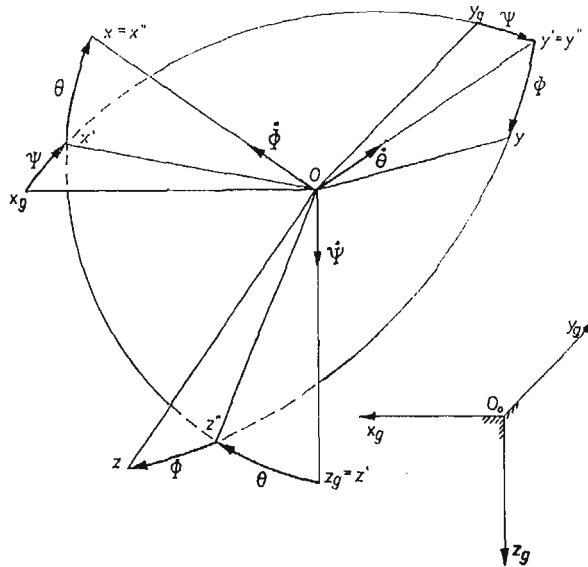
Często stawiane jest zadanie uwzględnienia w opisie matematycznym śmigłowca pełniejszych charakterystyk masowych łopatek wirnika nośnego i śmigła ogonowego oraz statecznika: momentów bezwładności względem ich osi podłużnej, momentów dewiacyjnych oraz statycznych (wyważenia łopat) [1, 6, 9, 10]. W takim przypadku, jeśli uwzględnia się jednocześnie więzy nakładane przez układ sterowania automatycznego, rozpatrywany układ mechaniczny jest układem nieholonomicznym (najczęściej są to więzy kinematyczne, niecałkowalne i nie sprowadzające się do więzów geometrycznych). Dzieje się tak dlatego, że kąty ustawienia łopat są obecnie współzrędnymi uogólnionymi, opisującymi położenie układu mechanicznego. Ponieważ śmigłowce nie mają dobrych własności dynamicznych i charakterystyk stateczności [7, 8, 9], na większości etapów lotu korzystają z układów podwyższania stateczności. W związku z tym uwzględnianie więzów nieholonomicznych przy budowaniu pełnych modeli dynamicznych śmigłowców jest niezbędne.

2. Model fizyczny obiektu oraz współrzędne opisujące położenie jego elementów

Przyjmuje się, że rozpatrywany jednowirnikowy śmigłowiec jest układem mechanicznym, którego główną częścią jest sztywny kadłub oraz następujące sztywne elementy, mogące zmieniać swe położenie względem kadłuba:

- części obrotowe silników turbinowych ze swobodną turbiną,
- piasta wirnika nośnego z wałem i układem przenoszenia mocy,
- łączniki łączące za pomocą przegubów poziomych i pionowych piastę z łopatom,
- łopaty wirnika nośnego,
- piasta śmigła ogonowego,
- łopaty śmigła ogonowego, przegubowo mocowane do piasty,
- statecznik poziomy.

Dla opisu ruchu kadłuba w przestrzeni wykorzystuje się następujące układy odniesienia [4] (rys. 1):



Rys. 1. Transformacja quasi-eulerowska

- nieruchomy układ grawitacyjny $O_0 x_g y_g z_g$ związany z Ziemią,
- układ grawitacyjny $O x_g y_g z_g$ związany ze środkiem masy kadłuba,
- układ $Oxyz$, sztywno związany z kadłubem, którego oś Oz jest równoległa do osi wału wirnika nośnego (rys. 2).

Chwilowe położenie kadłuba wyznaczone jest przez współrzędne x_g, y_g, z_g jego środka masy w nieruchomym układzie współrzędnych oraz przez quasi-eulerowskie kąty obrotu (samolotowe) Φ, θ, Ψ (rys. 1).

Dla opisu ruchu pozostałych elementów śmigłowca wprowadzono odpowiednie układy współrzędnych, sztywno związane z kadłubem, równoległe do $Oxyz$ (rys. 2, rys. 3). Położenie danego elementu będzie wyznaczone, jeżeli poda się jego położenie kątowe względem właściwego układu współrzędnych.

Położenie turbiny napędowej i turbiny sprężarki silnika lewego opisują kąty ψ_{tl} i ψ_{kl} ich obrotu dookoła osi $O_{sl} x_{sl}$ (rys. 3), a dla silnika prawego odpowiednio kąty ψ_{tr} i ψ_{kr} .

Chwilowe położenie i -tej łopaty wirnika nośnego wyznaczają współrzędne punktu O_3 w układzie $O_2 x_2 y_2 z_2$ oraz kąty: ψ_i — azymutu, β_i — wahań, ξ_i — odchylenia oraz

φ_i — ustawienia łopaty (rys. 4). Kąt ψ_i związany jest z kątem obrotu piasty wirnika nośnego następującą zależnością:

$$\psi_i = \psi + \frac{2\pi i}{n}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (1)$$

gdzie: n — liczba łopat.

Położenie j -tej łopaty śmigła ogonowego opisuje się podając położenie początku układu $O_5 x_5 y_5 z_5$ w układzie $O_4 x_4 y_4 z_4$ oraz kątami: ψ_{sj} — azymutu, ξ_j — wahań i φ_{sj} — ustawienia łopaty (rys. 5). Kąt ψ_{sj} w następujący sposób zależy od kąta obrotu piasty śmigła:

$$\psi_{sj} = \psi_s + \frac{2\pi j}{m}, \quad (j = 0, 1, \dots, m-1), \quad (2)$$

gdzie m — liczba łopat śmigła ogonowego.

Położenie statecznika poziomego wyznacza kąt φ_{st} jego obrotu dookoła osi $O_6 y_6$.

3. Więzy geometryczne i kinematyczne nałożone na układ

Na współrzędne, opisujące położenie punktów rozpatrywanego układu mechanicznego, nałożone są następujące ograniczenia, wynikające ze struktury kinematycznej śmigłowca:

— sprzężenie kąta obrotu piasty wirnika nośnego z kątami obrotów turbin napędowych silników:

$$\psi_{tp} = \psi_{ti} = i_i \psi; \quad (3)$$

— sprzężenie kąta obrotu śmigła ogonowego z kątem obrotu wirnika nośnego:

$$\psi_s = i_s \psi; \quad (4)$$

— związek kąta ustawienia i -tej łopaty wirnika nośnego z kątami określanymi przez układ sterowania i kompensator wzniosu łopaty:

$$\varphi_i = \varphi_\theta + \Delta\varphi + \theta_1 \sin \psi_i + \theta_2 \cos \psi_i + k\beta_i, \quad (5)$$

gdzie:

φ_θ — kąt skoku ogólnego,

$\Delta\varphi$ — kąt skręcenia łopaty względem przekroju początkowego,

k — współczynnik kompensatora wzniosu łopaty,

θ_1, θ_2 — kąty pochylenia tarczy sterującej na azymutach 90° i 0° ;

— zależności kątów pochylenia tarczy sterującej od kątów sterowania w ruchu podłużnym \varkappa i ruchu bocznym η :

$$\theta_1 = \varkappa \sin \psi_0 + \eta \cos \psi_0, \quad (6)$$

$$\theta_2 = \varkappa \cos \psi_0 - \eta \sin \psi_0, \quad (7)$$

gdzie ψ_0 — kąt wyprzedzenia sterowania;

— zależność kąta ustawienia j -tej łopaty śmigła ogonowego od kąta sterowania φ_s :

$$\varphi_{sj} = \varphi_s; \quad (8)$$

— zależność kąta ustawienia statecznika poziomego od kąta skoku ogólnego łopata wirnika nośnego:

$$\varphi_{sr} = A_0 + A_1 \varphi_g + A_2 \varphi_g^2, \quad (9)$$

gdzie A_0, A_1, A_2 — stałe współczynniki.

Są to więzy geometryczne nałożone na układ. Obecność układu automatycznego sterowania lotem nakłada na rozpatrywany obiekt następujące więzy kinematyczne, liniowe względem prędkości [7, 9]:

— prawo sterowania w kanale pochylenia:

$$T_1 \dot{\alpha} + \alpha = k_\theta(\theta - \theta_z) + k_q Q + k_x(x_g - x_{gz}) + k_{\dot{x}}(\dot{x}_g - \dot{x}_{gz}) + \alpha_0,$$

— prawo sterowania w kanale przechylenia:

$$T_2 \dot{\eta} + \eta = k_\Phi(\Phi - \Phi_z) + k_p P + k_y(y_g - y_{gz}) + k_{\dot{y}} \dot{y}_g + k_{\Psi}(\Psi - \Psi_z) + \eta_0, \quad (11)$$

— prawo sterowania w kanale wysokości:

$$T_3 \dot{\varphi}_g + \varphi_g = k_z(z_g - z_{gz}) + k_{\dot{z}} \dot{z}_g + \varphi_{g0}, \quad (12)$$

— prawo sterowania w kanale odchylenia:

$$T_4 \dot{\varphi}_s + \varphi_s = k_\Psi(\Psi - \Psi_z) + k_r R + \varphi_{s0}. \quad (13)$$

W równaniach tych $T_1 \div T_4$ oznaczają stałe czasowe członów inercyjnych, opisujących charakterystyki dynamiczne elementów wykonawczych autopilota [7, 8, 9], wielkości z indeksem „z” oznaczają zadane wartości parametrów lotu, a indeks „o” przy symbolu kąta sterowania oznacza jego wartość w stanie ustalonym (początkowym). Wybrany stan pracy układu automatycznego sterowania lotem otrzymuje się przez nadanie odpowiednich wartości (w tym zerowych) współczynnikom wzmocnienia k_a .

Ponieważ związki opisujące więzy kinematyczne są niecałkowalne, rozpatrywany układ mechaniczny jest układem nieholonomicznym.

4. Współrzędne uogólnione i quasi — prędkości

Obecnie można opisać zbiór współrzędnych, wyznaczających w sposób zupełny położenie rozpatrywanego układu. Są to:

— współrzędne środka masy kadłuba śmigłowca w układzie $O_0 x_g y_g z_g$: $q_1 = x_g$, $q_2 = y_g$, $q_3 = z_g$;

— kąty quasi — eulerowskie: $q_4 = \Phi$, $q_5 = \theta$, $q_6 = \Psi$ (rys. 1);

— kąt obrotu piasty wirnika nośnego: $q_7 = \psi$ (rys. 4a);

— kąty wahań łopata wirnika: $q_{8+i} = \beta_i$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$), (rys. 4a);

— kąty obrotów łopata wirnika wokół przegubów pionowych:

$$q_{n+8+i} = \xi_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (\text{rys. 4a});$$

— kąty wahań łopata śmigła ogonowego:

$$q_{2n+8+j} = \zeta_j, \quad (j = 0, 1, \dots, m-1), \quad (\text{rys. 5a});$$

— kąty obrotów turbin sprzężarek silników:

$$q_{2n+m+8} = \psi_{kl}, \quad q_{2n+m+9} = \psi_{kp} \quad (\text{rys. 3b});$$

— kąty sterowania: $q_{l+1} = \alpha$, $q_{l+2} = \eta$, $q_{l+3} = \varphi_\theta$, $q_{l+4} = \varphi_s$, gdzie $l = 2n+m+9$. Liczba współrzędnych uogólnionych jest więc równa $k = 2n+m+13$.

Jako quasi — prędkości wygodnie jest przyjąć następujące parametry kinematyczne:

— rzuty wektora prędkości środka masy kadłuba śmigłowca V_e na osie układu $Oxyz$:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{bmatrix}, \quad (14)$$

gdzie współczynniki a_{kl} są równe:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\theta \cos\Psi, & a_{12} &= \cos\theta \sin\Psi, & a_{13} &= -\sin\theta, & a_{21} &= \sin\Phi \sin\theta \cos\Psi - \cos\Phi \sin\Psi, \\ a_{22} &= \sin\Phi \sin\theta \sin\Psi + \cos\Phi \cos\Psi, & a_{23} &= \sin\Phi \cos\theta, \\ a_{31} &= \cos\Phi \sin\theta \cos\Psi + \sin\Phi \sin\Psi, & a_{32} &= \cos\Phi \sin\theta \sin\Psi, & a_{33} &= \cos\Phi \cos\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

— rzuty wektora prędkości kątowej kadłuba Ω na osie układu $Oxyz$:

$$\begin{bmatrix} \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\Phi & \cos\theta \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\theta \cos\Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}; \quad (16)$$

— część quasi — prędkości przyjęto jako równe pochodnym współrzędnych uogólnionych:

$$\omega_7 = \dot{\psi}, \quad \omega_{8+i} = \dot{\beta}_i, \quad \omega_{n+8+i} = \dot{\xi}_i, \quad \omega_{2n+8+j} = \dot{\zeta}_j, \quad \omega_{l-1} = \dot{\psi}_{kl}, \quad \omega_l = \dot{\psi}_{kp}, \quad (17)$$

gdzie: $i = 0, 1, \dots, n-1$; $j = 0, 1, \dots, m-1$.

— ostatnie quasi — prędkości zostaną tak wprowadzone [5], aby na mocy równań więzów kinematycznych (10)÷(13) były równe zeru:

$$\omega_{l+1} = k_\theta(\theta - \theta_z) + k_q Q + k_x(x_g - x_{gz}) + k_{\dot{x}}(\dot{x}_g - \dot{x}_{gz}) + \alpha_0 - T_1 \dot{\alpha} - \alpha, \quad (18)$$

$$\omega_{l+2} = k_\Phi(\Phi - \Phi_z) + k_p P + k_y(y_g - y_{gz}) + k_{\dot{y}} \dot{y}_g + k_{1\psi}(\Psi - \Psi_z) + \eta_0 - T_2 \dot{\eta} - \eta, \quad (19)$$

$$\omega_{l+3} = k_z(z_g - z_{gz}) + k_{\dot{z}} \dot{z}_g + \varphi_{g0} - T_3 \dot{\varphi}_g - \varphi_g, \quad (20)$$

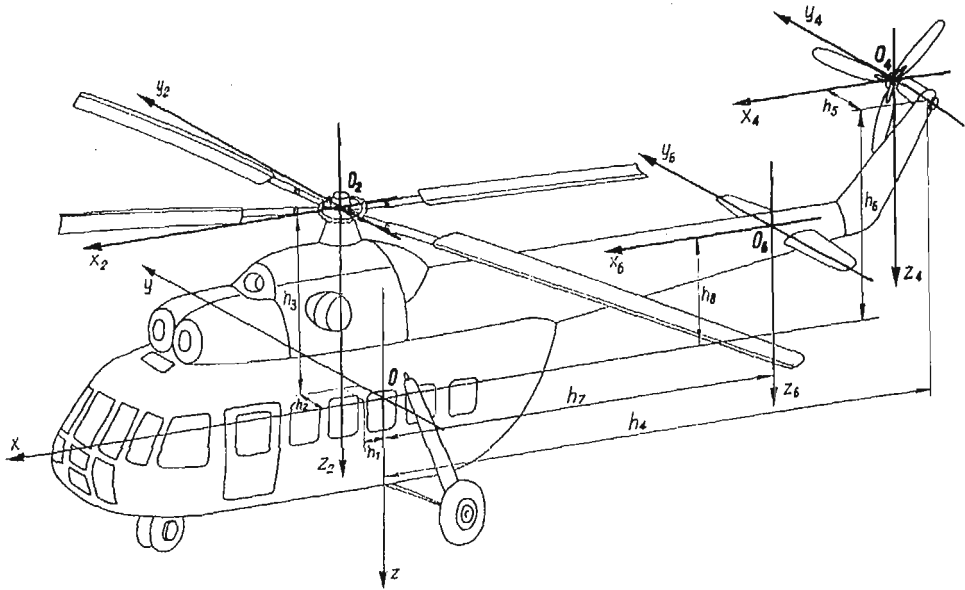
$$\Delta_{l+4} = k_\Psi(\Psi - \Psi_z) + k_r R + \varphi_{s0} - T_4 \dot{\varphi}_s - \varphi_s. \quad (21)$$

Ilość stopni swobody l przyjętego modelu śmigłowca równa jest różnicy liczby współrzędnych uogólnionych k i liczby więzów nieholonomicznych: $l = k-4 = 2n+m+9$.

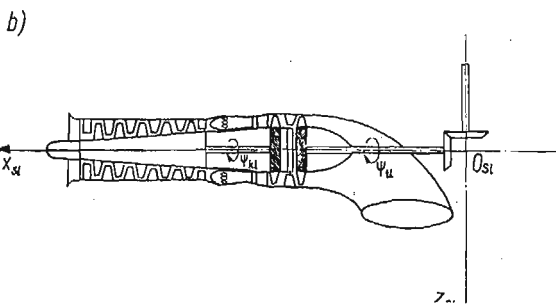
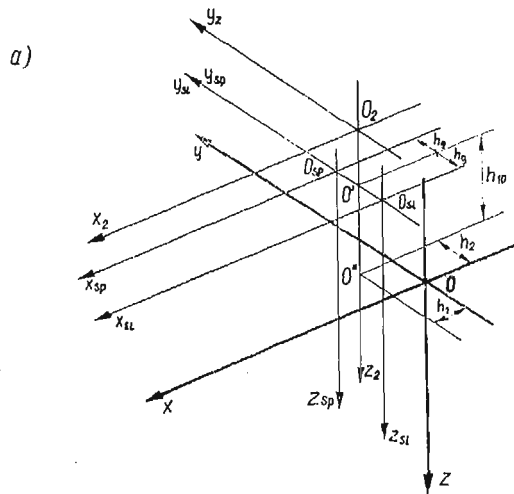
5. Energia kinetyczna układu

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznych kadłuba i pozostałych elementów. Po wyznaczeniu prędkości absolutnych V_e (względem nieruchomego układu ziemskiego) punktów należących do danego elementu e jego energia kinetyczna jest równa:

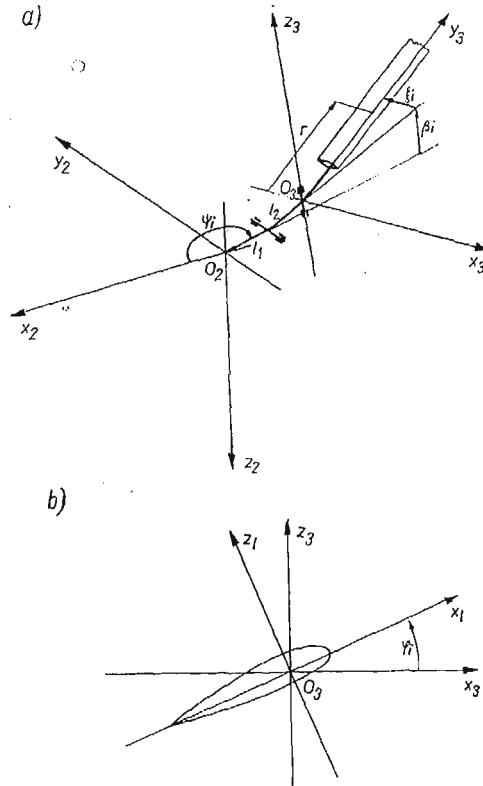
$$T_e = \frac{1}{2} \int_{m_e} V_e \cdot V_e dm. \quad (22)$$



Rys. 2. Położenie układów sztywno związanych z kadłubem



Rys. 3. Układy określające ruch silników; a) położenie układów związanych z kadłubem śmigłowca, b) schemat rozmieszczenia turbin silnika lewego i kierunki ich obrotów



Rys. 4. Położenie układów związanych z i -tą łopata wirnika nośnego

Przy całkowaniu uwzględnia się pełne charakterystyki masowe poszczególnych elementów. Wektory prędkości punktów należących do poszczególnych elementów można zdefiniować w następujący sposób:

a) wektor prędkości dowolnego punktu kadłuba:

$$\mathbf{V}_{pk} = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k, \quad (23)$$

gdzie \mathbf{r}_k — wektor łączący środek masy kadłuba z bieżącym punktem kadłuba;

b) wektor prędkości punktu turbiny napędowej (dla pozostałych turbin wektory prędkości definiowane są analogicznie):

$$\mathbf{V}_{tl} = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{sl} + \mathbf{r}_{tl}) + \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{r}_{tl}, \quad (24)$$

gdzie \mathbf{h}_{sl} — wektor łączący punkt O z punktem O_{sl} (rys. 3), \mathbf{r}_{tl} — wektor łączący punkt O_{sl} z punktem turbiny;

c) wektor prędkości punktu piasty wirnika nośnego:

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{o2} + \mathbf{r}_p) + \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{r}_p, \quad (25)$$

gdzie \mathbf{h}_{o2} — wektor łączący punkty O i O_2 (rys. 2),

\mathbf{r}_p — wektor łączący punkt O_2 z punktem piasty;

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{o2} + \mathbf{l}_j + \mathbf{r}_r) + \dot{\boldsymbol{\psi}} \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_r) + \dot{\boldsymbol{\beta}}_i \times \mathbf{r}_r, \quad (26)$$

d) wektor prędkości punktu i -tego łącznika piasty:

gdzie \mathbf{l}_1 — wektor łączący punkt O_2 z przegubem poziomym (rys. 4), \mathbf{r}_i — wektor łączący przegub poziomy z punktem na osi i -tego łącznika;

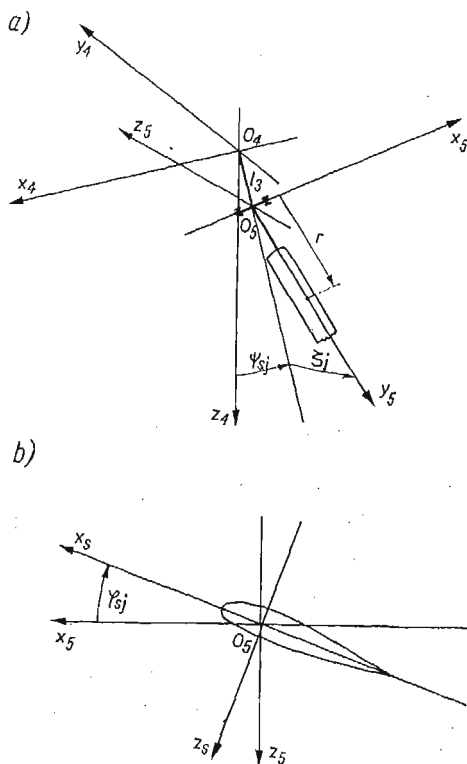
e) wektor prędkości punktu i -tej łopaty:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{02} + \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{r}_i) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{r}_i) + \boldsymbol{\beta}_i \times (\mathbf{l}_2 + \mathbf{r}_i) + \boldsymbol{\xi}_i \times \mathbf{r}_i + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_i \times \mathbf{r}_i, \quad (27)$$

gdzie \mathbf{l}_2 — wektor łączący środki przegubów poziomego i pionowego (rys. 4), \mathbf{r}_i — wektor łączący punkt O_3 z dowolnym punktem łopaty;

f) wektor prędkości punktu piasty śmigła ogonowego:

$$\mathbf{V}_{ps} = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{04} + \mathbf{r}_{ps}) + \dot{\boldsymbol{\psi}}_s \times \mathbf{r}_{ps}, \quad (28)$$



Rys. 5. Położenie układów związanych z j -tą łopata śmigła ogonowego

gdzie \mathbf{h}_{04} — wektor łączący punkty O i O_4 (rys. 2), \mathbf{r}_{ps} — wektor łączący punkt O_4 z punktem piasty;

g) wektor prędkości punktu należącego do j -tej łopaty śmigła ogonowego:

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_{04} + \mathbf{l}_3 + \mathbf{r}_s) + \dot{\boldsymbol{\psi}}_s \times (\mathbf{l}_3 + \mathbf{r}_s) + \dot{\boldsymbol{\zeta}}_j \times \mathbf{r}_s + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{sj} \times \mathbf{r}_s, \quad (29)$$

gdzie \mathbf{l}_3 — wektor łączący punkty O_4 i O_3 (rys. 5), \mathbf{r}_s — wektor łączący punkt O_3 z dowolnym punktem łopaty śmigła;

h) wektor prędkości punktu należącego do statecznika poziomego:

$$\mathbf{V}_{st} = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{h}_0 + \mathbf{r}_{st}) + \dot{\boldsymbol{\phi}}_{st} \times \mathbf{r}_{st}, \quad (30)$$

gdzie \mathbf{h}_{06} — wektor łączący punkty O i O_6 (rys. 2), \mathbf{r}_{st} — wektor łączący punkt O_6 z dowolnym punktem statecznika.

6. Siły uogólnione

Działające na układ siły uogólnione składają się z sił i momentów aerodynamicznych, ciężarowych, napędowych, sprężystych i tłumiących.

Poniżej podane zostaną składowe w układzie $Oxyz$ sił i momentów aerodynamicznych i napędowych działających na kadłub wraz ze skrzydłem, statecznikiem poziomym i pionowym. Współczynniki sił aerodynamicznych mierzone są w układzie półzwiązany z przepływem wokół poszczególnych elementów, a współczynniki momentów aerodynamicznych — wokół osi układu związanego z kadłubem $Oxyz$.

$$\begin{aligned} X_k^a = & -\frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} (C_{xk} \cos \alpha_k - C_{zk} \sin \alpha_k) - \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} (C_{xsk} \cos \alpha_{sk} - C_{zsk} \sin \alpha_{sk}) + \\ & -\frac{1}{2} \rho V_{st}^2 S_{st} (C_{xst} \cos \alpha_{st} - C_{zst} \sin \alpha_{st}) - \frac{1}{2} \rho V_v^2 S_v (C_{xv} \cos \alpha_v - C_{yv} \sin \alpha_v) + X_q Q + X^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_k^a = & -\frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} C_{yk} - \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} C_{ysk} - \frac{1}{2} \rho V_v^2 S_v (C_{xv} \sin \alpha_v + \\ & + C_{yv} \cos \alpha_v) + Y_r R + Y_p P + Y^n, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} Z_k^a = & -\frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} (C_{xk} \sin \alpha_k + C_{zk} \cos \alpha_k) - \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} (C_{xsk} \sin \alpha_{sk} + C_{zsk} \cos \alpha_{sk}) + \\ & -\frac{1}{2} \rho V_{st}^2 S_{st} (C_{xst} \sin \alpha_{st} + C_{zst} \cos \alpha_{st}) + Z_q Q + Z^n, \end{aligned}$$

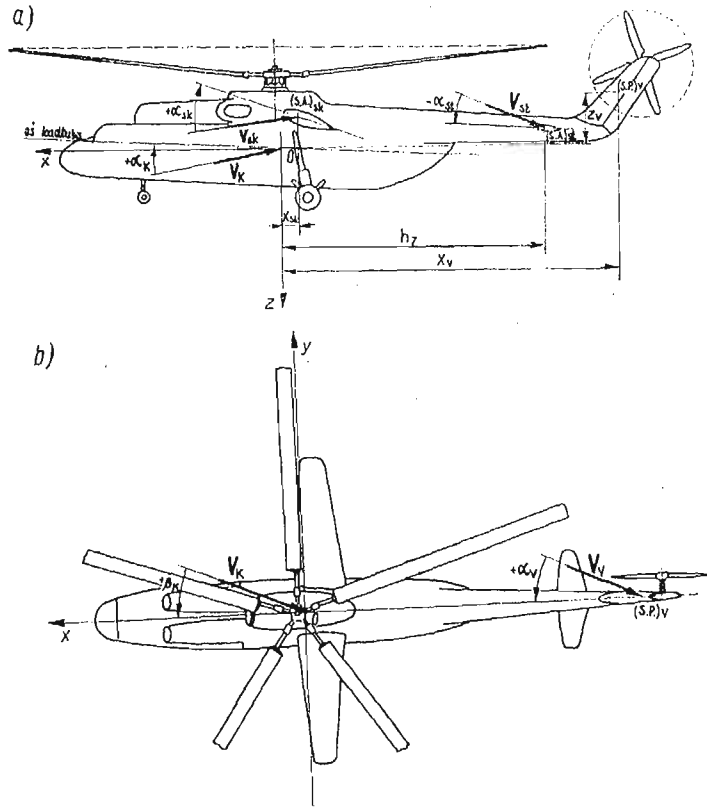
$$\begin{aligned} L_k^a = & \frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} l_a C_{lk} + \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} l_a C_{l,sk} - \frac{1}{2} \rho V_v^2 S_v z_v (C_{xv} \sin \alpha_v + \\ & + C_{yv} \cos \alpha_v) + L_p P + L_r R, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} M_k^a = & \frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} l_a C_{mk} + \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} l_a C_{m,sk} - \frac{1}{2} \rho V_{st}^2 S_{st} [(C_{xst} \sin \alpha_{st} + \\ & + C_{zst} \cos \alpha_{st}) h_7 + (C_{zst} \sin \alpha_{st} - C_{xst} \cos \alpha_{st}) h_8] + M_q Q - X^n h_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_k^a = & \frac{1}{2} \rho V_k^2 S_{sk} l_a C_{nk} + \frac{1}{2} \rho V_{sk}^2 S_{sk} l_a C_{n,sk} + \frac{1}{2} \rho V_v^2 S_v x_v (C_{xv} \sin \alpha_v + \\ & + C_{yv} \cos \alpha_v) + N_p P + N_r R. \end{aligned}$$

W równaniach tych X^n oznacza składową wzdłuż osi Ox siły odrzutu gazów z dysz wylotowych silników turbinowych. Pozostałe symbole są zwykle stosowane przy opisach sił i momentów aerodynamicznych, część z nich uwidocznił na rys. 6.

Opisu aerodynamiki łopat wirnika nośnego i śmigła ogonowego dokonano przy przyjęciu hipotezy opływu quasi-ustalonego [10]. Rozpatrywany schemat sił i momentów



Rys. 6. Widoki śmigłowca z boku (a) i z góry (b) z zaznaczonymi parametrami występującymi w opisie aerodynamiki kadłuba

pozwala znacznie rozszerzyć model opływu łopaty, przyjęty w teorii Glauerta-Locka [8, 10].

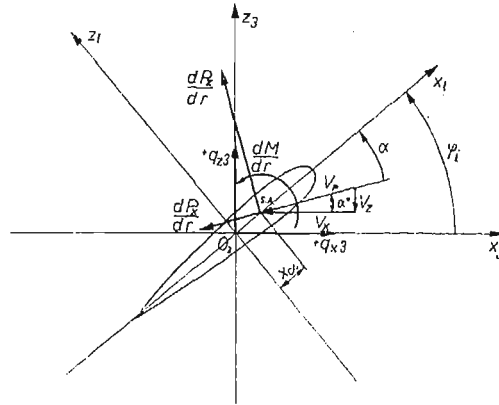
Obciążenie przekroju i -tej łopaty wirnika położonego w odległości r od przegubu pionowego składa się z sił elementarnych $\frac{dP_x}{dr}$, $\frac{dP_z}{dr}$ oraz momentu $\frac{dM}{dr}$ (rys. 4, rys. 7).

Po zrzutowaniu na osie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 q_{x3}^i &= -\frac{dP_x}{dr} \cos \alpha^* - \frac{dP_z}{dr} \sin \alpha^* = -\frac{1}{2} \rho b V_p (C_z V_{zt} + C_x V_{xi}), \\
 q_{z3}^i &= -\frac{dP_x}{dr} \sin \alpha^* + \frac{dP_z}{dr} \cos \alpha^* = \frac{1}{2} \rho b V_p (C_z V_{xi} - C_x V_{zt}), \\
 q_{my3}^i &= -\frac{1}{2} \rho b^2 V_p^2 C_{ms.A} - \frac{1}{2} \rho b V_p x_a [C_x (V_{xi} \sin \varphi_l - V_{zt} \cos \varphi_l) + \\
 &\quad + C_z (V_{xt} \cos \varphi_l + V_{zt} \sin \varphi_l)].
 \end{aligned} \tag{33}$$

Kąt natarcia przekroju łopaty:

$$\alpha_l = \varphi_l - \alpha^* = \varphi_l - \arctg \frac{V_{zt}}{V_{xt}}, \tag{34}$$



Rys. 7. Obciążenie przekroju łopaty wirnika nośnego

gdzie składowe wzdłuż osi O_3x_3 i O_3z_3 prędkości przekroju łopaty względem opływającego czynnika są równe:

$$\begin{aligned} V_{x1} &= (-U + Qh_3 + Rh_2) \sin \psi_i + (V + Ph_3 + Rh_1) \cos \psi_i + P(l_2 + r) \cos \psi_i \sin \beta_i + \\ &\quad + Q(l_2 + r) \sin \psi_i \sin \beta_i + (R + \omega) [l_1 + (l_2 + r) \cos \beta_i] - \xi_i r, \\ V_{z1} &= (-U + Qh_3 + Rh_2) \cos \psi_i \sin \beta_i - (V + Ph_3 + Rh_1) \sin \psi_i \sin \beta_i + \\ &\quad - (W - Qh_1 + Ph_2) \cos \beta_i - P \sin \psi_i (l_1 \cos \beta_i + l_2 + r) + Q \cos \psi_i (l_1 \cos \beta_i + \\ &\quad + l_2 + r) + \beta_i (l_2 + r) + v_i \cos \beta_i, \end{aligned} \quad (35)$$

a v_i oznacza aktualną dla danego azymutu ψ_i i promienia r składową prędkości indukowanej.

Rzuty sił aerodynamicznych, działających na wirnik nośny, na osie układu $Oxyz$ mają następującą postać:

$$\begin{aligned} X_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} (q_{x3}^i b_{11}^i + q_{z3}^i b_{13}^i) dr, \\ Y_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} (q_{x3}^i b_{21}^i + q_{z3}^i b_{23}^i) dr, \\ Z_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} (q_{x3}^i b_{31}^i + q_{z3}^i b_{33}^i) dr. \end{aligned} \quad (36)$$

Momenty aerodynamiczne wirnika wokół osi układu $Oxyz$:

$$\begin{aligned} L_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} [q_{x3}^i (R_y^i b_{31}^i - R_z^i b_{21}^i) + q_{z3}^i (R_y^i b_{23}^i - R_z^i b_{33}^i) + q_{m,y3}^i b_{12}^i] dr, \\ M_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} [q_{x3}^i (R_z^i b_{11}^i - R_x^i b_{31}^i) + q_{z3}^i (R_z^i b_{13}^i - R_x^i b_{33}^i) + q_{m,y3}^i b_{22}^i] dr, \\ N_w^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} [q_{x3}^i (R_x^i b_{21}^i - R_y^i b_{11}^i) + q_{x3}^i (R_x^i b_{23}^i - R_y^i b_{13}^i) + q_{m,y3}^i b_{32}^i] dr. \end{aligned} \quad (37)$$

W równaniach tych R_x^i , R_y^i , R_z^i są rzutami wektora łączącego początek układu O_{xyz} z punktem na osi i -tej łopaty. Współczynniki b_{ki}^i (elementy macierzy przejścia od układu $O_3 x_3 y_3 z_3$ do układu $O_2 x_2 y_2 z_2$) są równe:

$$\begin{aligned} b_{11}^i &= -\sin \psi_i \cos \xi_i + \cos \psi_i \cos \beta_i \sin \xi_i, & b_{12}^i &= \sin \psi_i \sin \xi_i + \cos \psi_i \cos \beta_i \cos \xi_i, \\ b_{13}^i &= -\cos \psi_i \sin \beta_i, & b_{21}^i &= \cos \psi_i \cos \xi_i + \sin \psi_i \cos \beta_i \sin \xi_i, \\ b_{22}^i &= -\cos \psi_i \sin \xi_i + \sin \psi_i \cos \beta_i \cos \xi_i, & b_{23}^i &= -\sin \psi_i \sin \beta_i, \\ b_{31}^i &= -\sin \beta_i \sin \xi_i, & b_{32}^i &= -\sin \beta_i \cos \xi_i, & b_{33}^i &= -\cos \beta_i. \end{aligned} \quad (38)$$

Moment aerodynamiczny wirnika wokół jego osi obrotu jest równy:

$$\begin{aligned} N_{02}^a &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{R_i} \{ q_{x3}^i [[(l_1 + l_2 \cos \beta_i) \cos \psi_i + b_{12}^i r] b_{21}^i - [(l_1 + l_2 \cos \beta_i) \sin \psi_i + \\ &+ b_{22}^i r] b_{11}^i] + q_{z3}^i [[(l_1 + l_2 \cos \beta_i) \cos \psi_i + b_{12}^i r] b_{23}^i - \\ &- [(l_1 + l_2 \cos \beta_i) \sin \psi_i + b_{22}^i r] b_{13}^i] + q_{my3}^i b_{32}^i \} dr. \end{aligned} \quad (39)$$

Moment aerodynamiczny i -tej łopaty względem osi przegubu poziomego możn. wyrazić w następujący sposób:

$$M_{hi}^a = \int_0^{R_i} [q_{z3}^i (l_2 + r \cos \xi_i) - q_{my3}^i \sin \xi_i] dr, \quad (40)$$

natomiast moment względem przegubu pionowego jest równy:

$$M_{vi}^a = \int_0^{R_i} (-q_{x3}^i r) dr. \quad (41)$$

W podobny sposób oblicza się siły i momenty aerodynamiczne śmigła ogonowego.

Ponieważ początek układu $Oxyz$ jest środkiem masy kadłuba, jego momenty ciężarowe są równe zero. Uwzględnić natomiast należy w zależnościach na siły uogólnione momenty grawitacyjne poszczególnych zespołów śmigłowca wokół osi układu $Oxyz$ i na pozostałych przesunięciach przygotowanych. Poza tym, w prawych stronach równań ruchu umieszczone zostaną momenty napędowe oraz momenty działające na łopaty wirnika nośnego wokół przegubów poziomych i pionowych od sprężyn i tłumików.

7. Równania ruchu śmigłowca

Równania ruchu śmigłowca wyprowadzono wykorzystując równania Boltzmanna-Hamela dla układów nieholonomicznych w quasi-współrzędnych [2, 5]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^l \gamma_{\mu\alpha}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_\mu^*, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l). \quad (42)$$

Występujące w równaniach współczynniki Boltzmanna $\gamma_{\mu\alpha}^r$ obliczono, wykorzystując tzw. związki przestawialności [2, 5]:

$$d\delta\pi_r - \delta d\pi_r = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \gamma_{\mu\lambda}^r d\pi_\mu \delta\pi_\lambda, \quad (r = 1, 2, \dots, k). \quad (43)$$

Po wykonaniu odpowiednich operacji równania ruchu obiektu śmigłowiec układ sterowania sformułowano w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial U} - \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_g} a_{11} + \frac{\partial T^*}{\partial y_g} a_{12} + \frac{\partial T^*}{\partial z_g} a_{13} + \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} \frac{k_x}{T_1} a_{11} + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_y}{T_2} a_{12} + \right. \\ \left. + \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_g} \frac{k_z}{T_3} a_{13} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial V} R + \frac{\partial T^*}{\partial W} Q + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left(\frac{k_x}{T_1} - k_x \right) a_{11} + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left(\frac{k_y}{T_2} - k_y \right) a_{12} + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+3}} \left(\frac{k_z}{T_3} - k_z \right) a_{13} = X_k^a + X_w^a + X_s^a + m_c g a_{13}. \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial V} - \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_g} a_{21} + \frac{\partial T^*}{\partial y_g} a_{22} + \frac{\partial T^*}{\partial z_g} a_{23} + \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} \frac{k_x}{T_1} a_{21} + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_y}{T_2} a_{22} + \right. \\ \left. + \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_g} \frac{k_z}{T_3} a_{23} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial U} R - \frac{\partial T^*}{\partial W} P + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left(\frac{k_x}{T_1} - k_x \right) a_{21} + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left(\frac{k_y}{T_2} - k_y \right) a_{22} + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+3}} \left(\frac{k_z}{T_3} - k_z \right) a_{23} = Y_k^a + Y_w^a + Y_s^a + m_c g a_{23}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial W} - \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_g} a_{31} + \frac{\partial T^*}{\partial y_g} a_{32} + \frac{\partial T^*}{\partial z_g} a_{33} + \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} \frac{k_x}{T_1} a_{31} + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_y}{T_2} a_{32} + \right. \\ \left. + \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_g} \frac{k_z}{T_3} a_{33} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial U} Q + \frac{\partial T^*}{\partial V} P + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left(\frac{k_x}{T_1} - k_x \right) a_{31} + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left(\frac{k_y}{T_2} - k_y \right) a_{32} + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+3}} \left(\frac{k_z}{T_3} - k_z \right) a_{33} = Z_k^a + Z_w^a + Z_s^a + m_c g a_{33}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial P} - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \Phi} + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_p}{T_2} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial V} W + \frac{\partial T^*}{\partial W} V - \frac{\partial T^*}{\partial Q} R + \frac{\partial T^*}{\partial R} Q - \\ - \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} R k_q + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left(\frac{k_p}{T_2} - k_p \right) + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} Q k_r = L_k^a + L_w^a + L_s^a + \\ + L_w^g + L_s^g + L_{sil}^g + L_{st}^g, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial Q} - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \Phi} \sin \Phi \operatorname{tg} \theta + \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \cos \Phi + \frac{\partial T^*}{\partial \Psi} \frac{\sin \Phi}{\cos \theta} + \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} \frac{k_q}{T_1} \right) + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial U} W - \frac{\partial T^*}{\partial W} U + \frac{\partial T^*}{\partial P} R - \frac{\partial T^*}{\partial R} P + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left(\frac{k_q}{T_1} - k_q \cos \Phi \right) + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left(k_p R - k_q \sin \Phi \operatorname{tg} \theta - k_{1v} \frac{\sin \Phi}{\cos \theta} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \left(-k_r P - k_v \frac{\sin \Phi}{\cos \theta} \right) = \\ = M_k^a + M_w^a + M_s^a + M_w^g + M_s^g + M_{sil}^g + M_{st}^g, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial R} - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \Phi} \cos \Phi \operatorname{tg} \theta - \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \sin \Phi + \frac{\partial T^*}{\partial \Psi} \frac{\cos \Phi}{\cos \theta} + \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_s} \frac{k_r}{T_4} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial V} U - \\ - \frac{\partial T^*}{\partial U} V - \frac{\partial T^*}{\partial P} Q + \frac{\partial T^*}{\partial Q} P + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} (k_q P + k_\theta \sin \Phi) + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left(-k_v Q - \right. \end{aligned} \quad (49)$$

$$-k_\psi \cos \Phi \operatorname{tg} \theta - k_{j\psi} \frac{\cos \Phi}{\cos \theta} \left) - \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \left(\frac{k_r}{T_4} k_\psi + \frac{\cos \Phi}{\cos \theta} \right) = \quad (49)$$

$$= N_k^a + N_w^a + N_s^a + N_w^g + N_s^g + N_{sil}^g + N_{st}^g, \quad [\text{cd.}]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega} - \frac{\partial T^*}{\partial \psi} = N_{02}^a + N_{02}^g + i_s M_{04}^a + i_s M_{04}^g + i_s M_{04}^g + N_{20}^a, \quad (50)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \beta_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \beta_i} = M_{hi}^a + M_{hi}^g - c_h \beta_i - k_h \beta_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (51)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \xi_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \xi_i} = M_{vi}^a + M_{vi}^g - c_v \xi_i - k_v \xi_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (52)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial T^*}{\partial \zeta_j} = M_{pj}^a + M_{pj}^g - c_p \zeta_j - k_p \zeta_j, \quad (j = 0, 1, \dots, m-1), \quad (53)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \psi_{kl}} - \frac{\partial T^*}{\partial \psi_{kl}} = M_{kl}, \quad (54)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \psi_{kp}} - \frac{\partial T^*}{\partial \psi_{kp}} = M_{kp}, \quad (55)$$

W równaniach tych T^* oznacza energię kinetyczną układu wyznaczoną w quasi-prędkościach.

Do tej pory nie opisywane oznaczenia to: m_c — masa całkowita śmigłowca; momenty działające na: N_{02} — wirnik nośny wokół osi $O_2 z_2$, M_{04} — śmigło ogonowe wokół osi $O_4 y_4$, M_{hi} , M_{vi} — i -tą łopatą wirnika wokół osi przegubu poziomego oraz pionowego, M_{pj} — j -tą łopatą śmigła ogonowego wokół osi przegubu wahań, M_{kl} , M_{kp} — turbiny sprężarek silnika lewego oraz prawego; c_h , c_v , c_p — stałe sprężyn w przegubach: poziomych i pionowych łopat wirnika oraz wahań śmigła ogonowego; k_h , k_v , k_p — współczynniki tłumienia w tych przegubach. Indeksy dolne oznaczają: k — kadłuba, w — wirnika, s — śmigła ogonowego, sil — silników, st — statecznika poziomego. Indeksy górne: a — aerodynamiczny, g — grawitacyjny, n — napędowy.

Równania (44) ÷ (55) wraz z czterema równaniami więzów (10) ÷ (13) oraz zależnościami określającymi quasi-prędkości w funkcji prędkości uogólnionych (14), (16), (17) tworzą układ $k+l = 42+2n+22$ równań ruchu. Mając dane wartości początkowe można wyznaczyć z niego $42+2n+22$ nieznanymi funkcji czasu: quasi-prędkości i współrzędnych uogólnionych. W pracy [3] przedstawiono wszystkie składniki równań (44) ÷ (55).

8. Wnioski

Korzystając z metod mechaniki analitycznej układów nieholonomicznych zbudowano model matematyczny śmigłowca wyposażonego w układ sterowania automatycznego. Uwzględniono przy tym praktycznie wszystkie główne stopnie swobody śmigłowca jako układu mechanicznego oraz pełne charakterystyki masowe jego elementów. Analizując otrzymane ogólne równania ruchu przestrzennego stwierdzono występowanie silnego sprzężenia ruchów podłużnych i bocznych kadłuba śmigłowca w przestrzeni, a także

sprzężeń ruchów poszczególnych zespołów śmigłowca. Z tych powodów oddzielne analizowanie ruchów podłużnych i poprzecznych śmigłowca jest dużym uproszczeniem i przy poważniejszych rozważaniach nie może być stosowane, co się jednak często zdarza. Oceniając wyniki badań własności dynamicznych izolowanej łopaty należy zwracać uwagę na to, że w rzeczywistości umocowana jest ona do piasty, wykonującej wraz z kadłubem złożone ruchy przestrzenne.

Otrzymany model matematyczny może być wykorzystany przy rozpatrywaniu wielu zagadnień dynamiki śmigłowców bądź ich zespołów. W przygotowywanych do publikacji pracach przedstawione zostaną:

- metodyka określania parametrów ruchu ustalonego na przykładzie lotu poziomego i zawisu śmigłowca, wraz z przykładem obliczeniowym;
- badanie stateczności ustalonych stanów lotu i ilościowa analiza sprzężeń ruchów poszczególnych elementów śmigłowca.

Literatura cytowana w tekście

1. R. W. BALKE, R. L. BENNETT, T. M. GAFFEY, R. R. LYNN, *Tail Rotor Design, Part II: Structural Dynamics*, Journal of the American Helicopter Society, October 1970.
2. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
3. K. JANKOWSKI, *Modelowanie fizyczne i matematyczne własności dynamicznych sterowanego śmigłowca w ruchu przestrzennym*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1982.
4. J. MARYNIAK, *Dynamiczną teorią obiektów ruchomych*, Prace naukowe — Mechanika Nr 32, Politechnika Warszawska, Warszawa 1975.
5. J. I. NEJMARK, N. A. FUFAJEW, *Dynamika układów nieholonomicznych*, PWN, Warszawa 1971.
6. H. L. PRICE, *Rotor Dynamics and Helicopter Stability, Part I ÷ V*, Aircraft Engineering, No. 3, 1963 ÷ No. 11, 1965.
7. D. SWEETING, *Some Design Aspects of the Stability Augmentation System for the WG-13 Rigid Rotor Helicopter*, AGARD Conference Proceedings, No. 86, 1971.
8. С. Ю. ЕСАУЛОВ, О. П. БАХОВ, И. С. ДМИТРИЕВ, *Вертолет как объект управления*, Машиностроение, Москва 1977.
9. В. А. КОЖЕВНИКОВ, *Автоматическая стабилизация вертолетов*, Машиностроение, Москва 1977.
10. М. Л. Миль и др. — *Вертолеты. Расчет и проектирование*, Кн. 1, Кн. 2'', Машиностроение, Москва 1967.

Резюме

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМАТИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМОГО ВЕРТОЛЕТА В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Целью настоящей работы является построение полной математической модели вертолѐта. В связи с этим учитывается практически все главные степени свободы вертолѐта как механической системы. Кроме движения фюзеляжа в пространстве и несущего винта рассматривается также движение рулевого винта, стабилизатора и турбин двигателей. Интегральной частью модели вертолѐта является система автоматического управления накладывающая на рассматриваемую механическую систему неинтегрируемые кинематические связи (неголономная система).

Summary

MATHEMATICAL MODELLING OF THE CONTROLLED HELICOPTER
IN THE THREE-DIMENSIONAL MOTION

The purpose of the work is to develop a unified mathematical model of a helicopter. All main degrees of freedom of a helicopter as a mechanical system are actually taken into account. The motion of fuselage in space and the motion of main rotor, tail rotor, tail plane, turbines is considered. An integral part of the mathematical model of a helicopter is the flight control system which imposes the constraints, specified by nonintegrable expressions involving the velocities (non — holonomic system), on considered mechanical system.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 czerwca 1984 roku
