MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 23 (1985)

ZASTOSOWANIE ZMODYFIKOWANEJ METODY KRYŁOWA-BOGOLUBOWA DO BADANIA DRGAŃ SWOBODNYCH UKŁADÓW NIELINIOWYCH

KRZYSZTOF GOŁOŚ

Politechnika Warszawska
Instytut Podstaw Budowy Maszyn

W pracy przedstawiono rozszerzenie metody Kryłowa-Bogolubowa dla rozwiązywania pewnej grupy równań różniczkowych. Przedstawioną metodę zastosowano do badania drgań swobodnych nieliniowego układu opisanego przez Z. Osińskiego równaniem różniczkowym trzeciego rzędu.

1. Wprowadzenie

Analiza drgań układu materialnego polega najczęściej na badaniu rozwiązań różniczkowego równania drgań. W wielu przypadkach rozwiązania te nie są znane. Analizę opiera się wtedy na badaniu rozwiązań przybliżonych. Jedną z możliwości stosowanych do rozwiązywania nieliniowych równań ruchu drgającego są metody małego parametru. Są one oparte na założeniu, że nieliniowa część jest mała w stosunku do liniowej. Można ją zatem uzależnić od parametru mającego małą wartość $\mu \ll 1$.

Równanie ruchu drgań swobodnych bez tłumienia ma na ogół postać:

$$\ddot{x}+\omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}), \tag{1}$$

gdzie: μ oznacza mały parametr, zaś $f(x, x)$ jest nieliniową funkcją przemieszczenia i prędkości. Metoda postępowania przy rozwiązaniu równania (1) została przedstawiona przez Kryłowa i Bogolubowa [1, 2].

Sposób przedstawiony przez Kryłowa-Bogolubowa został rozszerzony przez Popova [3] na równania z liniowym tłumieniem postaci:

$$\ddot{x}+2h\dot{x}+\omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}). \tag{2}$$

Badaniem rozwiązań równań postaci (2) zajmował się też Bojadziew [4].

Modyfikację (rozszerzenie) przedstawionych podejść do badania drgań nieliniowych swobodnych układu zamodelowanych równaniem różniczkowym trzeciego rzędu przedstawił Osiński [5, 6].

Nieliniowe drgania opisane równaniem różniczkowym trzeciego rzędu były też przedmiotem rozważań Mulholland'a [8]. W pracy przedstawiono rozszerzenie metody Kryłowa-Bogolubowa stosowanej w pracach [5, 6, 7]. Przedstawiony sposób użyto do rozwiązania równania drgań swobodnych systemu uwzględniającego wpływ tarcia wewnętrznego i relaksację [6].

2. Rozwiązanie równania ruchu

W pracy podjęto analizę równania ruchu układu opisanego następującym równaniem różniczkowym:

$$\dddot{x}+k\ddot{x}+l\dot{x}+\omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}), \tag{3}$$

gdzie: x oznacza przemieszczenie, k, l, ω^2 stałe materiałowe, μ mały parametr, a f jest nieliniową funkcją przemieszczenia i pochodnych przemieszczenia.

Równanie postaci (3) było przedmiotem rozważań w pracach [5, 6]. W prezentowanym podejściu do rozwiązania równania (3) zaproponowano metodę Kryłowa-Bogolubowa odpowiednio zmodyfikowaną. Rozwiązanie równania (3) przedstawiono w postaci równania:

$$x = a+b\cos\psi+\mu U_1(a, b, \psi)+\mu^2 U_2(a, b, \psi)+ \dots \tag{4}$$

Wartości zmiennych a, b, ψ w zależności od czasu przedstawiono w formie układu równań:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\xi a+\mu A_1(a, b, \psi)+\mu^2 A_2(a, b, \psi)+ \dots \\ \frac{db}{dt} &= -\eta b+\mu B_1(a, b, \psi)+\mu^2 B_2(a, b, \psi)+ \dots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \zeta+\mu C_1(a, b, \psi)+\mu^2 C_2(a, b, \psi)+ \dots \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Równanie charakterystyczne równania (3) ma postać:

$$r^3+kr^2+lr+\omega^2 = 0 \tag{6}$$

W pracy przyjęto założenia jak w [5, 6].

Założono, że $k > 0$, $l > 0$, $\omega > 0$, zatem równanie (6) ma jeden pierwiastek rzeczywisty ujemny i dwa zespolone o częściach rzeczywistych ujemnych. W układzie równań (5), ξ oznacza bezwzględną wartość rzeczywistego pierwiastka równania (6), η bezwzględną wartość rzeczywistej części pierwiastka zespolonego, a ζ bezwzględną wartość części urojonej tego pierwiastka. Nieznane funkcje $u_1(a, b, \psi)$, $A(a, b, \psi)$, $B(a, b, \psi)$, $C(a, b, \psi)$ wyznaczamy po podstawieniu pochodnych $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ (z uwzględnieniem (5)) i x do równania (3). Porównując współczynniki przy tych samych potęgach otrzymujemy rekurencyjny układ równań cząstkowych różniczkowych. W celu jednoznacznego wyznaczenia A, B, C wprowadzono dodatkowe warunki

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} U_1(a, b, \psi)\cos\psi d\psi = 0,\\
&\int_0^{2\pi} U_1(a, b, \psi)\sin\psi d\psi = 0,\\
&\int_0^{2\pi} U_2(a, b, \psi)\cos\psi d\psi = 0,\\
&\int_0^{2\pi} U_2(a, b, \psi)\sin\psi d\psi = 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Z fizycznego punktu widzenia wprowadzenie tych warunków oznacza nieistnienie w rozwinięciu funkcji u_1, u_2 pierwszych harmonicznych wpływających na wartość dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia funkcji (4).

Znając układ równań na A, B, C rozwiązujemy go. Wyznaczone wielkości wstawiamy do układu (5). Układ równań (5) rozwiązujemy na drodze numerycznej, przy czym stałe a_0, b_0, ψ_0 wyznaczamy z warunków początkowych.

3. Zastosowanie metody (Przykład)

W pracy zastosowano procedurę do równania drgań swobodnych przedstawionego w pracy [6]. Równanie ma postać:

$$
\dddot{q}+\varkappa\ddot{q}+\alpha\dot{q}+\omega^2 q = -\mu\beta q^3-\mu\gamma\dot{q}^3-\mu\delta\ddot{q}^3 \tag{8}
$$

Rozwiązanie równania (8) przewidziano w postaci układu równań (4) i (5).

Różniczkując prawą stronę równania (4) i uwzględniając (5) otrzymano wyrażenia na $\dot{q}$, $\ddot{q}$, $\dddot{q}$. Po wstawieniu wyliczonych pochodnych do lewej strony równania (8) i porównaniu wyrazów przy tych samych potęgach małego parametru μ otrzymano rekurencyjny układ równań.

Równanie utworzone z wyrazów stojących przy μ^0:

$$
\begin{aligned}
&-\xi^3 a+(3\eta\zeta-\eta^3)b\cos\psi+(\zeta^3-3\eta^2\zeta)b\sin\psi+\varkappa[\xi^2 a+(\eta^2-\zeta^2)b\cos\psi+\\
&+2\eta\zeta b\sin\psi]+\alpha(-\xi a-\eta b\cos\psi-b\zeta\sin\psi)+\omega^2(a+b\cos\psi) = 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Równanie to jest spełnione tożsamościowo wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$
\begin{cases}
-\xi^3+\xi^2\varkappa-\alpha\xi+\omega^2 = 0\\
3\eta\zeta^2-\eta^3+\varkappa(\eta^2-\zeta^2)-\alpha\eta+\omega^2 = 0\\
\zeta^3-3\eta^2\zeta+2\varkappa\eta\zeta-\alpha\zeta = 0
\end{cases}
\tag{10}
$$

Układ równań (10) jest spełniony zawsze, ponieważ $-\xi$ i $-\eta-i\zeta$ są pierwiastkami równania charakterystycznego (6). Dla wyznaczenia funkcji A_1, B_1, C_1, korzystając z przedstawionych wyżej warunków otrzymano, następujący układ równań:

$$A_1(\xi^2-\varkappa\xi+\alpha)+a\xi(2\xi-\varkappa)\frac{\partial A_1}{\partial a}+b\eta(\xi+\eta-\varkappa)\frac{\partial A_1}{\partial b}+(\varkappa\zeta-\xi\eta)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}+$$
$$+\xi^2a^2\frac{\partial^2A_1}{\partial a^2}+\eta^2b^2\frac{\partial^2A_1}{\partial b^2}+\zeta^2\frac{\partial^2A_1}{\partial\psi^2}+2\xi\eta ab\frac{\partial^2A_1}{\partial a\,\partial b}-2\xi\zeta a\frac{\partial^2A_1}{\partial a\,\partial\psi}-$$
$$-2\eta\zeta b\frac{\partial^2A_1}{\partial b\partial\psi}=c_{11}a^3+c_{12}ab^2,$$
$$B_1(\alpha-\eta\varkappa+\eta^2-3\zeta^2)+a\xi(\eta+\xi-\varkappa)\frac{\partial B_1}{\partial a}+b\eta(2\eta-\varkappa)\frac{\partial B_1}{\partial b}+\zeta(\varkappa-\eta)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}+$$
$$+\xi^2a^2\frac{\partial^2B_1}{\partial a^2}+\eta^2b^2\frac{\partial^2B_1}{\partial b^2}+\zeta^2\frac{\partial^2B_1}{\partial\psi^2}-2\xi\eta ab\frac{\partial^2B_1}{\partial a\,\partial b}-2\xi\zeta a\frac{\partial^2B_1}{\partial a\,\partial\psi}+$$
$$-2\eta\zeta b\frac{\partial^2B_1}{\partial b\,\partial\psi}+c_1\zeta b(6\eta-2\varkappa)+3\xi\zeta ab\frac{\partial c_1}{\partial a}+3\eta\zeta b^2\frac{\partial c_1}{\partial b}-3\zeta^2b\frac{\partial c_1}{\partial\psi}= \tag{11}$$
$$=c_{15}b^3+c_{16}ba^2$$
$$B_1\zeta(3\eta-2\varkappa)+3\xi\zeta a\frac{\partial B_1}{\partial a}+3\eta\zeta b\frac{\partial B_1}{\partial b}-3\zeta^2\frac{\partial B_1}{\partial\psi}+c_1b(3\zeta^2-3\eta^2+2\eta\varkappa-\alpha)+$$
$$+ab\xi(3\eta-\xi+\varkappa)\frac{\partial c_1}{\partial a}+b^2\eta(\varkappa-4\eta)\frac{\partial c_1}{\partial b}+b\zeta(3\eta-\varkappa)\frac{\partial c_1}{\partial\psi}+$$
$$-\xi^2a^2b\frac{\partial^2c_1}{\partial a^2}+2\xi\zeta ab\frac{\partial^2c_1}{\partial a\,\partial\psi}+2\eta\zeta b^2\frac{\partial^2c_1}{\partial b\,\partial\psi}-\eta^2b^3\frac{\partial^2c_1}{\partial b^2}+$$
$$-\zeta^2b\frac{\partial^2c_1}{\partial\psi^2}-2\xi\eta ab^2\frac{\partial^2c_1}{\partial a\partial b}=c_{13}b^3+c_{14}a^2b,$$

gdzie:

$$c_{11}=-\beta-\gamma\xi^6-\delta\xi^9,$$
$$c_{12}=-\frac{3}{2}\beta-\frac{3}{2}\gamma\xi^2(\eta^2-\zeta^2)^2-6\gamma\eta^2\xi^4+\frac{3}{2}\delta\xi^3(3\eta\zeta^2-\eta^3)^2+\frac{3}{2}\delta\xi^3(\zeta^3-3\eta^2\zeta)^2,$$
$$c_{13}=-\frac{3}{2}\gamma(\eta^2-\zeta^2)^2\eta\zeta-6\gamma\eta^3\zeta^3-\frac{3}{4}\delta(3\eta\zeta^2-\eta^3)^2(\zeta^3-3\eta^2\zeta)-\frac{3}{4}\delta(\zeta^3-3\eta^2\zeta)^3,$$
$$c_{14}=-6\gamma\xi^5\eta-3\delta\xi^6(\zeta^3-2\eta^2\zeta),$$
$$c_{15}=-\frac{3}{4}\beta-\frac{3}{4}\gamma(\eta^2-\zeta^2)^3-3\gamma(\eta^2-\zeta^2)\eta^2\zeta^2+$$
$$-\frac{3}{4}\delta(3\eta\zeta^2-\eta^3)^3-\frac{3}{4}\delta(3\eta\zeta^2-\eta^3)(\zeta^3-3\eta^2\zeta)^2,$$
$$c_{16}=-3\beta-3\gamma\xi^4(\eta^2-\zeta^2)-3\delta\xi^6(3\eta\zeta^2-\eta^3).$$

Rozwiązując powyższe równania znaleziono zależności na A_1, B_1, C_1

$$\begin{aligned}A_1&=D_{11}a^3+D_{12}ab^2\\B_1&=D_{13}b^3+D_{14}a^2b\\C_1&=D_{15}b^2+D_{16}a^2\end{aligned}\tag{12}$$

Wartości współczynników $D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{16}$ są następujące:

$$\begin{aligned} D_{11} &= c_{11}/(4\xi^2-2\varkappa\xi+\alpha), \\ D_{12} &= c_{12}/(3\xi^2-2\varkappa\xi+\alpha+3\xi\eta+2\eta^2-\eta\varkappa), \\ D_{13} &= (c_{15}\cdot e_6-c_{13}\cdot e_2)/(e_1\cdot e_6-e_5\cdot e_2), \\ D_{14} &= (c_{16}\cdot e_8-c_{14}\cdot e_4)/(e_3\cdot e_8-e_7\cdot e_4), \\ D_{15} &= (c_{15}\cdot e_5-c_{13}\cdot e_1)/(e_2\cdot e_5-e_6\cdot e_1), \\ D_{16} &= (c_{16}\cdot e_7-c_{14}\cdot e_4)/(e_3\cdot e_8-e_7\cdot c_4), \\ e_1 &= \alpha-2\eta\varkappa+4\eta^2-3\zeta^2, \\ e_2 &= 9\zeta\eta-2\varkappa\eta, \\ e_3 &= \alpha-2\eta\varkappa+3\eta^2-3\zeta^2-\xi\eta+2\xi^2-\xi\varkappa, \\ e_4 &= 6\eta\zeta-2\varkappa\zeta+3\xi\zeta, \\ e_5 &= 6\eta\zeta-2\varkappa\zeta, \\ e_6 &= 3\zeta^2-3\eta^2+2\eta\varkappa-\alpha, \\ e_7 &= 6\eta\zeta-2\varkappa\zeta+3\xi\zeta, \\ e_8 &= 3\zeta^2-3\eta^2-2\xi^2+2\eta\varkappa+3\eta\xi+\varkappa\xi-\alpha. \end{aligned} \tag{13}$$

Wstawiając (13) do (5) otrzymano zależności na pochodne $\ddot{a}$, $\ddot{b}$, $\dot{\psi}$

$$\begin{cases} \dot{a} = -\xi a+\mu a(D_{11}a^2+D_{12}b^2), \\ \dot{b} = -\zeta b+\mu b(D_{13}b^2+D_{14}a^2), \\ \dot{\psi} = \omega+\mu(D_{15}b^2+D_{16}a^2). \end{cases} \tag{14}$$

W pierwszym przybliżeniu rozwiązanie równania (8) ma postać

$$q = a+b\cos\psi. \tag{15}$$

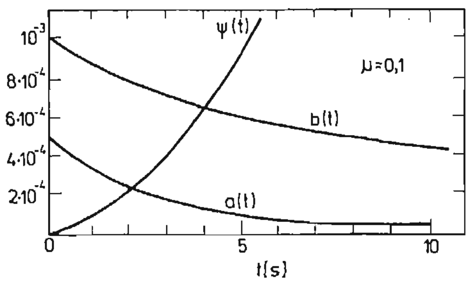
Przedstawiony układ równań (14) rozwiązanio numerycznie stosując procedurę Runge'go-Kutty czwartego rzędu. Do obliczeń przyjęto następujące wartości stałych:

$$\begin{aligned} \varkappa &= 5\cdot 10^{-3}, \\ \alpha &= 2\cdot 10^{11}, \\ \omega^2 &= 1{,}5\cdot 10^9, \\ \beta &= -1{,}2\cdot 10^{14}, \\ \gamma &= 3\cdot 10^{11}, \\ \delta &= 2\cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

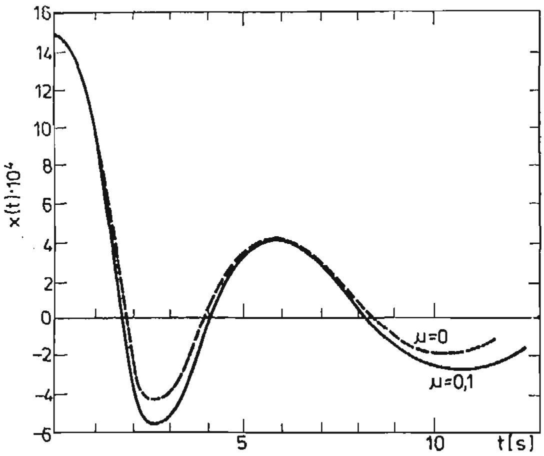
oraz warunki początkowe

$$\begin{aligned} a_0 &= a(0) = 0{,}0005, \\ b_0 &= b(0) = 0{,}001, \\ \psi_0 &= \psi(0) = 0. \end{aligned}$$

znaleziono rozwiązania dla wartości małego parametru $\mu = 0{,}001$ i $0{,}1$. Wykresy zmian $a(t)$, $b(t)$ i $\psi(t)$ dla $\mu = 0{,}1$ i podanych wyżej wartości przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Przebieg $a(t)$, $b(t)$ i $\psi(t)$.



Rys. 2. Przebieg $q(t)$.

Przebieg rozwiązania $q(t)$ dla różnych wartości u przedstawiono na rys. 2. Jak wynika z wykresu, przebieg $q(t)$ dla $\mu = 0{,}1$ bardzo mało różni się od przebiegu dla $\mu = 0$. Ruch opisany równaniem (15) przedstawia drgania zanikające. Drgania te odbywają się około środka drgań, którego położenie nie jest stałe, ale który przemieszcza się dążąc asymptotycznie do pewnego ustalonego położenia. Amplitudę drgań określa $b(t)$. Własności te są obserwowane przy badaniu drgań tłumionych tarciem wewnętrznym [7].

4. Wnioski

Przedstawione w pracy uogólnienie metody Kryłowa-Bogolubowa stanowi rozszerzenie dotychczas stosowanego podejścia. Uzależnienie parametrów A, B i C od zmiennych a, b, ψ umożliwiło dokładniejsze rozpatrzenie drgań swobodnych układu drgającego. Często w badaniach zależy głównie na wyznaczeniu zmian amplitud układu a, b oraz przesunięcia w fazie ψ w zależności od czasu. Pełne podanie postaci układu (14) pozwala na bardziej precyzyjne przeanalizowanie tych wielkości. Jednocześnie z matematycznego punktu widzenia zastąpienie rozpatrywania równania (3) (w przykładzie (8)) układem równań (4) i (5) (w przykładzie (14)) stanowi poważne ułatwienie. Prezentowana procedura postępowania może być wykorzystana do efektywnego badania drgań układów modelowanych równaniami różniczkowymi.

Literatura

1. Н. Н. Крылов, Н. Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику*, Акад. Наук Укр. ССР, 1937.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Москва 1958.
3. И. П. Попов, *Обобщение асимптотического метода Боголюбова в теории нелинейных колебаний*, Докл. Акад. Наук СССР 111, Москва 1959.
4. G. N. Bojadziev, *Deley and Functional Differential Equations and Their Applications*. Academic Press, 1972.
5. Z. Osiński, *Drgania swobodne nieliniowego układu z uwzględnieniem relaksacji i tarcia wewnętrznego*. Arch. Bud. Maszyn 4, 1961.
6. Z. Osiński, *Próba nieliniowego przedstawienia zjawisk tarcia wewnętrznego i relaksacji*. Warszawa 1961.
7. Z. Osiński, *Badanie tłumienia drgań za pomocą drgań skrętnych swobodnych o małej częstości*. Zagadnienia drgań nieliniowych, 3, 1963.
8. R. J. Mulholland, *Non-linear Oscilation of a Third — Order Differential Equation*. Int. J. Non — Linear Mechanics 6, 1971.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА КРЫЛОВА-БОГОЛЮБОВА ДЛЯ АНАЛИЗА СВОБОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ

В работе рассмотрено нелинейные свободные колебания системы. Сделано анализ асимптотического решения дифференциального уравнения в смысле Крылова-Боголюбова. Представлено обобщение концепции предложенной Осинским для решения дифференциальных нелинейных уравнений третьего ряда.

Summary

THE USE OF MODIFICATED KRYLOV-BOGOLIUBOV METHOD IN THE ANALYSIS OF FREE NONLINEAR OSCILATIONS OF SYSTEMS

The paper deals with the free nonlinear vibrations of a system. The asymptotic solution in the sence of Krylov-Bogoliubov of a differential equation is investigated. The extension of the idea proposed by Osiński to solve third order nonlinear differential equation is made.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 maja 1984 roku