

## PROBLEMY OPTIMALNEGO KSZTAŁTOWANIA WSPORNIKOWEJ BELKI LEPKOPLASTYCZNEJ PRZY OBCIĄŻENIU QUASI-STATYCZNYM

EDWARD CEGIELSKI (KRAKÓW)

*Politechnika Krakowska*

### 1. Uwagi wstępne

Nagle i krótkotrwałe obciążenia powodują na ogół przekroczenie nośności sprężyste elementów maszyn, co dla wielu powszechnie stosowanych materiałów konstrukcyjnych jest przyczyną pojawienia się odkształceń lepkoplastycznych. Takie obciążenia stają się także często przyczyną zniszczenia przeciążonego elementu. Optymalizacja konstrukcji lepkoplastycznych jest jednak tematyką mało rozebraną w literaturze światowej. Powodem tego są poważne trudności związane zarówno z formułowaniem równań konstytutywnych, jak też skomplikowany lub częściowej nieznany charakter obciążenia impulsowego.

Jednymi z pierwszych prac z zakresu optymalizacji belek plastycznych poddanych działaniu obciążeń impulsowych są opracowania Ja. Lellepa i Ju. Lepika, omówione szeroko w pracy przeglądowej [5]. Stosowane przez autorów prawa fizyczne nie obejmują jednak własności lepkich, co w praktyce może dawać rozwiązania obarczone znacznymi błędami ilościowymi i jakościowymi. Wrażliwość materiału na prędkość odkształceń uwzględnił Ju. Lepik i Z. Mróz [6, 7]: materiał optymalizowanych belek opisywano prostym równaniem nieliniowego tłumika

$$\dot{\epsilon} = D_0 \sigma^p, \quad (1.1)$$

gdzie  $D_0$  i  $p$  oznaczają stałe materiałowe. Autorzy wszystkich wymienionych prac uwzględniali też bezwładność belek, stosując przy tym przybliżoną metodę analizy modalnej, co znacznie upraszcza poszukiwanie odpowiednich rozwiązań.

Najczęściej stosowanym obciążeniem był modalny „prostokątny” (schodkowy) impuls sił zewnętrznych. Krótkotrwałe obciążenia rzeczywistych konstrukcji bardzo rzadko dają się opisać tego typu aproksymacją, jednak zastosowanie innych programów obciążeń wiąże się na ogół z dodatkowymi trudnościami.

Prawo (1.1) bywa stosowane również do opisu własności materiałów lepkoplastycznych; taki opis konieczny jest często w tych przypadkach, gdy rozgraniczenie procesów czynnych i biernych może uniemożliwiać dochodzenie do rozwiązań ścisłych. Pewną metodę wyznaczenia współczynników  $D_0$  oraz  $p$  podaje P. Symonds [9].

Celem prezentowanej pracy było zbadanie wpływu wielu różnych czynników na proces optymalizacji rozważanej belki. Określano między innymi wpływ parametrów definiujących potęgową funkcję nadwyżkową w równaniu fizycznym, a także wpływ nieliniowości

i asymetrii zdefiniowanego później programu obciążenia  $\theta = \theta(t)$ . Rozważono przy tym dwa różne kryteria optymalizacji w ujęciu dualnym. Liczne trudności związane z optymalizacją konstrukcji lepkoplastycznych podyktowane mogą być także niedostateczną zgodnością istniejących propozycji opisu prawa fizycznego z odpowiednimi wynikami badań doświadczalnych. Z tych względów pożądanym jest zbadanie, jak wpływa przyjęta aproksymacja równania konstytutywnego na wynik optymalizacji.

Zastosowanie ścisłego równania fizycznego (niejednorodnego) materiału sprężysto-lepkoplastycznego zamiast jednorodnego prawa (1.1) oraz poszukiwanie ścisłych, a nie modalnych form deformacji komplikuje znacznie postawiony problem. Z tych względów w dalszej części pracy przyjęto liczne założenia upraszczające. Przede wszystkim ograniczono się do analizy izostatycznej belki w jednoosiowym stanie naprężenia; w ten sposób uniknięto trudności związanych ze złożoną formą i słabszą weryfikacją doświadczalną równań konstytutywnych w przypadku ogólnym. Pominięto także oddziaływanie sił masowych, rozważając jedynie procesy quasi-statyczne. Założenia te ograniczają wprawdzie poważnie klasę analizowanych problemów, jednak tak proste ujęcie umożliwia znalezienie wielu efektywnych rozwiązań ścisłych przy zastosowaniu klasycznych metod rachunku wariacyjnego.

## 2. Sformułowanie problemu

W pracy rozważono jedynie optymalizację kształtu wspornikowej, idealnie dwuteowej belki poddanej działaniu zmiennego w czasie obciążenia zewnętrznego. Zakłada się przy tym, że obciążenie zmienia się na tyle powoli, iż słuszne jest podejście quasi-statyczne; w szczególności założenie to obejmuje obciążenia długotrwałe. Równolegle prowadzone są prace w zakresie numerycznej optymalizacji konstrukcji lepkoplastycznych przy obciążeniu dynamicznym [2, 3, 4].

Zadanie rozwiązano w następującym sformułowaniu:

- a) kryterium optymalizacji: minimum objętości,
- b) ograniczenia:
  - 1) typu energetycznego — zadana całkowita energia rozproszona,
  - 2) typu sztywnościowego — zadane przemieszczenie maksymalne,
- c) ujęcie: dualne — minimalizacji podlega ograniczenie przy ustalonej objętości,
- d) zmienna decyzyjna: funkcja przekroju  $A(X)$ ; np. szerokość  $B(X)$  przy stałej grubości pólki  $H_0$  (rys. 1),
- e) równanie stanu: addytywne równanie materiału sprężysto-lepkoplastycznego (P. Perzyna [8]) o potęgowej funkcji nadwyżkowej, które dla dodatnich naprężeń zapiszemy w postaci

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \left\langle D \left( \frac{\dot{\sigma}}{\sigma_0} - 1 \right)^p \right\rangle \quad (2.1)$$

gdzie symbol  $\langle f \rangle$  oznacza  $\langle f \rangle = 0$  dla  $\sigma \leq \sigma_0$  oraz  $\langle f \rangle = f$  dla  $\sigma > \sigma_0$ .

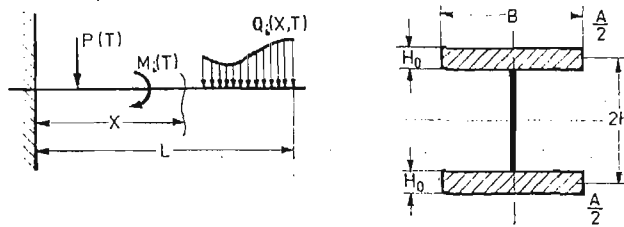
Inne możliwe kryteria optymalizacji lepkoplastycznych elementów konstrukcyjnych omówił M. Życzkowski [10]; podział i systematyzację odpowiednich kryteriów autor rozważył w wygodniejszym ujęciu dualnym.

Proces obciążania i odciążania opisywano modalnym programem działających sił zewnętrznych [5]

$$P(X, T) = P_1(X)P_2(T), \tag{2.2}$$

gdzie:  $P_1(X)$  — funkcja opisująca przestrzenny rozkład obciążeń,  $P_2(T)$  — dowolna funkcja czasu nazwana dalej „programem obciążenia”. Pomijając siły masowe oraz mając na uwadze jedynie belki statycznie wyznaczalne, całkowity moment zginający w przekroju belki zapisać można wtedy w postaci:

$$M(X, T) = M_0(X)\theta(T), \tag{2.3}$$



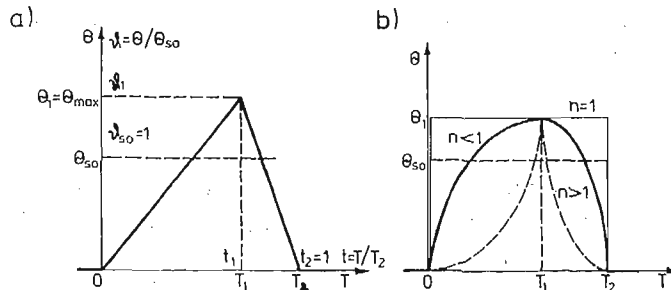
Rys. 1.

gdzie  $\theta(T) = P_2(T)$ . Dalej przyjmować będziemy, iż funkcja  $M_0(X)$  jest dodatnia na całej długości rozważanej belki; w takim przypadku maksymalne ugięcie reszkowe wystąpi zawsze na końcu belki.

Funkcję czasu  $\theta(T)$  opisywano zależnością potęgową

$$\theta(T) = \begin{cases} \theta_1 \left( \frac{T}{T_1} \right)^n & \text{dla } 0 \leq T \leq T_1 \\ \theta_1 \left( \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} \right)^n & \text{dla } T_1 \leq T \leq T_2 \\ 0 & \text{dla } T < 0 \text{ lub } T > T_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

gdzie  $n$  — dowolny dodatni wykładnik potęgowy. Parametry  $\theta_1$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  opisujące funkcję  $\theta(T)$  zaznaczono na rys. 2, na którym przedstawiono przebiegi tej funkcji dla różnych wartości wykładnika  $n$ .



Rys. 2.

Wielkości bezwymiarowe wprowadzimy następująco:

$$x = \frac{X}{L} \quad t = \frac{T}{T_2} \text{--- zmienne niezależne,} \quad (2.5)$$

$$s = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad k = KL, \quad w = \frac{W}{L} \text{--- zmienne stanu,}$$

$$a = \frac{A}{A_{s0}} \text{--- zmienna sterowania,}$$

$$m = \frac{M}{M_{s0}}, \quad m_0 = \frac{\theta_{s0} M_0}{M_{s0}}, \quad \vartheta = \frac{\theta}{\theta_{s0}} \text{--- funkcja momentu zginającego oraz jej funkcje składowe,}$$

$$h = \frac{H}{L} \text{--- stała wysokość belki,}$$

gdzie

$L$  — całkowita długość belki,

$K = K(X, T)$  — krzywizna osi obojętnej,

$W = W(X, T)$  — przemieszczenie pionowe,

$A = A(X)$  — przekrój poprzeczny,

$A_{s0} = A_s(0)$  — przekrój belki równomiernej wytrzymałości (o zadanej objętości) w miejscu utwierdzenia,

$M_{s0} = M_s(0) = \sigma_0 A_{s0} H$  — moment zginający odpowiadający nośności sprężystej przekroju belki równomiernej wytrzymałości w miejscu utwierdzenia,

$\theta_{s0}$  — wartość funkcji czasu  $\theta(T)$  odpowiadająca pierwszemu uplastycznieniu belki równomiernej wytrzymałości.

Belką równomiernej wytrzymałości nazwano tu umownie kształt belki równomiernej wytrzymałości w zakresie sprężystym, natomiast indeksem „s” oznaczono wielkości zdefiniowane dla takiej właśnie belki.

W dalszych obliczeniach ograniczono się do rozważania małych przemieszczeń i odkształceń; zakładano także słuszność hipotezy płaskich przekrojów oraz analizowano edynie przypadek belki statycznie wyznaczalnej (wspornikowej).

### 3. Podstawowe równania

Przy założeniu ustalonej wysokości belki  $h(x) = \text{const}$  naprężenia w jej półkach nośnych można określić prostym wzorem

$$s(x, t) = \frac{m(x, t)}{a(x)}. \quad (3.1)$$

W celu ułatwienia dalszych przekształceń wygodnie jest obliczyć maksymalne naprężenie (3.1) względem czasu  $t$ . Oznaczając  $\max s(x) = s_{\max}(x)$  będziemy mieli

$$s_{\max}(x) = \frac{\vartheta_1 m_0(x)}{a(x)}, \quad (3.2)$$

gdzie  $\vartheta_1 = \vartheta_{\max}$  — maksymalna wartość bezwymiarowej funkcji czasu  $\vartheta(t)$  (rys. 2). Z powyższego związku wynika prosta zależność:

$$a_s(x) = m_0(x), \quad (3.3)$$

gdzie przez  $a_s$  oznaczono bezwymiarową funkcję przekroju belki równomiernej wytrzymałości.

Uwzględniając przyjęty układ wielkości bezwymiarowych (2.5) oraz dodatkowo zależność (3.3), warunek stałej objętości zapiszemy w postaci

$$\int_0^1 a(x) dx = \int_0^1 m_0(x) dx. \quad (3.4)$$

Funkcję ugięcia belki wspornikowej  $w = w(x, t)$  wyrazimy całką

$$w(x, t) = \int_0^x dz \int_0^z k(y, t) dy = \int_0^x k(y, t) (x-y) dy, \quad (3.5)$$

gdzie  $k(x, t)$  jest krzywizną dającą się wyrazić jednorodną zależnością na całej długości belki  $0 \leq x \leq 1$ .

W najbardziej ogólnym przypadku deformacji belki należy uwzględnić na przemian występujące strefy, w których krzywizna  $k(x, t)$  opisywana będzie różnymi wzorami (np. strefy odkształceń sprężystych, plastycznych, resztkowych) i wtedy

$$w_j(x, t) = \sum_{i=0}^j \int_{x_{i-1}}^{x_i} k_i(y, t) (x-y) dy, \quad (3.6)$$

gdzie

$j$  — numer kolejny rozważanej strefy licząc od strony utwierdzenia,

$x_j = x$  — współrzędna bieżąca w miejscu obliczanego przemieszczenia,

$x_0 = 0$ .

W przypadku zastosowania addytywnego prawa fizycznego (2.1) krzywiznę resztkową rozważanej belki izostatycznej  $k_r(x)$  obliczymy z całki

$$k_r(x) = \int_{t_a}^{t_b} \frac{\dot{\varepsilon}^{pp}(x, t)}{h} dt, \quad (3.7)$$

gdzie granice całkowania  $t_a$ ,  $t_b$  oznaczają odpowiednio czas rozpoczęcia i zakończenia procesu płynięcia w rozważanym przekroju. Znając program obciążenia wielkości te można obliczyć z warunku  $s(x) = 1$ , skąd

$$t_a(x) = t_1 \left[ \frac{a(x)}{\vartheta_1 m_0(x)} \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (3.8a)$$

$$t_b(x) = 1 - (1 - t_1) \left[ \frac{a(x)}{\vartheta_1 m_0(x)} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (3.8b)$$

#### 4. Warunek optymalności

Całkowitą energię rozproszoną lub przemieszczenie resztkowe końca belki można zapisać w postaci funkcjonału

$$J(x, a) = \int_0^1 \psi(x, a) dx, \quad (4.1)$$

gdzie dla bezwymiarowo określonej energii rozproszonej będzie

$$\psi = \int_{t_a}^{t_b} m(x, t) \frac{\dot{\epsilon}^{vp}(x, t)}{h} dt, \quad (4.2)$$

natomiast dla maksymalnego przemieszczenia resztkowego belki wspornikowej podstawiając do (3.6)  $x_j = 1$  mamy

$$\psi = k_r(x, a)(1-x), \quad (4.3)$$

gdzie  $k_r$  — krzywizna resztkowa (po czasie  $t \geq t_2$ ).

Określona przez (4.2) lub (4.3) funkcja  $\psi$  może być przedziałami równa zero lub większa od zera w zależności od tego, czy doszło do uplastycznienia w określonym przekroju, czy też nie.

W dowolnej strefie nieuplastycznionej ( $k_r \equiv 0$ ) maksymalne naprężenie  $s_{\max}(x)$  (3.2) musi być mniejsze lub równe granicy plastyczności. Najbardziej optymalny przekrój w takiej strefie otrzymamy, żądając, aby naprężenie to było jak największe, czyli aby spełniony był warunek  $s_{\max}(x) = 1$ , skąd

$$a = a_{opt}(x) = \vartheta_1 m_0(x). \quad (4.4)$$

Przekroje optymalne stref odkształconych plastycznie ( $k_r > 0$ ) obliczymy z równania Eulera-Lagrange'a przy warunku pobocznym (3.4). Wprowadzając mnożnik Lagrange'a  $\lambda$  otrzymujemy funkcjonał w postaci

$$J = \int_0^1 [\psi(x, a) + \lambda a] dx, \quad (4.5a)$$

lub z podziałem na strefy analogicznie do (3.6)

$$J = \sum_{i=1}^j \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\psi_i(x, a_i) + \lambda a_i] dx, \quad (4.5b)$$

gdzie  $x_0 = 0$ ,  $x_j = 1$ . W ogólnym przypadku jest to więc zagadnienie wariacyjne z ruchomymi końcami, przy czym należy pamiętać, że dla strefy nie odkształconej plastycznie przekrój optymalny określa (4.4), a krzywizna resztkowa takiej strefy  $k_r = 0$ . Rozpisując wariację funkcjonału (4.5b) otrzymamy  $j+1$  warunków transversalności, które należy spełnić dla każdej współrzędnej granicznej  $x_i$

$$\psi_i(x, a_i) + \lambda a_i = \psi_{i+1}(x, a_{i+1}) + \lambda a_{i+1} \quad \text{dla } x = x_i. \quad (4.6)$$

Zakładając dodatkowo ciągłość funkcji momentu zginającego  $m_0(x)$  można pokazać, że warunek (4.6) jest spełniony w przypadku ciągłości przekroju

$$a^-(x_i) = a^+(x_i). \quad (4.7)$$

Na przykładzie wykonanych w dalszej części pracy obliczeń pokażemy, iż funkcjonal (4.5b) uwzględniający podział belki na strefy odkształcone i nie odkształcone plastycznie należy rozważać jedynie w tym przypadku, gdy przy obliczeniach funkcji  $\psi$  nie narzucono dodatkowego ograniczenia w postaci

$$s_{\max}(x) \geq 1. \quad (4.8)$$

Warunek (4.8) może być nie spełniony np. w przypadku, gdy czasy graniczne  $t_a$  i  $t_b$ , (3.8), we wzorach (4.2) i (4.3) nie zostaną wyznaczone ze związku  $s = 1$ , lecz będą określone z innych zależności (np. przypadek prostokątnego programu obciążenia  $\theta(T)$  daje  $t_a = 0$ ,  $t_b = 1$ ).

Funkcjonał (4.5b) należy uzupełnić wtedy o dodatkowe ograniczenie (4.8). W pozostałych przypadkach można rozważać funkcjonal

$$J = \int_0^1 [\bar{\psi}(x, a) + \lambda a] dx, \quad (4.9)$$

gdzie  $\bar{\psi}(x, a)$  wyraża się jednorodną zależnością dla całego przedziału  $0 \leq x \leq 1$ .

## 5. Rozwiązania szczegółowe

**5.1. Minimalizacja całkowitej energii rozproszonej.** Poszukując kształtu optymalnego belki, dla którego energia dysypowana w trakcie płynięcia lepkoplastycznego przyjmuje wartość minimalną, założymy wstępnie, iż przyłożenie maksymalnego obciążenia spowoduje uplastycznienie całej belki, czyli że spełniony jest warunek (4.8) dla każdego  $0 \leq x \leq 1$ . Prawdziwość tego założenia można później łatwo sprawdzić dla rozwiązania optymalnego  $a = a_{\text{opt}}(x)$ .

Funkcję  $\psi$  we wzorze na energię rozproszoną (4.1) zapiszemy w postaci:

$$\psi(x, a) = \frac{m_0(x)}{h} \int_{t_a}^{t_b} \vartheta(t) \dot{\epsilon}^{vp} dt, \quad (5.1)$$

gdzie  $\dot{\epsilon}^{vp} = \dot{\epsilon}^{vp}(s-1)$  jest dowolną funkcją nadwyżkową prawa fizycznego (2.1). Granice całkowania  $t_a$  i  $t_b$ , (3.8), oraz naprężenie  $s(x, t)$ , (3.1), są funkcjami argumentu  $\frac{a(x)}{m_0(x)}$ , z czego wynika, że całkowanie (5.1) daje:

$$\psi(x, a) = m_0(x) \psi_0 \left( \frac{a}{m_0} \right). \quad (5.2)$$

Funkcjonał (4.9) można więc także uzależnić od argumentu  $\frac{a(x)}{m_0(x)}$

$$J = \int_0^1 m_0(x) \left[ \psi_0 \left( \frac{a}{m_0} \right) + \lambda \frac{a}{m_0} \right] dx. \quad (5.3)$$

Wprowadzając dodatkowo oznaczenie

$$\mathcal{E} = m_0(x) \left[ \psi_0 \left( \frac{a}{m_0} \right) + \lambda \frac{a}{m_0} \right], \quad (5.4)$$

równanie Eulera-Lagrange'a dla (5.3) zapiszemy w postaci

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \left( \frac{a}{m_0} \right)} \frac{\partial \left( \frac{a}{m_0} \right)}{\partial a} = 0. \quad (5.5)$$

Wykonując przepisane różniczkowanie otrzymujemy

$$\frac{a(x)}{m_0(x)} = c = \text{const}(x). \quad (5.6)$$

Jedyną funkcją  $a(x)$  spełniającą jednocześnie (5.6) oraz warunek stałej objętości (3.4) jest

$$a = a_{\text{opt}}(x) = m_0(x), \quad (5.7)$$

a więc funkcja opisująca kształt przekroju belki równomiernej wytrzymałości.

Belka równomiernej wytrzymałości (5.7) zostaje uplastyczniona zawsze jednocześnie na całej jej długości, niezależnie od postaci funkcji czasu  $\theta(t)$ , (2.4), z czego wynika, że warunek (4.8) jest spełniony dla każdego  $0 \leq x \leq 1$ .

**5.2. Minimalizacja maksymalnego przemieszczenia resztkowego.** Optymalnych funkcji kształtu  $a = a_{\text{opt}}(x)$  przy kryterium minimalnego przemieszczenia resztkowego końca belki poszukiwać będziemy dla trzech przypadków liniowości:

- 1) liniowy rozkład momentu  $M_0(X)$ , (2.3), odpowiadający obciążeniu belki dowolnie zmienną w czasie siłą skupioną:  $m_0 = 1-x$ ,
- 2) dwuliniowy („trójkątny”) program obciążenia  $\theta(T)$ , (2.4):  $n = 1$ ,
- 3) liniowa funkcja nadwyżkowa  $\varepsilon^{sp}$  w równaniu fizycznym (2.1):  $p = 1$ .

Przyjmując liniowość jednej z funkcji  $M_0(X)$ ,  $\theta(T)$  lub  $\varepsilon^{sp}(\sigma - \sigma_0)$  będziemy jednocześnie dopuszczać nieliniowość pozostałych funkcji opisujących postawiony problem.

**5.2.1. Obciążenie siłą skupioną: liniowa funkcja momentu  $M_0(X)$ .** Podobnie jak dla problemu minimalizacji całkowitej energii rozproszonej, założymy wstępnie, iż obciążenie belki maksymalną siłą skupioną spowoduje jej całkowite uplastycznienie. Krzywiznę resztkową (3.7) można zapisać jako funkcję argumentu  $\frac{a(x)}{m_0(x)}$ . Funkcjonał (4.9) uzależnimy również od tego argumentu. Równanie Eulera-Lagrange'a zapiszemy podobnie jak dla funkcji  $\mathcal{E}$ , (5.4), skąd:

$$(1-x) \frac{\partial \left[ k_r \left( \frac{a}{m_0} \right) \right]}{\partial \left( \frac{a}{m_0} \right)} + m_0 \lambda = 0. \quad (5.8)$$

Podstawiając do (5.8) moment  $m_0 = 1-x$  opisujący działanie siły skupionej otrzymujemy (5.6), czyli funkcję przekroju równomiernej wytrzymałości (5.7). Podobnie jak dla kryterium minimalnej energii rozproszonej, rozwiązanie optymalne w tym przypadku jest niezależne od postaci funkcji czasu  $\theta(T)$ , (2.4), oraz od prawa fizycznego (2.1).

**5.2.2. Dwuliniowy („trójkątny”) program obciążenia  $\theta(T)$ .** Rozważmy dwuliniowy niesymetryczny program obciążenia  $\theta(T)$ , (2.4), przy dowolnym rozkładzie momentu  $m_0(x)$  i potęgowym prawie fizycznym (2.1). Krzywizna resztkowa (3.7) wyraża się wtedy zależnością:



$$k_r = \frac{DT_2}{(p+1)h} \frac{a}{\vartheta_1 m_0} \left( \frac{\vartheta_1 m_0}{a} - 1 \right)^{p+1}. \quad (5.9)$$

Kształt optymalny funkcji  $a(x)$  wyznaczmy z równania Eulera-Lagrange'a zapisanego dla funkcjonału (4.9), skąd

$$\frac{1-x}{m_0} \left( \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} - 1 \right)^p \left( \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} + 1 \right) = \frac{\vartheta_1 (p+1)h}{DT_2} \lambda = \lambda_0. \quad (5.10)$$

Jak widać, rozwiązanie optymalne  $a_{\text{opt}}(x)$  zależy jedynie od wykładnika  $p$  w prawie fizycznym i nie zależy od lepkości materiału  $D$ . Rozwiązanie to jest także niezależne od asymetrii cyklu obciążenia ani od czasu trwania impulsu obciążenia  $t_2$ . Warto też dodać, że (5.10) łatwo daje się uogólnić na przypadek bardziej skomplikowanego prawa fizycznego zaproponowanego przez P. Perzynę [8]

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \sum_{i=1}^N D_i \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^i. \quad (5.11)$$

Przekrój optymalny  $a_{\text{opt}}(x)$  określony jest wtedy następująco:

$$\frac{1-x}{m_0} \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{i+1} \left( \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} - 1 \right)^i \left( \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} + 1 \right) = \frac{\vartheta_1 h}{T_2} \lambda = \lambda_1. \quad (5.12)$$

Mnożnik Lagrange'a  $\lambda$  występujący w rozwiązaniach (5.10), (5.12) należy wyznaczyć z warunku stałej objętości (3.4); w szczególnym przypadku  $\lambda = 0$  otrzymujemy zawsze (5.7), czyli kształt belki równomiernej wytrzymałości.

Przy większych obciążeniach, gdy  $\vartheta_1 > 1$ , mamy  $\lambda > 0$ . Przy nieujemnych wartościach mnożnika  $\lambda$  z równań (5.10), (5.12) wynika

$$s_{\text{max}}(x) = \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} > 1,$$

co oznacza, że warunek uplastycznienia belki (4.8) jest spełniony dla każdego  $0 \leq x \leq 1$ .

**5.2.3. Liniowe równanie fizyczne.** Wpływ nieliniowych funkcji czasu  $\theta(T)$  na rozwiązania optymalne  $a_{\text{opt}}(x)$  pokażemy dla różnych wykładników  $n$  potęgowej funkcji (2.4) oraz dla liniowości fizycznej prawa (2.1) ( $p = 1$ ). Odpowiednie podstawienia do wzoru na krzywiznę resztkową (3.11) dadzą

$$k_r = \frac{DT_2}{h} \left[ \vartheta_1 \frac{m_0}{a} \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \left( \vartheta_1 \frac{m_0}{a} \right)^{-\frac{1}{n}} - 1 \right], \quad (5.13)$$

natomiast z równania Eulera-Lagrange'a dla funkcjonału (4.9) otrzymujemy

$$\frac{1-x}{m_0} \left( \vartheta_1 \frac{m_0}{a_{\text{opt}}} \right)^2 - \left( \vartheta_1 \frac{m_0}{a_{\text{opt}}} \right)^{1-\frac{1}{n}} = \frac{(n+1)\vartheta_1 h}{DT_2} \lambda = \lambda_2. \quad (5.14)$$

Przy  $n > 0$  oraz  $\lambda > 0$  (5.14) daje zawsze

$$s_{\text{max}}(x) = \frac{\vartheta_1 m_0}{a_{\text{opt}}} > 1,$$

co oznacza, iż belka zostaje uplastyczniona dla każdego  $0 \leq x \leq 1$ .

Przejścia graniczne  $n \rightarrow \infty$  oraz  $n \rightarrow 0$  nie wynikają wprost z rozwiązania (5.14) i dlatego wymagają osobnego omówienia.

Przypadek  $n \rightarrow \infty$  daje zawsze  $k_r = 0$  (5.13), i wtedy, dowolny rozkład przekroju wzdłuż osi belki jest optymalnym. Bardziej złożony jest przypadek „prostokątnego” programu obciążenia  $\theta(T)$ , a więc  $n = 0$ , (2.4). Z rozwiązania ogólnego (5.14) mamy wtedy

$$a_{\text{opt}}(x) = \lambda_3 \sqrt{m_0(x)(1-x)}, \quad (5.15)$$

gdzie  $\lambda_3 = \frac{\vartheta_1}{\sqrt{\lambda_2}}$ .

Rozwiązanie (5.15) jest jednak błędne: z warunku stałej objętości (3.4) mamy  $\lambda_3 = \frac{2}{3} \vartheta_1$  z czego wynika, że dla  $\vartheta_1$  niewiele większego od jedności oraz dla dowolnie zmiennego momentu  $m_0(x)$  naprężenie maksymalne (3.2) może być mniejsze od granicy plastyczności. Z rozwiązania (5.15) nie otrzymujemy też ciągłego przejścia do funkcji równomiernej wytrzymałości (5.7) ( $\vartheta_1 = 1$ ).

Dokładniejsza analiza tego przypadku nasuwa wniosek, iż błędne rozwiązanie wynika z tego, że czasy graniczne  $t_a(x)$  i  $t_b(x)$  określone są tu początkiem i końcem samego impulsu:  $t_a = 0$ ,  $t_b = t_2 = 1$ , a nie zostały obliczone ze wzorów (3.8), jak to było dla poprzednio analizowanych zadań ( $n > 0$ ). Dlatego też przypadek obciążenia programem prostokątnym ( $n = 0$ ) należy rozważyć przy dodatkowym ograniczeniu (4.8). Zadanie to rozwiążemy znaną metodą Valentine’a, stosowaną często przy optymalizacji belek sprężystych z ograniczeniami na wielkość przekroju [1]. W tym celu wprowadzimy nieujemną funkcję  $e^2(x)$ , taką że

$$e^2(x) = s_{\text{max}}(x) - 1, \quad (5.16)$$

oraz dodatkowy mnożnik Lagrange’a  $\lambda_s = \lambda_s(x)$ , tak że funkcjonał (4.5) przyberze postać

$$J = \int_0^1 [(1-x)k_r + \lambda a + \lambda_s(e^2 - s_{\text{max}} + 1)] dx. \quad (5.17)$$

Obliczając wariację funkcjonału (5.17) ze względu na poszukiwaną funkcję przekroju  $a(x)$  oraz ze względu na niewiadomą  $e(x)$  otrzymujemy

$$\vartheta_1 \frac{(1-x)m_0}{a^2} + \lambda + \lambda_s(x) \frac{d}{da} (s_{\text{max}}) = 0, \quad (5.18)$$

$$2\lambda_s(x)e(x) = 0. \quad (5.19)$$

Równanie (5.19) prowadzi do dwóch przypadków:

- 1)  $e(x) = 0$  i wtedy z (5.16) otrzymujemy omówione już wcześniej rozwiązanie (4.4),
- 2)  $\lambda_s(x) = 0$ , i wówczas (5.18) daje

$$a_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\vartheta_1}{\lambda} m_0(x)(1-x)} = \lambda_4 \sqrt{m_0(x)(1-x)}. \quad (5.20)$$

Związek (5.20), który obowiązuje dla uplastycznionej części belki, ma wprawdzie identyczną postać jak błędny wynik (5.15), jednak mnożnik  $\lambda_4$  jest tutaj zależny od wartości

współrzędnej  $x_g$  rozgraniczającej odpowiednie strefy. Wyznaczając  $\lambda_4$  oraz  $x_g$  należy spełnić zarówno warunek stałej objętości, w którym uwzględniono rozwiązanie (4.4), jak również warunek transversalności (4.6), z którego wynika ciągłość przekroju na granicy odpowiednich rozwiązań (4.7)\*).

## 6. Przykłady

Zależności (5.10), (5.14) na funkcję opisującą przekrój optymalny belki otrzymano w postaci uwikłanej. Obliczenie efektywnej funkcji  $a_{opt}(x)$  dla dowolnych wykładników  $p$  oraz  $n$  może więc nastręczać poważne trudności, których nie da się pokonać bez pomocy maszyny cyfrowej. Wyjątek stanowi tu przypadek liniowości fizycznej ( $p = 1$ ) oraz dwuliniowy program obciążenia ( $n = 1$ ); wzory (5.10), (5.14) dają się wtedy sprowadzić do postaci, z której łatwo można określić funkcję optymalną przekroju dla dowolnego rozkładu momentu  $m_0(x)$ :

$$a_{opt}(x) = \vartheta_1 m_0(x) \sqrt{\frac{1-x}{\lambda_0 m_0(x) + 1-x}}, \quad (6.1)$$

gdzie  $\lambda_0$  należy wyznaczyć z warunku stałej objętości (3.4). Wykorzystując (6.1), obliczymy przykładowo  $\lambda_0$  oraz odpowiednie funkcje resztkowego przemieszczenia końca belki dla typowych przypadków obciążenia: siły skupionej, obciążenia ciągłego równomiernego i momentu skupionego. Czwarty i ostatni przykład ilustruje metodę postępowania przy określaniu optymalnej funkcji przekroju dla „prostokątnej” funkcji czasu  $\theta(T)$ , (2.4).

a) Obciążenie siłą skupioną:  $m_0 = 1-x$

$$a_{opt} = 1-x, \quad (6.2)$$

$$w_{opt} = w_s = \frac{DT_2}{h} \frac{(\vartheta_1 - 1)^2}{4\vartheta_1}, \quad (6.3)$$

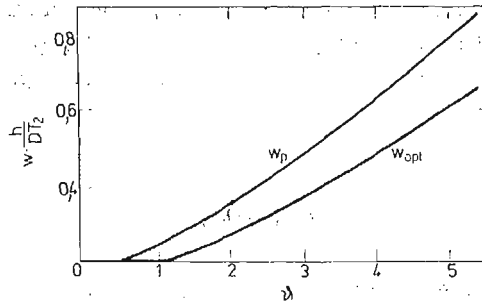
$$w_p = \frac{DT_2}{h} \frac{(\vartheta_1 - 1)^3}{24\vartheta_1^2}, \quad (6.4)$$

gdzie  $w_{opt}$ ,  $w_s$ ,  $w_p$  oznaczają odpowiednio przemieszczenia resztkowe końca belki optymalnej, równomiernej wytrzymałości i przyrmatycznej. Jak już wcześniej wspomniano, belka optymalna, przy jej obciążeniu siłą skupioną, jest belką równomiernej wytrzymałości, a więc funkcja optymalna  $a_{opt}(x)$  nie zależy od maksymalnej wartości impulsu obciążenia  $\vartheta_1$ ; od współczynnika  $\vartheta_1$  zależy jednak różnica pomiędzy maksymalnym ugięciem belki optymalnej i przyrmatycznej, co pokazano na rys. 3.

b) Obciążenie ciągle równomierne:  $m_0 = (1-x)^2$ ,

$$a_{opt} = \frac{\vartheta_1(1-x)^2}{\sqrt{\lambda_0(1-x)+1}}, \quad (6.5)$$

\* ) Bardziej szczegółową dyskusję obciążenia belki impulsem prostokątnym zawiera praca doktorska E. Cegielskiego pt.: Optymalizacja konstrukcji lepkoplastycznych, Politechnika Krakowska 1981.



Rys. 3.

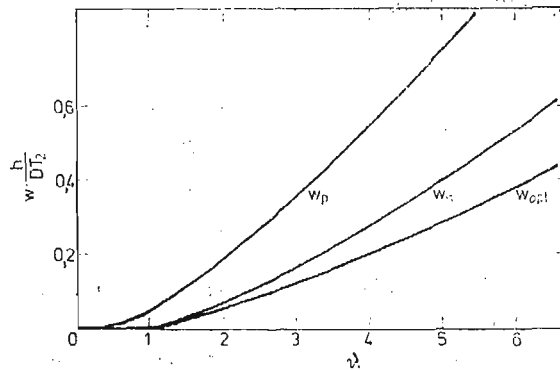
$$\vartheta_1 = \frac{5\lambda_0^3}{2[3(\lambda_0+1)^2 - 10(\lambda_0+1) + 15]\sqrt{\lambda_0+1} - 16}, \quad (6.6)$$

$$w_{opt} = \frac{DT_2}{h} \frac{1}{2\lambda_0^2} \left[ \frac{2}{5} (\lambda_0+1)^{5/2} - 2\sqrt{\lambda_0+1} - \lambda_0^2 + \frac{8}{5} \right], \quad (6.7)$$

$$w_s = \frac{DT_2}{h} \frac{(\vartheta_1 - 1)^2}{4\vartheta_1}, \quad (6.8)$$

$$w_p = \frac{DT_2}{h} \frac{1}{2\vartheta_1} \left( \frac{3}{4} \vartheta_1^2 - \vartheta_1 + \frac{1}{6} \ln 3\vartheta_1 + \frac{1}{4} \right). \quad (6.9)$$

Na rys. 4 przedstawiono odpowiednie funkcje maksymalnego ugięcia resztkowego belki przyzmatycznej (6.9), równomiernej wytrzymałości (6.8) i optymalnej (6.7) w zależności

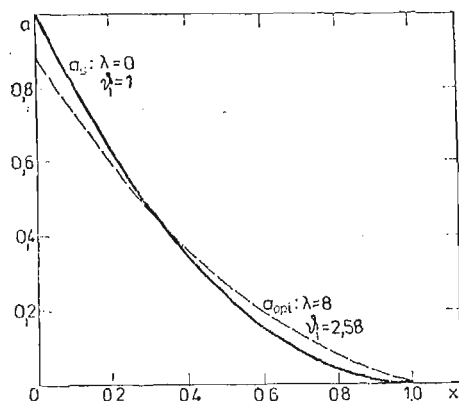


Rys. 4.

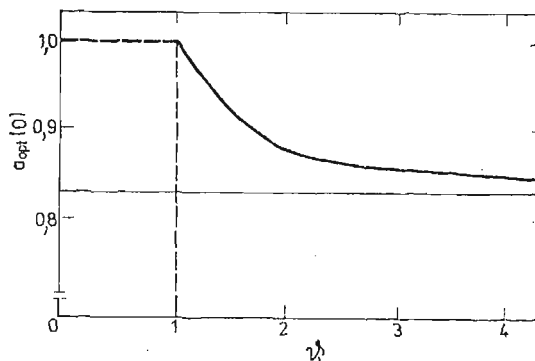
od parametru  $\vartheta_1$ . Kolejny rysunek, nr 5, przedstawia funkcję przekroju  $a(x)$  belki równomiernej wytrzymałości oraz optymalnej dla  $\vartheta_1 = 2,58$  ( $\lambda_0 = 8$ ), a na rysunku 6 pokazano zależność wielkości przekroju belki optymalnej w miejscu utwierdzenia od współczynnika  $\vartheta_1$ .

c) Obciążenie momentem skupionym:  $m_0 = 1$ ,

$$a_{opt} = \vartheta_1 \sqrt{\frac{1-x}{\lambda_0+1-x}}, \quad (6.10)$$



Rys. 5.



Rys. 6.

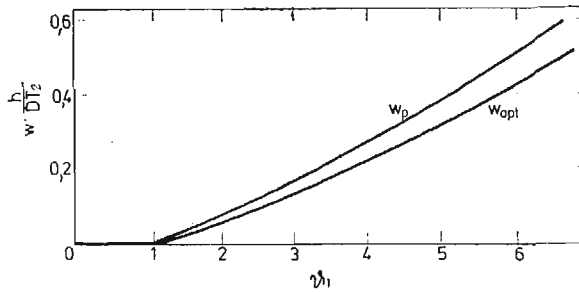
$$\vartheta_1 = \left( \sqrt{\lambda_0 + 1} - \frac{\lambda_0}{2} \ln \frac{2 + \lambda_0 - 2\sqrt{\lambda_0 + 1}}{\lambda_0} \right)^{-1}, \quad (6.11)$$

$$w_{opt} = \frac{DT_2}{h} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda_0}{2} \right) \sqrt{\lambda_0 + 1} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda_0^2}{8} \ln \frac{(\sqrt{\lambda_0 + 1} + 1)^3}{\lambda_0 (2\sqrt{\lambda_0 + 1} + \lambda_0 + 2)^{1/2}} \right], \quad (6.12)$$

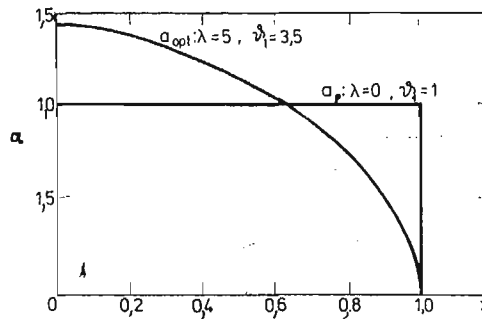
$$w_s = w_p = \frac{DT_2}{h} \frac{(\vartheta_1 - 1)^2}{4\vartheta_1}. \quad (6.13)$$

Zależność przemieszczenia resztkowego końca belki pryzmatycznej i optymalnej od maksymalnej wartości parametru  $\vartheta_1$  przedstawiono na rys. 7. Rysunek 8 przedstawia kształt optymalnej funkcji przekroju  $a_{opt}(x)$  dla wartości  $\vartheta_1 = 3,5$  ( $\lambda_0 = 5$ ). Jak widać, przekrój optymalny jest równy zero w miejscu działania momentu skupionego, z czego wynika, że płynięcie plastyczne zostanie wywołane w tym przekroju natychmiast po przyłożeniu obciążenia, podczas gdy dla belki pryzmatycznej (równomiernej wytrzymałości) pierwsze odkształcenia plastyczne pojawią się jednocześnie w całej belce po pewnym czasie  $t_1 = 0$ .

d) Obciążenie momentem skupionym o stałej wartości  $m(x, t) = \vartheta_1$  przyłożonym nagle w przedziale czasu  $0 \leq t \leq t_2$  ( $n = 0$ ).



Rys. 7.



Rys. 8.

$$a_{opt}(x) = \begin{cases} \vartheta_1 & \text{dla } 0 \leq x \leq x_g, \\ \lambda_{II} \sqrt{1-x} & \text{dla } x_g \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (6.14)$$

$$\lambda_{II} = \frac{3}{2} \frac{1 - \vartheta_1 x_g}{(1 - x_g)^{3/2}}, \quad (6.15)$$

$$w_{opt} = \frac{DT_2}{h} (1 - x_g)^2 \left( \frac{2}{3} \frac{\vartheta_1}{\lambda_{II}} \sqrt{1 - x_g} - \frac{1}{2} \right), \quad (6.16)$$

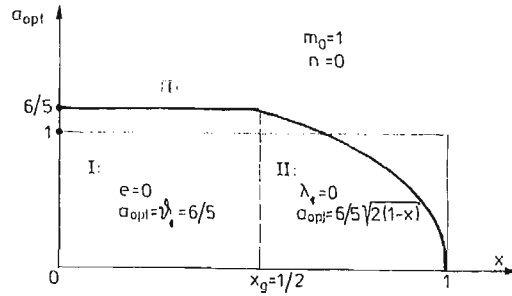
$$w_p = \frac{1}{2} \frac{DT_2}{h} (\vartheta_1 - 1), \quad (6.17)$$

gdzie

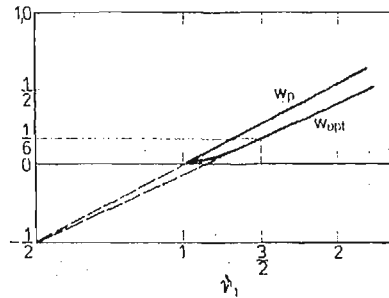
$$x_g = \begin{cases} \frac{3 - 2\vartheta_1}{\vartheta_1} & \text{dla } 1 \leq \vartheta_1 \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{dla } \vartheta_1 \geq \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (6.18)$$

oznacza granicę pomiędzy poszczególnymi strefami.

Przykład przekroju optymalnego dla  $\vartheta_1 = \frac{6}{5}$  przedstawiono na rysunku 9, natomiast odpowiednie funkcje przemieszczenia reszkowego końca belki przyzmatycznej (równomiernej wytrzymałości) i optymalnej przedstawiono graficznie na rysunku 10.



Rys. 9.



Rys. 10.

## 7. Wnioski końcowe

Otrzymane w prezentowanej pracy rozwiązania optymalne nasuwają szereg wniosków, spośród których najważniejsze są następujące:

1) optymalna funkcja kształtu dla liniowej funkcji momentu zginającego  $m_0(x) = 1 - x$  jest niezależna od przyjętego kryterium optymalizacji (w ujęciu dualnym);

2) przy minimalizacji energii rozproszonej rozwiązanie optymalne (kształt równomiernej wytrzymałości) jest niezależne od postaci równania fizycznego (2.1) i funkcji impulsu obciążenia  $\theta(T)$ ;

3) jeśli minimalizowane jest przemieszczenie resztkowe końca belki, wtedy:

a) wszystkie rozwiązania optymalne z wyjątkiem obciążenia siłą skupioną zależą wyraźnie od postaci równania fizycznego (2.1) oraz funkcji czasu  $\theta(T)$ ,

b) wszystkie rozwiązania nie zależą od czasu trwania impulsu obciążenia  $T_2$  ani od asymetrii tego impulsu,

c) nieliniowe równanie fizyczne (2.1) wpływa na kształt optymalny głównie przez wykładnik potęgowy  $p$ ; lepkość  $D$  nie ma prawie żadnego wpływu na odpowiednie rozwiązania (od lepkości zależą jedynie przemieszczenia resztkowe),

d) dla dwuliniowego impulsu obciążenia można otrzymać odpowiednie rozwiązanie dla dowolnego addytywnego równania fizycznego przy założeniu, że prędkość odkształcenia lepkoelastycznego  $\dot{\epsilon}^{vp}$  daje się aproksymować szeregiem potęgowym (5.11),

e) bezpośrednio przejście od rozwiązania dla potęgowej funkcji czasu  $\theta(T)$  ( $n \neq 0$ ) do programu prostokątnego ( $n = 0$ ) nie istnieje: w celu otrzymania właściwego rozwiązania należy wprowadzić dodatkowy warunek ograniczający:

$$s_{\max}(x) \geq 1.$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku materiału o nieliniowości fizycznej*, Zeszyty Naukowe Polit. Krak. nr 5, 1975.
2. E. CEGIELSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Parametric optimization of viscoplastic bars under dynamic axial bending*, Rozpr. Inż. 1, 29 27 - 37, 1981.
3. E. CEGIELSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimization of some viscoplastic structures under variable loads*, in: Proc. Euromech, Coll. 174 on Inelastic Structures Under Variable Loadings, Palermo 1983.
4. E. CEGIELSKI, *Optimization of rigid visco-plastic bars and beams under dynamic loadings*, Proc. of Fourth Congress BAN, Varna 1981.
5. J. LELLEP, JU. LEPIK, *Analytical methods in plastic structural design*, Eng. Optimization, 7, 209 - 239, 1984.
6. JU. LEPIK, *Optymalnoje projektowanie nieuprugiach balok s dopolnitelnymi podporami w sluczaje dynamiczeskogo nagruzenia*, UZTGU, 430, 132 - 143, 1970.
7. Z. MRÓZ, JU. LEPIK, *Optymalnoje projektowanie konstrukcji pri impulsivnom nagruzenii*. Mech. Polim. 6, 1021 - 1028, 1977.
8. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*. PWN, Warszawa 1966.
9. P. SYMONDS, *Dinamika nieuprugiach konstrukcji — zbornik statiej*, Mechanika, 29, Moskwa 1982.
10. M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal structural design in rheology*, J. Appl. Mech., 3, 38, 39 - 46, 1971.

#### Резюме

#### ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ФОРМИРОВАНИЯ КРОНШТЕЙНОВОЙ ВЯЗКО ПЛАСТИЧЕСКОЙ БАЛКИ ПОДВЕРГНУТОЙ ДЕЙСТВИЮ КВАЗИ-СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

В работе рассматривается оптимизация кронштейновой балки идеально двухфазовой, подвергнутой действию пропорционально переменной внешней нагрузки  $P(X, T) = P_1(X)P_2(T)$  где  $P_1(X)$  является произвольной функцией описывающей пространственное распределение нагрузки,  $P_2(T)$  — является степенной функцией времени. Искомая функция поперечного сечения  $A = A_{\text{опт}}(X)$  обеспечивает минимум рассеяной энергии или минимум максимального перемещения, при предположении постоянного объема. Анализировалось влияние коэффициентов степенного закона упруго вязкопластического материала и влияние формы квази-статической программы нагрузки  $P_2 = P_2(T)$  на вид решения.

#### Summary

#### SOME PROBLEMS OF OPTIMAL SHAPE-DESIGN OF VISCOPLASTIC CANTILEVER BEAM UNDER QUASI-STATIC LOADING

The paper is devoted to the shape optimization of cantilever I beam under proportional external loading  $P(X, T) = P_1(X)P_2(T)$  where  $P_1(X)$  denotes arbitrary function of spatial variable,  $P_2(T)$  — power function of time. Under the assumption of constant volume and criterion of minimum residual deflection of the free end or minimum of total dissipated energy, the function of cross section  $A = A_{\text{opt}}(X)$  is sought. The analytical solution is given for linear and nonlinear law of elastic viscoplastic material; the influence of the form of quasi-static loading program  $P_2(T)$  on the optimal function  $A_{\text{opt}}$  is described.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 marca 1984 roku