

ANALIZA DRGAŃ PARAMETRYCZNYCH UKŁADÓW CIĄGŁYCH
PODDANYCH STAŁEMU OBCIĄŻENIU POPRZECZNEMU
Z ZASTOSOWANIEM METODY ASYMPTOTYCZNEJ
I METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

JERZY OSIŃSKI

*Institut Podstaw Budowy Maszyn
Politechnika Warszawska*

1. Wstęp

W analizie drgań parametrycznych istotną rolę ma uwzględnienie wpływu obciążenia stałego. Wpływ siły stałej na drgania parametryczne w układach dyskretnych był badany przez autora, a wyniki tych badań przedstawiono między innymi w pracach [5, 8, 9, 10]. W pracach autora i E. Kamińskiego [5, 10] wykazano, że w liniowym równaniu drgań parametrycznych z obciążeniem (tzn. równaniu Mathieu ze stałą siłą po prawej stronie) występuje dodatkowa rodzina rozwiązań opisująca drgania parametryczne o własnościach odmiennych od podstawowych drgań parametrycznych. Wzmocnienia rezonansowe występują przy stosunku częstości:

$$\frac{\omega}{\nu} = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

gdzie: ω — częstość własna, ν — częstość modulacji parametrycznej.

Własności drgań tej dodatkowej rodziny są analogiczne do drgań wymuszonych harmonicznie o amplitudzie zależnej od współczynnika modulacji parametrycznej. Drgania tej rodziny mają istotne znaczenie, gdyż nie można ich wyeliminować drogą zwiększania tłumienia. Drgania dodatkowej rodziny drgań parametrycznych są stateczne, amplitudy przy częstościach rezonansowych mają wartości skończone.

Własności drgań parametrycznych wywołanych obciążeniem zewnętrznym o wartości stałej w czasie były analizowane przez autora również w układach z nieliniową sprężystością. W pracach [8, 10] przedstawiono wyniki tej analizy dla dwóch charakterystyk sprężystych: ciągłej typu x^3 i nieciągłej dla układu z luzami.

Drgania parametryczne są również analizowane w układach ciągłych; powstaje więc pytanie, czy wpływ obciążenia jest tak samo istotny dla drgań parametrycznych układów ciągłych. Wyjaśnienie tego zagadnienia jest celem niniejszej pracy. Celowość podjęcia takiego problemu jest związana zarówno z praktycznym znaczeniem drgań parametrycznych związanych z obciążeniem, jak i z faktem, że w monografiach poświęconych w cało-

ści drganiom parametrycznym (np. G. Schmidt [12], W. Szemplińska-Stupnicka [13]) problem ten jest całkowicie pominięty.

Analizę przeprowadzono dla dwóch przykładów: drgań giętnych belki wywołanych siłą osiową i drgań belki o zmiennej długości. Rozważono wzbudzenie parametryczne wywołane funkcją sinusoidalną i prostokątną. W analizie stosowano metodę numeryczną i metodę ścisłą (Fouriera). Metoda ścisła prowadzi do ciągu równań różniczkowych zwyczajnych ze zmiennymi współczynnikami, które rozwiązano metodą asymptotyczną.

Najważniejszą zaletą metody ścisłej jest możliwość jakościowego przedstawienia najważniejszych wniosków. Jej zastosowanie jest jednak ograniczone do najprostszych przypadków drgań parametrycznych układów ciągłych. W monografiach poświęconych drganiom parametrycznym są stosowane przybliżone metody analityczne (np. G. Schmidt [12], W. Szemplińska-Stupnicka [13]), których możliwości są jednak również bardzo ograniczone. W analizowanych w wymienionych pracach układach nie uwzględnia się obciążeń poprzecznych i przyjmuje się znaczne założenia upraszczające w opisie tłumienia. Jako funkcję modulacji parametrycznej przyjmuje się jedynie funkcję sinusoidalną. Z tego względu jednym z celów niniejszej pracy jest opracowanie metody numerycznej pozwalającej w szczególności na analizę układów z nieciągłym wzbudzeniem parametrycznym poddanych obciążeniu poprzecznemu. Podstawą metody jest aproksymacja dowolnej funkcji modulacji parametrycznej funkcją odcinkami stałą. Rozwiązanie w tym przypadku otrzymuje się poprzez łączenie rozwiązań otrzymanych dla poszczególnych odcinków o stałej sztywności.

Równania ruchu odcinków o stałej sztywności otrzymano metodą podziału układów na elementy skończone. Podejście takie jest korzystne, gdyż pozwala na analizę układów o złożonych kształtach i warunkach brzegowych. Działanie metody przedstawiono na przykładzie analizy drgań parametrycznych belki o zmiennej długości z prostokątnym wzbudzeniem parametrycznym. Wnioski otrzymano w niniejszym opracowaniu mają charakter ogólny i dotyczą wszelkich układów ciągłych z wzbudzeniem parametrycznym.

2. Drgania giętne belki wywołane siłą osiową z uwzględnieniem stałego obciążenia poprzecznego

Problem drgań giętnych belki wywołanych siłą osiową bez obciążenia poprzecznego jest problemem znanym, a jego rozwiązanie można znaleźć w monografiach dotyczących drgań, między innymi w książce S. Ziemby [21], Z. Osińskiego [11] lub zbiorowej pod redakcją S. Kaliskiego [2]. Rozwiązania przedstawione w tych pracach zmodyfikowano tak, aby można było uwzględnić wpływ obciążenia poprzecznego o wartości stałej w czasie,

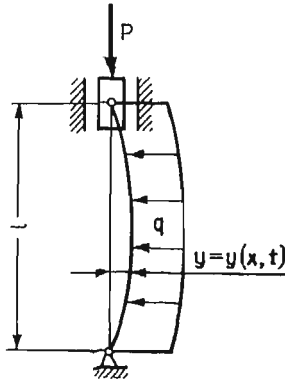
Schemat belki z obciążeniem przedstawiono na rys. 1. Przyjęto, że własności lepkosprężyste materiału można opisać modelem Voigta-Kelvina oraz że sztywność osiowa jest nieskończenie duża.

Układ może być opisany następującym równaniem:

$$\frac{EI\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial y^5(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + \rho F \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = q_0. \quad (2)$$

W równaniu (2) przyjęto następujące oznaczenia:

- E — moduł sprężystości podłużnej,
- I — moment bezwładności przekroju belki,
- ρ — gęstość materiału belki,
- F — pole przekroju poprzecznego belki,
- τ — współczynnik tłumienia zgodnie z przyjętym modelem tłumienia,
- P — zewnętrzna siła wzdłużna (rys. 1) stała co do wartości i równa sile zewnętrznej,
- q_0 — natężenie obciążenia poprzecznego (rys. 1),
- t — czas,
- y, x — współrzędne liniowe (rys. 1),



Rys. 1

Przyjęto, że zewnętrzna siła wzdłużna zmienia się wg zależności:

$$P = P_0 P_1 \cos vt. \quad (3)$$

Rozwiązania równania (2) poszukujemy w postaci szeregu funkcji:

$$y_n(x, t) = T_n(t) U_n(x) = T_n(t) \sin n \frac{\pi x}{l}. \quad (4)$$

Obciążenie zewnętrzne przedstawiamy również w postaci szeregu:

$$q_0 = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (5)$$

przy czym funkcje $Q_n(t)$ należy wyliczyć z zależności:

$$Q_n = \frac{1}{2} \int_0^l q_0 \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (6)$$

Po wykonaniu obliczeń wg wzorów (6) otrzymano

$$Q_n = \begin{cases} \frac{4q_0}{n\pi} & \text{dla } n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & \text{dla } n = 2, 4, 6 \dots \end{cases} \quad (7)$$

Podstawiając (4), (5) i (7) do (2) otrzymano ciąg równań:

$$\left\{ \ddot{T}_n(t) + \frac{1}{\varrho F} \left[\tau \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \right] \dot{T}_n(t) + \frac{1}{\varrho F} \left[EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - (P_0 + P_1 \cos \nu t) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right] T_n(t) \right\} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{4q_0}{n\pi \varrho F} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad \text{dla } n = 1, 3, 5 \dots \quad (8)$$

Stąd dla określenia $T_n(t)$ otrzymano równanie:

$$\ddot{T}_n(t) + 2h_n \dot{T}_n(t) + (1 - \mu_n \cos \nu t) \omega_n^2 T_n(t) = P_{sn} \quad (9)$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{\tau}{2\varrho F} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4, \\ \mu_n &= \frac{P_1}{P_{knn} - P_0}, \\ \omega_n^2 &= \frac{1}{\varrho F} (P_{knn} - P_0) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \\ P_{sn} &= \frac{4q_0}{n\pi \varrho F} \quad \text{dla } n = 1, 3, 5 \dots, \\ P_{sn} &= 0 \quad \text{dla } n = 2, 4, 6 \dots, \\ P_{knn} &= EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie P_{knn} — n siła krytyczna statyczna.

Badanie drgań ma sens jedynie w zakresie:

$$P_{knn} > P_0, \quad n = 1, 2 \dots, \quad (11)$$

wobec czego wartości μ_n, ω_n^2 określone wzorami (10) są zawsze dodatnie.

Z równania (8) jest widoczne, że w przypadku drgań parametrycznych belki z obciążeniem otrzymujemy do analizy nie równania Mathieu, lecz odpowiadające im równania, ale z siłą po prawej stronie. Równania niejednorodne występują jednak tylko dla nieparzystych wartości n . Dla wartości parzystych otrzymujemy równanie jednorodne (równania Mathieu), których rozwiązania są znane i przedstawione w podstawowych monografiach poświęconych teorii drgań (np. [11, 21]). Z punktu widzenia celu pracy istotne jest określenie charakteru rozwiązań równań niejednorodnych.

Dokładna analiza rozwiązań równania tego typu została przeprowadzona w pracach [5, 9], gdzie stosowano metodę asymptotyczną, przedstawiając rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego względem μ oraz metodę numeryczną. Zgodnie z wnioskami z wymienionych prac w równaniu (8) mogą występować dwie rodziny drgań parametrycznych: podstawowa rodzina drgań parametrycznych równania Mathieu oraz dodatkowa, której występowanie jest związane z siłą P_{sn} . Rodzina podstawowa występuje jednak tylko przy odpowiednio małych współczynnikach tłumienia. Zgodnie z wynikami prac [5, 9] podstawowy rezonans parametryczny w okolicy stosunku częstości:

$$\frac{\nu}{\omega} = 0,5 \quad (12)$$

wystąpi jeżeli spełniony jest warunek:

$$\frac{\mu_n}{4} > \gamma_n \quad (13)$$

gdzie γ_n — współczynnik tłumienia bezwymiarowego określony wzorem:

$$\gamma_n = \frac{h_n}{\omega_n}. \quad (14)$$

Korzystając z zależności (10) otrzymano z (13) po przekształceniach warunek:

$$P_1 > 2\tau \left(\frac{n\pi}{l} \right)^3 \sqrt{\frac{P_{krm} - P_0}{\rho F}} \quad (15)$$

Zgodnie z (11) wartość pod pierwiastkiem jest zawsze dodatnia. Wzór (15) określa warunek, jaki musi spełnić amplituda składowej harmonicznej wymuszenia, aby wystąpił podstawowy rezonans parametryczny. Widoczne jest, że najgroźniejszy jest rezonans $n = 1$, gdyż prawa strona zależności (15) rośnie bardzo silnie ze wzrostem n . Jeżeli tłumienie jest dostatecznie duże, to warunek (13) nie jest spełniony, i wówczas rozwiązanie równania (8) składa się jedynie z dodatkowej rodziny drgań parametrycznych związanej z siłą P_{sn} . Rozwiązanie w tym wypadku można przedstawić w postaci szeregu rozwiązań:

$$T_n(t) = x_{st} + \mu [a_1 \cos(\nu t - \varphi_1)] + \mu^2 [x_p + a_2 \sin(2\nu t - \varphi_2)] \quad \text{dla } n = 1, 3, 5 \dots \quad (16)$$

Sposób określenia poszczególnych składników rozwiązania przedstawiono w pracach autora oraz E. Kamińskiego [5, 9]. W przypadku badanym w niniejszej pracy wynoszą one:

$$\begin{aligned} X_{st} &= \frac{q_0}{\rho F \omega_n^2}, \\ a_1 &= \frac{\frac{q_0}{\rho F}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \nu^2)^2 + 4h_n^2 \nu^2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{2h_n}{\omega_n^2 - \nu^2}, \\ x_p &= \frac{\mu a_1}{2} \cos \varphi_1, \\ a_2 &= \frac{\frac{\omega_n^2 a_1}{2\mu}}{\sqrt{(\omega_n^2 - 4\nu^2)^2 + 16h_n^2 \nu^2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{2h_n}{\omega_n^2 - 4\nu^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Rozwiązania określone wzorem (16) mają charakter drgań wymuszonych harmonicznie — występują stateczne drgania okresowe o skończonej amplitudzie. Zwiększenie współczynnika tłumienia nie powoduje wyeliminowania tych drgań, a jedynie ograniczenie ich ampli-

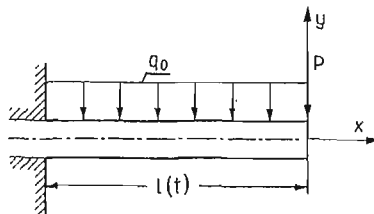
tudy. Częstościami rezonansowymi są częstości określone wzorem (1): podstawowy rezonans wystąpi w strefie $\nu \cong \omega_1$, czyli:

$$\nu \cong \sqrt{\frac{1}{\rho F} (P_{kr1} - P_0)} \left(\frac{\pi}{l} \right). \quad (18)$$

Należy również zwrócić uwagę, że występowanie dodatkowych drgań parametrycznych związanych z obciążeniem jedynie dla nieparzystych wartości n nie jest zależnością ogólną występującą we wszelkich układach ciągłych ze wzbudzeniem parametrycznym, lecz występuje jedynie w układach z warunkami brzegowymi, takimi jak na rys. 1. W rozwiązaniu w rozdziałach 3 i 4 przykładzie układu z innymi warunkami brzegowymi występuje również rezonans dla wartości parzystych ($n = 2$).

3. Drgania giętne belki o zmiennej długości

Drgania giętne belki wywołane zmianą w czasie jej długości zostały przeanalizowane w pracach J. Zajączkowskiego, J. Lipińskiego i G. Yamady [17, 18, 19, 20]. Schemat układu przedstawiono na rys. 2. W badanym układzie możliwe są dwie sytuacje. W pierwszej belka jest nieruchoma w kierunku osi X , a zamocowanie wykonuje ruch okresowy w kie-



Rys. 2

runku osi X , w drugiej zamocowanie jest nieruchome, a ruch okresowy wykonuje belka. Przyjęto dla obu wymienionych przypadków, że długość swobodna belki (tzn. odległość między końcem swobodnym belki a początkiem zamocowania) zmienia się okresowo wg wzoru:

$$l(t) = l_0(1 - \mu f(t)), \quad (19)$$

gdzie: l_0 — długość średnia belki, $f(t)$ — dowolna funkcja okresowa.

Parametr μ musi być zawarty w zakresie:

$$0 < \mu < 1. \quad (20)$$

Własności materiału opisano modelem Voigta-Kelvina. W pierwszym z omówionych powyżej przypadków (belka nieruchoma) układ może być opisany równaniem:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \tau \frac{\partial y^5}{\partial x^4 \partial t} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q_0 \quad (21)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} y(l(t), t) &= 0, \\ \frac{\partial y(l(t), t)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 y(0, t)}{\partial x^3} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Przyczyną wzbudzenia parametrycznego jest w tym przypadku okresowa zmienność długości belki. W drugim z omówionych powyżej przypadków (belka ruchoma, nieruchome zamocowanie) układ może być opisany równaniem:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \tau \frac{\partial y^5}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho F x \frac{d^2 l}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q_0 \quad (23)$$

z warunkami brzegowymi w postaci (22). Równanie (23) zapisano korzystając z pracy Z. Zajączkowskiego, J. Lipińskiego [18]. W równaniach (21) i (23) przyjęto oznaczenia analogiczne do oznaczeń w równaniu (2). W równaniu (23) w stosunku do równania (21) występuje dodatkowy wyraz, który fizycznie przedstawia osiową siłę bezwładności belki ruchomej. Siła bezwładności jest okresowo zmienna w czasie, a więc jest również przyczyną wzbudzenia drgań parametrycznych. Analiza przedstawionego zagadnienia przeprowadzona w pracach J. Zajączkowskiego, J. Lipińskiego, G. Yamady [18, 19, 20] dotyczyła wyłącznie problemu stateczności parametrycznej, wobec czego wpływ stałego w czasie obciążenia a nie był w niej uwzględniony (q nie wpływa na stateczność). Ponadto wyniki przedstawione w pracy [18] są bardzo uproszczone — pomija się wpływ tłumienia, a wzbudzenie parametryczne jest wywołane jedynie funkcją sinusoidalną. W niniejszym opracowaniu podjęto próbę rozwiązania równania niejednorodnego (z uwzględnieniem obciążenia q), uwzględniając również tłumienie.

Ze względu na złożoność problemu analizę ograniczono do pierwszego z omówionych powyżej przypadków badanego układu (ruchome zamocowanie, belka nieruchoma), a więc do analizy drgań parametrycznych wywołanych okresową zmianą długości belki. Problem drgań parametrycznych wywołanych osiową siłą bezwładności zostanie rozpatrzony oddzielnie ze względu na złożony i nieliniowy charakter tego wymuszenia. W konsekwencji postawione zadanie sprowadza się do rozwiązania równania (21). Problem ten jest jednak bardzo złożony ze względu na występowanie zmiennych w czasie warunków brzegowych (22). Zadanie można sprowadzić do problemu ze stałymi w czasie warunkami brzegowymi, dokonując zamiany współrzędnych za pomocą podstawienia:

$$x = z l(t). \quad (24)$$

Po wykonaniu przekształceń zgodnie z (24) otrzymano równanie:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} \left[\frac{1}{l(t)} \right]^4 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{l(t)} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} \right] \tau + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \rho F \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial y}{\partial z} \frac{1}{l(t)} z \frac{dl}{dt} \right] = q_0 \quad (25)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} y(1, t) &= 0, \\ \frac{\partial y(1, t)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 y(0, t)}{\partial z^3} &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Widoczne jest jednak, że po wykonaniu przekształcenia (24) otrzymano stałe w czasie warunki brzegowe (26). Przekształcone równanie otrzymało jednak złożoną postać praktycznie niemożliwą do rozwiązania przybliżonymi metodami analitycznymi. Konieczne jest więc zastosowanie metody numerycznej. Jej podstawą jest aproksymacja dowolnej funkcji modulacji parametrycznej $f(t)$ (wzór (19)) funkcją odcinkami stałą. Rozwiązanie w tym przypadku można uzyskać drogą łączenia rozwiązań liniowych. Równania ruchu dla poszczególnych odcinków liniowych otrzymano drogą podziału belki na elementy skończone. Sposób podziału na elementy i tworzenia macierzy sztywności, bezwładności i tłumienia opracowano na podstawie monografii J. Szmeltera i zespołu [15].

Przyjęto podział układu na elementy belkowe. Przy tworzeniu macierzy sztywności uwzględniono jedynie naprężenia wywołane momentem gnącym. Pominięto wpływ siły poprzecznej.

W macierzy bezwładności przyjęto współczynniki mas odpowiadające współrzędnym liniowym i momenty bezwładności odpowiadające współrzędnym kątowym. Są to więc założenia nieco ogólniejsze (uwzględnienie momentów bezwładności) niż w równaniu technicznym belki. Pierwszym etapem rozwiązania jest analiza zagadnienia własnego dla poszczególnych odcinków liniowych. Drugim etapem jest określenie rozwiązań dla poszczególnych odcinków liniowych. Etap ten jest wykonywany różnymi metodami w zależności od przyjętych założeń. W przypadku ogólnym korzysta się z numerycznych metod rozwiązywania równań ruchu (konkretnie z metody Rungego-Kutty czwartego rzędu).

Najkorzystniejsza jest sytuacja, gdy można założyć, że układ spełnia warunki rozprężania. W szczególności wymaga to przyjęcia, że macierz tłumienia jest proporcjonalna do macierzy sztywności lub bezwładności, lub też przyjęcia, że postacie drgań są niezależne od tłumienia (metoda modalna — omówiona w monografiach J. Kruszewskiego i zespołu [6]). Tłumienia takie są powszechnie przyjmowane w analizie dynamiki z użyciem MES (np. J. Szmelter [14], J. Langer [7], J. Kruszewski i inni [6]). W tym przypadku układ równań można uprościć wprowadzając współrzędne główne i pomijając równania odpowiadające wyższym częstościom układu. Przy rozprężaniu (wprowadzaniu współrzędnych głównych) równań korzystano z prac E. Kamińskiego [4] i autora [9]. Podstawą do rozprężenia jest analiza zagadnienia własnego dla układu nietłumionego.

Rozwiązania dla poszczególnych odcinków otrzymano w tym przypadku ze znanych zależności. Po otrzymaniu rozwiązania we współrzędnych głównych w końcu danego odcinka liniowego należy dla obliczenia wartości współrzędnych uogólnionych opisujących stan układu wykonać przekształcenie:

$$\mathbf{x}(t_K) = \mathbf{T}_i \boldsymbol{\xi}_i(t_K), \tag{27}$$

gdzie:

\mathbf{X} — macierz kolumnowa współrzędnych uogólnionych

\mathbf{T}_i — macierz wektorów własnych układu w i -tym odcinku liniowym,

t_k — czas zakończenia i -tego odcinka.

Dla rozpoczęcia następnego odcinka należy wykonać przekształcenie:

$$\xi_{i+1}(t_k) = \mathbf{T}_{0_{i+1}} \mathbf{x}(t_k), \quad (28)$$

gdzie:

ξ_{i+1} — macierz kolumnowa współrzędnych głównych układu w kolejnym odcinku liniowym,

$\mathbf{T}_{0_{i+1}}$ — macierz odwrotna do macierzy wektorów własnych układu w kolejnym odcinku liniowym.

Po zakończeniu każdego kolejnego odcinka należy wykonać przekształcenie analogiczne do (27, 28).

Program przygotowano w ten sposób, aby po jednokrotnym rozwiązaniu zagadnienia własnego można było wielokrotnie znajdować rozwiązania dla różnych obciążeń, różnych częstości wzbudzenia parametrycznego i różnych tłumień. Jest to istotne, gdyż czas rozwiązania zadania własnego jest stosunkowo długi. Program jest przystosowany do pracy w trybie konwersacyjnym umożliwiającym bezpośrednio wprowadzenie przez użytkownika różnych zestawów danych. Wyniki mogą być wyprowadzane na drukarkę lub bezpośrednio na rejestrator przygotowujący wykresy rozwiązań.

4. Przykład numeryczny

W pracy przedstawiono rozwiązania dla układu z rys. 2 z danymi liczbowymi:

długość średnia belki (wzór 19) $l_0 = 0,92855$ m,

wymiary przekroju: $b = 0,02$ m; $h = 0,02$ m,

współczynnik zmiany długości (wzór 19): $\mu = 0,0714$, (29)

moduł Younga $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ N/m,

gęstość materiału: $\rho = 7850$ kg/m³.

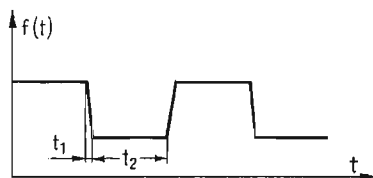
W przykładzie zbadano problem wzbudzenia parametrycznego funkcją nieciągłą, tzn. przyjęto, że po przesunięciu ruchomego zamocowania (rys. 2) z jednego położenia skrajnego w drugie nastąpi zatrzymanie, a następnie rozruch i przesunięcie w drugą stronę. Odpowiada to funkcji $l(t)$ przedstawionej na rys. 3. Jeżeli sterowanie ruchem jest takie, że spełniona jest zależność:

$$t_1 \ll t_2, \quad (30)$$

to funkcję z rys. 3 można przybliżyć funkcją odcinkami stałą złożoną z dwóch odcinków (funkcją prostokątną). Zgodnie z omówioną w poprzednim rozdziale metodą w pierwszej kolejności rozwiązano zagadnienie własne dla układów równań opisujących dwa odcinki liniowe. Wymagało to określenia częstości własnych i współczynników postaci drgań dla belek o długościach:

$$\begin{aligned} l_{max} &= 1 \text{ m,} \\ l_{min} &= 0,8571 \text{ m.} \end{aligned} \quad (31)$$

Obliczenia przeprowadzono metodą Jacobiego, korzystając z programów przedstawionych w książce J. Szmeltera [14]. Przy doborze ilości elementów potrzebnych dla rozwiązania zagadnienia własnego korzystano z wniosków z pracy Z. Dźygadły, J. Błaszczyka [1]. Konkretnie przyjęto podział belki na $n = 7$ elementów. Dokładność oceniono przez porównanie wyników z wartościami obliczonymi na podstawie równania technicznego



Rys. 3

belki. Wynosiła ona ok. 1% dla częstości podstawowej. Dokładność ta może być znacznie zwiększona przez zwiększenie podziału, jednakże dla celów niniejszej pracy była ona zupełnie wystarczająca.

W tabeli 1. przedstawiono pierwsze pięć częstości własnych.

Tabela 1

Lp.	I odcinek	II odcinek
1	103,94	126,61
2	630,66	761,34
3	1702,18	2037,11
4	3196,51	3792,82
5	5045,36	5934,04

Z tablicy widoczne jest, że częstości bardzo szybko wzrastają, wobec czego po rozprzęgnięciu równań można pominąć równania współrzędnych głównych odpowiadające wyższym częstościom. Praktycznie dla uzyskania dobrej dokładności wystarczy uwzględnić dwie pierwsze częstości.

Po rozwiązaniu zagadnienia własnego wyznaczono rozwiązania dla układu nieobciążonego ($P = 0$; $q = 0$; rys. 2). Stwierdzono, że rezonans parametryczny występuje jedynie w określonym zakresie małych tłumień. Analizę rozwiązań układu obciążonego ($P \neq 0$; rys. 2) przeprowadzono w zakresie tłumień, w których nie występował podstawowy rezonans parametryczny (układu nieobciążonego). Stwierdzono, że charakter rozwiązań silnie zależy od przyjętego modelu tłumienia. Przyjęcie modelu Voigta stosowanego w pracy [18] nie jest celowe, gdyż prowadzi to do macierzy tłumienia proporcjonalnej do sztywności. Współczynniki tłumienia rosną wówczas proporcjonalnie wraz z częstościami własnymi, i w układzie wystąpią jedynie rezonansy najniższych częstości. Podobnie niekorzystne jest przyjęcie modelu tłumienia masowego (macierz tłumień proporcjonalna jest do ma-

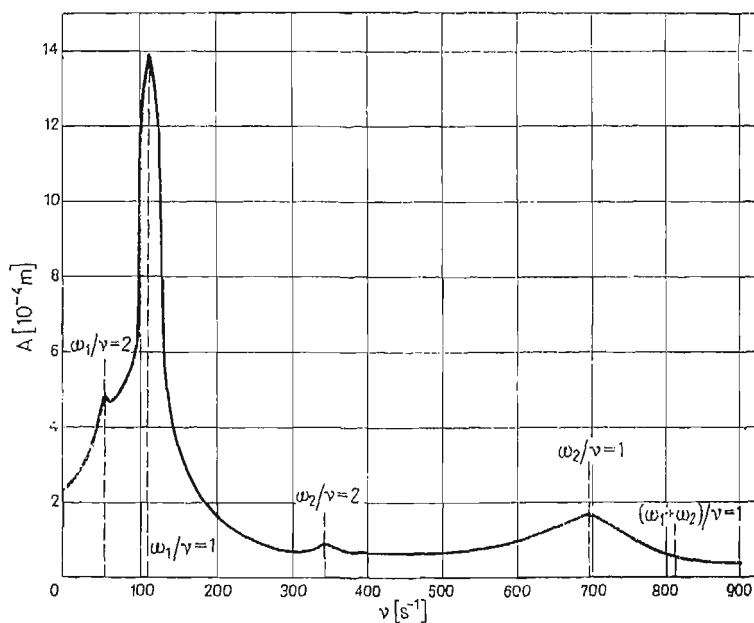
cierzy bezwładności, gdyż prowadzi to do malejących z częstością współczynników tłumienia). Celowe natomiast jest przyjęcie współczynników tłumienia zgodnie z metodą modalną [6], przyjęcie macierzy tłumienia jako sumy składowych proporcjonalnych do macierzy sztywności i bezwładności lub przyjęcie dowolnych tłumień i znajdowanie rozwiązań metodą Rungego-Kutty. Przygotowane w niniejszej pracy programy pozwalają na analizę układów, w których występują wszystkie wyżej wymienione rodzaje tłumienia. Jako przykład przedstawiono analizę rezonansową w układzie z rys. 2 z obciążeniem siłą o wartości:

$$P = 10N \quad (32)$$

w otoczeniu dwóch podstawowych częstości własnych (tab. 1) dla tłumienia będącego sumą składowych proporcjonalnych. Przyjęto, że wymiarowy współczynnik tłumienia jest stały w obu odcinkach liniowych. Wobec tego współczynniki tłumienia bezwymiarowego określone analogicznie do wzoru (14) różniły się w obu układach, gdyż różniły się częstości własne. W obliczonym przykładzie bezwymiarowe współczynniki tłumienia dla dwóch pierwszych podstawowych częstości wynosiły:

$$I \begin{cases} \gamma_1 = 0,09182 \\ \gamma_2 = 0,11189 \end{cases} \quad II \begin{cases} \gamma_1 = 0,11180 \\ \gamma_2 = 0,13507 \end{cases} \quad (33)$$

Otrzymane rozwiązania miały charakter analogiczny do drgań wymuszonych siłą harmonicznie zmienną. Miały one (w odróżnieniu od drgań parametrycznych układu nieobciążonego) skończone amplitudy. Zależność amplitudy od częstości wymuszenia parametrycznego przedstawiono na wykresie rezonansowym na rys. 4.



Rys. 4

Z wykresu widoczne jest, że istotne znaczenie mają jedynie rezonansy główne występujące w otoczeniu stosunków częstości:

$$\frac{\omega_1}{\nu} = 1; \quad \frac{\omega_2}{\nu} = 1. \quad (34)$$

Największe amplitudy występują dla częstości nieznacznie niższych niż określone wzorami (34). Jest to związane z występowaniem w układzie tłumienia, którego wpływ na warunki rezonansu jest identyczny jak dla drgań wymuszonych siłą harmonicznie zmienną.

W otoczeniu wartości:

$$\frac{\omega_1}{\nu} = 0,5; \quad \frac{\omega_2}{\nu} = 0,5 \quad (35)$$

nie stwierdzono występowania wzmocnień rezonansowych. W otoczeniu rezonansów pobocznych:

$$\frac{\omega_1}{\nu} = 2; \quad \frac{\omega_2}{\nu} = 2 \quad (36)$$

stwierdzono występowanie nieznacznych wzmocnień rezonansowych. W otoczeniu rezonansu kombinowanego

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{\nu} = 1, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{\nu} = 2 \quad (37)$$

nie stwierdzono wzmocnień rezonansowych.

Przyczyną niewystępowania w obliczanych wynikach wzmocnień dla rezonansów kombinowanych i bardzo nieznacznych wzmocnień w okolicy rezonansów pobocznych jest fakt występowania w układzie tłumienia, które bardzo silnie wpływa na wygaszanie wymienionych rezonansów. Wykonane dodatkowo obliczenia numeryczne wykazały, że wzmocnienia rezonansowe w okolicy stosunku częstości określonym zgodnie ze wzorem (37) (rezonans kombinowany) występują jedynie dla bardzo małych wartości współczynników tłumienia. Układy, w których występuje tak małe tłumienie, nie mają praktycznego znaczenia, wobec czego nie przeprowadzono dokładnej analizy drgań w takich układach.

Jakościowy charakter wyników otrzymanych w obliczonym przykładzie jest zgodny z wynikami analizy przeprowadzonej w rozdziale 2 z użyciem przybliżonych metod analitycznych. Zakres zastosowania metody numerycznej może być jednak niepomierne większy, w szczególności przy obliczaniu drgań w układach o złożonych kształtach i nietypowych warunkach brzegowych.

5. Wnioski

Stwierdzono, że w układach ciągłych ze wzbudzeniem parametrycznym poddanych stałemu obciążeniu poprzecznemu występuje dodatkowa rodzina drgań parametrycznych. Własności drgań tej rodziny są analogiczne do własności drgań wymuszonych harmonicznie. Drgania są stateczne, a amplitudy mają wartości skończone. Wielkość amplitud występujących w drganiach tej dodatkowej rodziny drgań parametrycznych jest uzależniona zarówno od warunków brzegowych badanego układu, jak i od rodzaju występują-

cego tłumienia. Znaczenie praktyczne dodatkowej rodziny drgań parametrycznych jest związane z tym, że rozwiązania okresowe występują niezależnie od wartości tłumienia. Zwiększenie współczynników tłumienia nie powoduje wyeliminowanych drgań, lecz jedynie ograniczenie ich amplitud. Dla porównania drgania podstawowej rodziny parametrycznej występują jedynie przy stosunkowo małych współczynnikach tłumienia. Przedstawione w niniejszej pracy metody mogą być zastosowane do wyznaczania granicznych współczynników tłumienia, przy których występują drgania parametryczne rodziny podstawowej — ze względu jednak na obszerność zagadnienia będzie ono tematem odrębnej publikacji.

Przedstawione wnioski otrzymano w pracy dla różnych układów drgających (belka obciążona siłą osiową i belka o zmiennej długości) dla różnych wzbudzeń parametrycznych (ciągłe — sinusoidalne, nieciągłe — prostokątne), różnymi metodami (asymptotyczna i numeryczna z podziałem belki na elementy skończone). Matematycznie badane zagadnienie sprowadza się do układu liniowych równań różniczkowych z okresowo zmiennymi współczynnikami. Można więc otrzymane wnioski uogólnić, że mają one znaczenie dla drgań wszelkich układów liniowych ciągłych ze wzbudzeniem parametrycznym. Wydaje się również, że opracowana dla celów niniejszej pracy metoda numeryczna będzie miała niepomniernie większy zakres zastosowań niż stosowana najczęściej do analizy układów ciągłych ze wzbudzeniem parametrycznym przybliżone metody analityczne. W szczególności pozwoliła ona na uwzględnienie różnych modeli tłumienia, obciążenia poprzecznego, wzbudzenia parametrycznego wywołanego funkcją nieciągłą. Wzbudzenie parametryczne funkcją nieciągłą jest przypadkiem często spotykanym — przykładem może tu być przekładnia zębata. Przykład zastosowania metody łączenia odcinkami rozwiązań liniowych do analizy modelu układu napędowego z uwzględnieniem wzbudzeń parametrycznych w przekładniach zębatych, traktowanego jako układ ciągły, można znaleźć w pracy S. M. Wanga, I. E. Morse'a [16]. Przedstawione w pracy programy po odpowiednich modyfikacjach będą mogły być zastosowane do analizy drgań parametrycznych w układach napędowych zawierających przekładnie zębate.

Literatura

1. Z. DŻYGADŁO, J. BŁASZCZYK, *Analiza podłużnych drgań własnych odkształcalnego samolotu metodą elementów skończonych*. Biuletyn WAT 7/1978.
2. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK pod red. ogólną S. Kaliskiego, *Drgania i fale w ciałach stałych*. PWN Warszawa 1966.
3. A. JAKUBOWICZ, Z. ORŁOŚ, *Wytrzymałość materiałów*. WNT Warszawa 1977.
4. E. KAMIŃSKI, *Rozprzęganie układów mechanicznych z członami lepkosprężystymi*. Prace IPPT PAN 46/1970.
5. E. KAMIŃSKI, J. OSIŃSKI, *Drgania parametryczne modelu jednostopniowej przekładni zębatej uwzględniającej tłumienie i stałe obciążenie*. Archiwum Budowy Maszyn 1/1981.
6. J. KRUSZEWSKI i inni, *Metoda sztywnych elementów skończonych*. Arkady Warszawa 1975.
7. J. LANGER, *Wybrane problemy drgań konstrukcji pod obciążeniem ruchomym*. X Jubileuszowe Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”. Poznań—Błażejewko 19 - 22 maja 1982 r.
8. J. OSIŃSKI, *Drgania parametryczne układów z nieliniową charakterystyką sprężystą i stałym obciążeniem*. X Jubileuszowe Sympozjum „Drgania w układach fizycznych” Poznań — Błażejewko 19 - 22 maja 1982.

9. J. OSIŃSKI, *Drgania parametryczne jednostopniowej przekładni zębatej jako układów o dwóch stopniach swobody uwzględniającego tłumienie i stałe obciążenie*. Praca doktorska. Politechnika Warszawska 1978 r.
10. J. OSIŃSKI — *Parametric Vibrations of the systems with nonlinear characteristic and constant loading*. Problemy Dynamiki Maszyn Nr. 1.
11. Z. OSIŃSKI, *Teoria drgań*. PWN Warszawa 1978 r.
12. G. SCHMIDT, *Parametererregte schwingungen*. VEB Deutscher Verlag Berlin 1975.
13. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Zastosowanie parametrycznych równań różniczkowych w mechanice i technice*.
14. Prace IPPT PAN 1/1975 r.
14. J. SZMELTER, *Metody komputerowe w mechanice*. PWN Warszawa 1980 r.
15. J. SZMELTER i inni, *Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji*. Arkady Warszawa 1979 r.
16. S. M. WANG, I. E. MORSE, *Torsional response of a Gear Train System*. Transactions of the ASME. Series B. May 1972.
17. J. ZAJĄCZKOWSKI, J. LIPIŃSKI, *Vibrations of parametrically excited systems*. Journal of Sound and Vibration 1/1979.
18. J. ZAJĄCZKOWSKI, J. LIPIŃSKI, *Instability of the motion of a beam of periodically varying length*. Journal of Sound and Vibration 7/1979 r.
19. J. ZAJĄCZKOWSKI, G. YAMADA, *Further results on instability of the motion of beam of periodically varying length*. Journal of Sound and Vibration 2/1980.
20. J. ZAJĄCZKOWSKI, *An approximate method of analysis of parametric vibration*. Journal of Sound and Vibration, 4/1981.
21. S. ЗЕМБА, *Analiza drgań Cz. II*. PWN Warszawa 1957.

Р е з ю м е

АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКОЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе представлен анализ параметрических колебаний непрерывной системы с постоянной поперечной нагрузкой. Рассмотрено два примера: изгибные колебания балки, вызванные продольной силой, и колебания балки с изменяющейся длиной. В анализе применены асимптотический метод и численный метод с использованием конечных элементов. Найдено, что в системе параметрических колебаний с постоянной поперечной нагрузкой возникает добавочная семья параметрических колебаний со свойствами, аналогичными свойствам гармонически вынужденных колебаний.

S u m m a r y

THE ANALYSIS OF PARAMETRIC VIBRATIONS OF CONTINUOUS SYSTEMS WITH CONSTANT TRANSVERSAL LOADING BY ASYMPTOTIC METHOD AND FINITE ELEMENTS

The analysis of parametric vibration in a system with constant transversal loading is presented. Two examples are considered: flexural beam vibrations generated by axial force, and varying length beam vibrations. The asymptotic method is applied, and numerical method with the use of finite elements. It has been found that an additional class of parametric vibration exists in the system with parametric excitation. Properties these vibrations are similar to those of harmonic force.

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 września 1983 roku