

ANALIZA REOLOGICZNA SIATEK WYKONANYCH Z LIN STALOWYCH*)

BOGDAN HUSIAR

Politechnika Poznańska

ROMUALD ŚWITKA

Politechnika Poznańska

1. Wstęp

Wstępnie napięte siatki ciągnowe, stosowane jako konstrukcje przekryć w budownictwie, są z reguły wykonywane z lin stalowych. Właściwości reologiczne stali, jako tworzywa konstrukcyjnego, nie są zbyt znaczne. Wzrastają one w podwyższonych temperaturach, co jednak raczej nie ma miejsca w przypadku przekryć budowlanych. Wydawałoby się więc, że badanie wpływów reologicznych we wstępnie napiętych siatkach ciągnowych nie ma większego znaczenia. Okazuje się, że wpływy te mogą być na tyle istotne, że uwzględnianie ich przy projektowaniu siatek ciągnowych powinno być brane pod uwagę.

Wiadomo [1], że pełzanie lin jest ok. 20% większe od pełzania pojedynczych drutów. Jest to wynik wewnętrznej struktury liny: odwijanie się splotów, wybieranie luzów i powstawanie poślizgów pomiędzy poszczególnymi drutami lub splotami ma przebieg powolny i długotrwały. Można powiedzieć, że na pełzanie „materiałowe” nakłada się w linach pełzanie „strukturalne”. Te długotrwałe zjawiska pełzania i relaksacji są niepożądane, bowiem przebiegają poza kontrolą konstruktora i na ogół pogarszają parametry konstrukcyjne i eksploatacyjne ustroju. W celu zmniejszenia skutków pełzania stosuje się wstępne naciąganie lin. Norma PN-80/B-03200 „Konstrukcje stalowe, obliczenia statyczne i projektowanie” podaje współczynniki sprężystości podłużnej dla lin stalowych wstępnie naciągniętych siłą równą 40% nominalnej siły zrywającej. Badania nad wpływem wstępnego przeciążenia na pełzanie i relaksację cięgien stosowanych w konstrukcjach sprężonych prowadził M. Kosiorek [2]. Z badań tych wynika, że wpływ wstępnego naciągania jest znaczny: odkształcenia pełzania lin zmniejszają się o 35 ÷ 65% po 1000 h, a relaksacja naprężeń po 1000 h jest mniejsza o 35 ÷ 40%. Zmniejszenie właściwości pełzania i relaksacji dotyczy przede wszystkim początkowego okresu eksploatacji. Po dłuższym czasie właściwości reologiczne lin wstępnie naciąganych i nienaciąganych zbliżają się do siebie. Ograniczony w czasie wpływ wstępnego naciągania potwierdzają badania E. Engeberga i L. Wallina [3].

* Praca została wykonana w ramach P. W. 05.12.

Wpływ zjawisk reologicznych w konstrukcjach ciągnowych znacznie wzrosło w przypadku zastosowania lin stalowo-aluminiowych, lin z rdzeniem niemelatowym (np. konopnym lub z tworzywa sztucznego) oraz lin wykonanych w całości z tworzywa sztucznego.

Niezbyt liczne są w literaturze dane dotyczące parametrów reologicznych lin. Większość badań dotyczy drutów i lin stosowanych do konstrukcji wstępnie sprężonych. Badania lin zastosowanych do budowy przekryć stadionu olimpijskiego w Monachium przeprowadził G. Mayr [4]. Krzywa pełzania podana przez Mayra została wykorzystana w pracy [5] do wyznaczenia parametrów lepkosprężystości liny. Na rynku krajowym bardziej dostępne są liny stosowane do sprężania betonu. Dlatego w niniejszej pracy wykorzystane zostaną głównie wyniki badań J. Kmity [6]. Badania Kmity zostały również wyczerpująco opisane w znanej monografii I. Kisiela [7]. Przyjęto więc, że w zakresie sprężystym można przyporządkować linie stalowej reologiczny model standardowy (model Zenera), dla którego jest: $E_1 = 1880000 \text{ kG/cm}^2$, $E_2 = 120000 \text{ kG/cm}^2$, $\eta = 4249000 \text{ kG dni/cm}^2$ (jednostki podaje się za I. Kisielą [7], w dalszym ciągu będą stosowane jednostki z układu SI).

Ze względu na skąpe dane w literaturze ograniczymy się do analizy wpływów reologicznych w siatkach ciągnowych z lin stalowych, zwracając uwagę, że wyprowadzone tu wnioski będą tym bardziej aktualne dla lin wykonanych z innych tworzyw.

Celem niniejszej publikacji jest zbadanie, w jakim stopniu właściwości reologiczne lin stalowych wpływają na pracę złożonych układów ciągnowych. Podana zostanie metoda numeryczna obliczania ciągnowych konstrukcji lepkosprężystych, bazująca na wynikach pracy [8] i polegająca na uogólnieniu metody elementów skończonych na lepkosprężyste układy ciągnowe. Mając na uwadze studialny charakter niniejszej pracy, zrezygnowano z niektórych uogólnień zawartych w pracy [8] i ograniczono się do najprostszej wersji metody numerycznego całkowania konstytutywnych równań lepkosprężystości, opisanej w cytowanej wyżej pracy. Dzięki temu można było zbudować stosunkowo prosty program na EMC, który pozwolił na wykonanie obliczeń reologicznych dla kilku przykładów wstępnie napiętych siatek ciągnowych wykonanych z lin stalowych.

2. Lepkosprężysty element ciągnowy

Uogólnienie metody elementów skończonych na siatki lepkosprężyste jest możliwe w oparciu o wyprowadzone przez autorów w pracy [8] równanie stanu w ujęciu dyskretnym. Zgodnie z tym równaniem odkształcenie w danej chwili jest określone przez naprężenie w tej chwili oraz przez stan układu w chwili poprzedniej. W pracy [8] przyjęto, że równanie konstytutywne materiału lepkosprężystego ma postać związku różniczkowego

$$a_0 \sigma + a_1 \dot{\sigma} + a_2 \ddot{\sigma} = b_0 \varepsilon + b_1 \dot{\varepsilon} + b_2 \ddot{\varepsilon} \quad (2.1)$$

z pięcioma niezależnymi parametrami (stałymi materiałowymi). Dopuszczono nieciągłości pierwszego rodzaju (skoki) dla funkcji $\sigma(t)$ i jej pochodnej $\dot{\sigma}(t)$ oraz dla funkcji $\varepsilon(t)$ i $\dot{\varepsilon}(t)$. Oś czasu podzielono węzłami (numerowanymi: $\tau = 0, 1, 2, \dots$) na przedziały o długości ϑ_τ , przy czym funkcja $\sigma(t)$ powinna być ciągła wraz z pierwszą pochodną w każdym otwartym przedziale $(t_\tau, t_{\tau+1})$. Dla funkcji $\sigma(t)$ zastosowano w poszczególnym przedziale

aproxymację liniową lub kwadratową. W pracy [8] przeanalizowano błąd obliczeń w zależności od rodzaju aproxymacji i długości kroku oraz przeprowadzono analizy obliczeń dla podstawowych modeli reologicznych (Kelvin-Voigt, Zener, Burgers).

W niniejszej pracy rozważania ograniczymy do modeli trójparametrowych ($a_2 = 0$, $b_2 = 0$) i do aproxymacji liniowej. Dyskretne równanie stanu można w tym przypadku przedstawić w postaci [8]:

$$\varepsilon_\tau = c_{0,\tau} \varepsilon_{\tau-1} + \gamma_\tau \sigma_\tau + (a_0 c_{2,\tau} - \gamma_\tau) \sigma'_{\tau-1} + a_1 c_{3,\tau} \Delta \sigma_{\tau-1}, \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

W równaniu (2.2) ε_τ i σ_τ są odpowiednio odkształceniem i naprężeniem w chwili t_τ (granice lewostronne, znak „prim” oznaczać będzie granicę prawostronną), $\Delta \sigma_\tau$ jest skokiem naprężenia w chwili t_τ

$$\Delta \sigma_\tau = \sigma'_\tau - \sigma_\tau. \quad (2.3)$$

Ponadto

$$\gamma_\tau = \frac{1}{\vartheta_\tau} (a_0 c_{3,\tau} + a_1 c_{2,\tau}), \quad (2.4)$$

$c_{i,\tau}$ są współczynnikami zestawionymi w tabelicy 1 (współczynniki $c_{1,\tau}$ i $c_{4,\tau}$ pominięte w tabeli, nie występują w modelu trójparametrowym).

Tabela 1

L.p.	Przypadek	$c_{0,\tau}$	$c_{2,\tau}$	$c_{3,\tau}$	$c_{5,\tau}$
1	$b_0 = 0, b_1 \neq 0$	1	$\frac{1}{b_1} \vartheta_\tau$	$\frac{1}{2b_1} \vartheta_\tau^2$	$\frac{1}{b_1}$
2	$b_0 \neq 0, b_1 \neq 0$	$\exp(-\alpha \vartheta_\tau)$ $\alpha = b_0/b_1$	$\frac{1}{b_0} (1 - c_{0,\tau})$	$\frac{1}{b_0} \vartheta_\tau - \frac{1}{\alpha} c_{2,\tau}$	$\frac{1}{b_1} c_{0,\tau}$

Jeśli w chwili t_τ zachodzi nieciągłość (skok) funkcji naprężenia $\Delta \sigma_\tau$, to skok odkształcenia $\Delta \varepsilon_\tau$ oblicza się wzorem

$$\Delta \varepsilon_\tau = \gamma_0 \Delta \sigma_\tau, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

w którym

$$\gamma_0 = a_1/b_1. \quad (2.6)$$

W układzie prętowym naprężenia (siły przekrojowe) wyrażają się za pośrednictwem warunków równowagi węzłów przez obciążenia. Związki te w układzie liniowym mają również charakter liniowy i dowolna aproxymacja naprężeń jako funkcji czasu przenosi się na taką samą aproxymację sił obciążających. Przyjmując, że program obciążania konstrukcji jest znaną funkcją czasu, dobieramy krok ϑ_τ w ten sposób, żeby otrzymać wystarczająco dobrą aproxymację tej funkcji. W układzie geometrycznie nieliniowym, jakim jest siatka ciągnowa, aproxymacje przebiegu naprężeń i obciążeń nie będą równoważne. Jednakże badania numeryczne prowadzone przy różnej długości kroku ϑ_τ wskazują, że i w tym przypadku, przynajmniej w odniesieniu do siatek ciągnowych, istotna jest tylko dobra aproxymacja funkcji opisującej program obciążania, i przy spełnieniu tego warunku długość kroku nie ma widocznego wpływu na wyniki.

Przejście od stanu obciążenia $\mathbf{P}_{\tau-1}$ do stanu \mathbf{P}_{τ} przebiega więc zgodnie z przyjętą aproksymacją i uzależnione jest od zmiany konfiguracji układu, która w każdym kroku czasowym jest uaktualniana.

Zadanie nieliniowe (geometrycznie) rozwiązuje się w każdym kroku czasowym metodą iteracyjną Newtona-Raphsona, stosując postępowanie typowe dla metody elementów skończonych. Odcinki cięgien między węzłami traktuje się jako elementy prostoliniowe. Element „e” łączący węzły „i” i „k” w chwili t_{τ} jest rozciągany siłą S_{τ} i ma długość l_{τ} . Pole przekroju pręta jest równe A . Wprowadza się lokalny układ współrzędnych (x_e, y_e, z_e) z początkiem w węźle „i”, którego oś x_e pokrywa się z osią pręta, a oś y_e leży w płaszczyźnie poziomej. W lokalnym układzie współrzędnych wektory przemieszczenia węzłów będą wyróżnione nadkreśleniem:

$$\bar{\mathbf{u}}_{i,\tau} = \text{col}(\bar{u}_{xi,\tau}, \bar{u}_{yi,\tau}, \bar{u}_{zi,\tau}),$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{k,\tau} = \text{col}(\bar{u}_{xk,\tau}, \bar{u}_{yk,\tau}, \bar{u}_{zk,\tau}).$$

Wektory sił węzłowych oznacza się podobnie:

$$\bar{\mathbf{F}}_{i,\tau} = \text{col}(\bar{F}_{xi,\tau}, \bar{F}_{yi,\tau}, \bar{F}_{zi,\tau}),$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{k,\tau} = \text{col}(\bar{F}_{xk,\tau}, \bar{F}_{yk,\tau}, \bar{F}_{zk,\tau}).$$

Biorąc pod uwagę, że $\sigma_{\tau} = S_{\tau}/A$, $\varepsilon_{\tau} = \frac{1}{l_0} (\bar{u}_{xk,\tau} - \bar{u}_{xi,\tau})$, $\bar{F}_{xi,\tau} = -S_{\tau}$, $\bar{F}_{xk,\tau} = S_{\tau}$, otrzymuje się z (2.2) wzory transformacyjne dla sił brzegowych $\bar{F}_{xi,\tau}$ i $\bar{F}_{xk,\tau}$ w postaci:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{xi,\tau} &= \frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} (\bar{u}_{xi,\tau} - \bar{u}_{xk,\tau}) - \frac{Ac_{0,\tau}}{l_0 \gamma_{\tau}} (\bar{u}_{xi,\tau-1} - \bar{u}_{xk,\tau-1}) + \\ &\quad + \left(\frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_{\tau}} - 1 \right) S'_{\tau-1} + \frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_{\tau}} \Delta S_{\tau-1}, \\ \bar{F}_{xk,\tau} &= -\frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} (\bar{u}_{xi,\tau} - \bar{u}_{xk,\tau}) + \frac{Ac_{0,\tau}}{l_0 \gamma_{\tau}} (\bar{u}_{xi,\tau-1} - \bar{u}_{xk,\tau-1}) - \\ &\quad - \left(\frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_{\tau}} - 1 \right) S'_{\tau-1} - \frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_{\tau}} \Delta S_{\tau-1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pozostałe składowe sił węzłowych są zależne tylko od aktualnego położenia odcinka „ik” ciągną w przestrzeni:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{yi,\tau} &= \frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\bar{u}_{yi,\tau} - \bar{u}_{yk,\tau}), \\ \bar{F}_{yk,\tau} &= -\frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\bar{u}_{yi,\tau} - \bar{u}_{yk,\tau}), \\ \bar{F}_{zi,\tau} &= \frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\bar{u}_{zi,\tau} - \bar{u}_{zk,\tau}), \\ \bar{F}_{zk,\tau} &= -\frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\bar{u}_{zi,\tau} - \bar{u}_{zk,\tau}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Równania (2.7÷8) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_{\tau}^e &= \left[\frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} \mathbf{J}_1 + \frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\mathbf{J} - \mathbf{J}_1) \right] \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^e - \frac{A c_{0,\tau}}{l_0 \gamma_{\tau}} \mathbf{J}_1 \bar{\mathbf{u}}_{\tau-1}^e + \\ &+ \left[\frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_{\tau}} \Delta S_{\tau-1} - \left(1 - \frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_{\tau}} \right) S'_{\tau-1} \right] \mathbf{J}_0, \\ \bar{\mathbf{F}}_{\tau}^e &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{i,\tau} \\ \bar{\mathbf{F}}_{k,\tau} \end{bmatrix}^e, \quad \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{i,\tau} \\ \bar{\mathbf{u}}_{k,\tau} \end{bmatrix}^e, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{I}_1 \\ -\mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_0 &= \text{col}(1,0,0, -1,0,0), \quad \mathbf{I} = \text{diag}(1,1,1), \quad \mathbf{I}_1 = \text{diag}(1,0,0).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Po przejściu do globalnego układu współrzędnych otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\tau}^e &= \mathbf{K}_{\tau}^e \mathbf{u}_{\tau}^e - c_{0,\tau} \mathbf{K}_{L,\tau}^e \mathbf{u}_{\tau-1}^e + \\ &+ \left[\frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_{\tau}} \Delta S_{\tau-1} - \left(1 - \frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_{\tau}} \right) S'_{\tau-1} \right] \mathbf{H}_{\tau=1,2,\dots}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Siły węzłowe i przemieszczenia w układzie globalnym zapisuje się bez nadkreślenia. W równaniu (2.10) $\mathbf{K}_{\tau}^e = \mathbf{K}_{L,\tau}^e + \mathbf{K}_{G,\tau}^e$ jest macierzą sztywności elementu, $\mathbf{K}_{L,\tau}^e$ — macierzą sztywności lepkosprężystej, $\mathbf{K}_{G,\tau}^e$ — macierzą sztywności geometrycznej:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{L,\tau}^e &= \frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & -\mathbf{T} \\ -\mathbf{T} & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{G,\tau}^e = \frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{T} & \mathbf{T} - \mathbf{I} \\ \mathbf{T} - \mathbf{I} & \mathbf{I} - \mathbf{T} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} n_x n_x & n_x n_y & n_x n_z \\ & n_y n_y & n_y n_z \\ \text{sym.} & & n_z n_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \text{col}(\mathbf{H}_1, -\mathbf{H}_1), \quad \mathbf{H}_1 = \text{col}(n_x, n_y, n_z),\end{aligned}$$

n_x, n_y, n_z są współrzędnymi wektora \mathbf{n}^e w globalnym układzie współrzędnych (x, y, z). Wektor \mathbf{n}^e jest wektorem jednostkowym, kolinearnym z osią x_e , skierowanym od węzła „i” do węzła „k”. Równanie (2.10) jest równaniem lepkosprężystego elementu ciągnowego w globalnym układzie współrzędnych zapisanym dla chwili t_{τ} .

W każdej chwili t_{τ} musi być spełnione równanie równowagi

$$\sum_e \mathbf{F}_{i,\tau}^e - \mathbf{P}_{i,\tau} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,\tag{2.11}$$

w którym $\mathbf{P}_{i,\tau} = \text{col}(P_{xi,\tau}, P_{yi,\tau}, P_{zi,\tau})$ jest wektorem siły zewnętrznej działającej na węzeł „i” w chwili t_{τ} , a sumowanie \sum_e obejmuje wszystkie elementy zbiegające się w węzle „i”.

Uwzględniając w (2.11), że

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{i,\tau}^e &= \left[\frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} \mathbf{T} + \frac{S_{\tau}}{l_{\tau}} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \right] (\mathbf{u}_{i,\tau}^e - \mathbf{u}_{k,\tau}^e) - c_{0,\tau} \frac{A}{l_0 \gamma_{\tau}} \mathbf{T} (\mathbf{u}_{i,\tau-1}^e - \mathbf{u}_{k,\tau-1}^e) + \\ &+ \left[\frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_{\tau}} \Delta S_{\tau-1} - \left(1 - \frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_{\tau}} \right) S'_{\tau-1} \right] \mathbf{H}_1,\end{aligned}\tag{2.12}$$

oraz warunek zgodności przemieszczeń $u_{i,\tau}^e = u_{i,\tau}$ dla wszystkich elementów „e” zbiegających się w węzle „i”, otrzymuje się ogólnie znaną regułę agregacji macierzy globalnej. Macierz \mathbf{T} jest odnoszona w każdym kroku czasowym i w każdym kroku iteracyjnym do konfiguracji aktualnej.

Równanie macierzowo-rekurencyjne siatki lepko-sprężystej można zapisać w postaci

$$\mathbf{K}_\tau \mathbf{u}_\tau = \mathbf{P}_\tau + c_{0,\tau} \mathbf{K}_{L,\tau} \mathbf{u}_{\tau-1} - \mathbf{Q}_{\tau-1}, \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

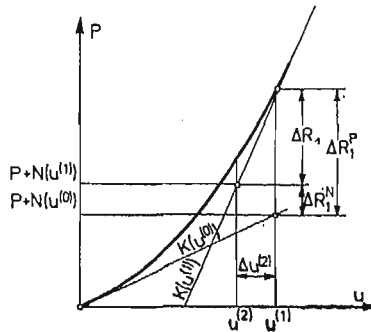
Stan układu z chwili poprzedniej $t_{\tau-1}$ został doliczony do wektora obciążeń. Macierz $\mathbf{Q}_{\tau-1}$ buduje się następująco:

$$\mathbf{Q}_{\tau-1} = \begin{bmatrix} \sum_e [\dots]^e \mathbf{H}_1^e & \text{dla wężła "1"} \\ \dots & \dots \\ \sum_e [\dots]^e \mathbf{H}_1^e & \text{dla wężła "i"} \\ \dots & \dots \\ \sum_e [\dots]^e \mathbf{H}_1^e & \text{dla wężła "n"} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$[\dots]^e = \left[\frac{a_1 c_{5,\tau}}{\gamma_\tau} \Delta S_{\tau-1} - \left(1 - \frac{a_0 c_{2,\tau}}{\gamma_\tau} \right) S'_{\tau-1} \right]^e,$$

Macierz \mathbf{K}_τ jest styczną macierzą sztywności przyporządkowaną aktualnej konfiguracji określonej przez nieznaną wektor \mathbf{u}_τ . Równanie (2.13) należy więc rozumieć jako schemat wyjściowy do zastosowania iteracyjnej metody Newtona-Raphsona. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że człon obciążeniowy jest zależny od aktualnej konfiguracji (układ jest niezachowawczy), wobec czego metoda Newtona-Raphsona wymaga pewnej modyfikacji. Zmodyfikowany tok postępowania iteracyjnego ilustruje rys. 1. Jeżeli dla większej zwięzłości wywodu równanie (2.13) zapisane zostanie w postaci

$$K(u) \cdot u = P + N(u),$$



Rys. 1

a dla ułatwienia graficznej interpretacji ograniczymy układ do jednego stopnia swobody, to tok zmodyfikowanego postępowania iteracyjnego można przedstawić następująco:

Biorąc wartość wyjściową przemieszczenia $u^{(0)}$ budujemy równanie $K(u^{(0)}) \cdot u^{(1)} = P + N(u^{(0)})$, z którego obliczamy $u^{(1)}$, a następnie $N(u^{(1)})$, $S^{(1)}$ oraz niezrównoważoną siłę $\Delta R_1^P = P - S^{(1)}$. Jednocześnie korygujemy poziom obciążenia o wartość $\Delta R_1^N = N(u^{(1)}) - N(u^{(0)})$. Obliczeniowa siła niezrównoważona jest więc równa $\Delta R_1 = \Delta R_1^P + \Delta R_1^N$ (na rysunku 1 uwzględniono, że na ogół będzie $\Delta R_1^P < 0$ i $\Delta R_1^N > 0$). W drugim kroku

iteracyjnym rozwiązuje się równanie $K(u^{(1)}) \cdot \Delta u^{(2)} = \Delta R_1$, skąd: $\Delta u^{(2)}$, $u^{(2)} = u^{(1)} + \Delta u^{(2)}$, $N(u^{(2)})$ i $S^{(2)}$ oraz

$$\Delta R_2^P = P - S^{(2)}, \quad \Delta R_2^N = N(u^{(2)}) - N(u^{(1)}), \quad \Delta R_2 = \Delta R_2^P + \Delta R_2^N.$$

W trzecim kroku iteracyjnym rozwiązuje się równanie $K(u^{(2)}) \cdot \Delta u^{(3)} = \Delta R_2$, skąd oblicza się $\Delta u^{(3)}$, ... itd.

Jeśli w węźle „ τ ” na osi czasu pojawia się nieciągłość (skok) funkcji $P_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), to skokowi $\Delta P_{i,\tau}$ może towarzyszyć skok $\Delta u_{i,\tau}$. Będzie to zachodzić, jeśli $a_1 \neq 0$ i $b_1 \neq 0$. W takim przypadku rozwiązuje się dodatkowo równanie

$$K_0 \Delta u_\tau = \Delta P_\tau, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

będące w istocie zwykłym równaniem statyki siatki sprężystej, w którym do macierzy sztywności wprowadza się $E = 1/\gamma_0$.

Warunek początkowy realizuje się przez wprowadzenie stanu wyjściowego („zerowego”). Stan „zerowy”, to znaczy stan dla $t = 0 - \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, uzyskuje się za pomocą równania statyki dla siatki sprężystej

$$K u_0 = P_0. \quad (2.16)$$

Stan „zerowy” będzie na ogół stanem wywołanym tylko wstępnym napięciem i ciężarem własnym siatki. Równania (2.15) i (2.16) stanowią schematy wyjściowe do procesu iteracyjnego Newtona-Raphsona.

3. Program na EMC, przykłady obliczeń i analizy

W oparciu o podane w ust. 2 równania opracowany został program na EMC MERA 400 w języku FORTRAN¹. Program wykorzystuje wyłącznie pamięć wewnętrzną, co ogranicza wielkość rozwiązywanego zadania do układu złożonego z nie więcej niż 35 cięgien lub mającego co najwyżej 60 stopni swobody. Taki rozmiar zadań jest wystarczający na etapie studialnym, mającym rozpoznać wpływ zjawisk reologicznych na pracę realnych siatek ciągnowych. Możliwość programu zwiększa łatwe przejście na EMC serii ODRA 1300.

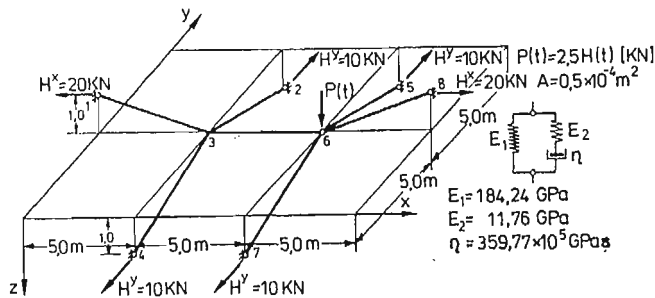
Dla każdej chwili t_τ przemieszczenia węzłów konstrukcji wyznacza się iteracyjnie, wykorzystując metodę Newtona-Raphsona. Procedury tworzenia macierzy sztywności i rozwiązywania układów równań zaczerpnięto z wcześniej opracowanego programu obliczeń statycznych STAC-AM10².

Przykład 1

Przeprowadzono analizę zachowania się w czasie siatki pokazanej na rysunku 2. Siatka jest obciążona w węźle 6 siłą $P = 2,5$ kN nagle przyłożoną w chwili $t = 0$ i następnie stałą w czasie. Wstępny naciąg i wstępna konfiguracja opisane są na rysunku. Siatka zbudowana jest z lin stalowych o przekroju $A = 0,5 \cdot 10^{-4}$ m². W odniesieniu do parametrów reologicznych liny oparto się na danych zawartych w monografii I. Kisiela [7] i odnoszących

¹ Program napisał Marek Ratajczak.

² Program STAC-AM10 był przedstawiony w publikacji: J. Pulikowski, J. Rakowski, R. Świtka, Algorytm obliczeń statycznych konstrukcji ciągnowych, IV Konf. Nauk. nt. Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, Koszalin 1979.



Rys. 2

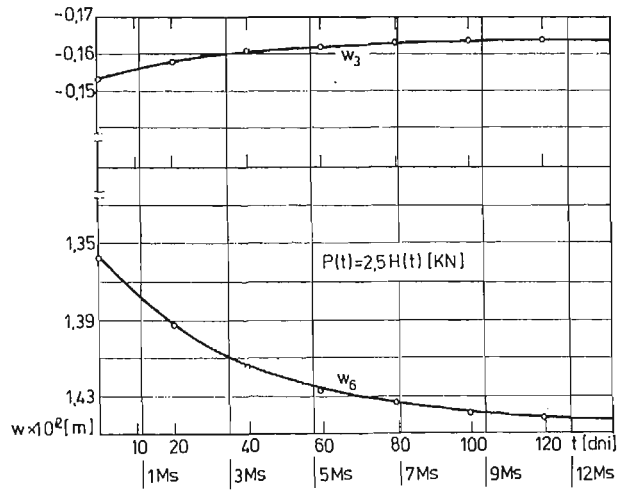
się do badań J. Kmity [6] nad liniami stalowymi stosowanymi do sprężania betonu. Przyjęto model standardowy Zenera z parametrami: $E_1 = 184\,240$ MPa, $E_2 = 11\,760$ MPa, $\eta = 3,5977 \cdot 10^{10}$ MPa \cdot s. Obliczenia wykonano w przedziale czasu (0,360 dni), czyli (0,31104 Ks) ze stałym krokiem $\vartheta_\tau = \vartheta = 5$ dni = 0,432 Ms.

Wyniki obliczeń zawarte są w tabelicy 2 oraz na rysunkach 3 i 4. Obliczenia reologiczne starano się porównać z wynikami dla modelu sprężystego siatki. Przy takich porównaniach

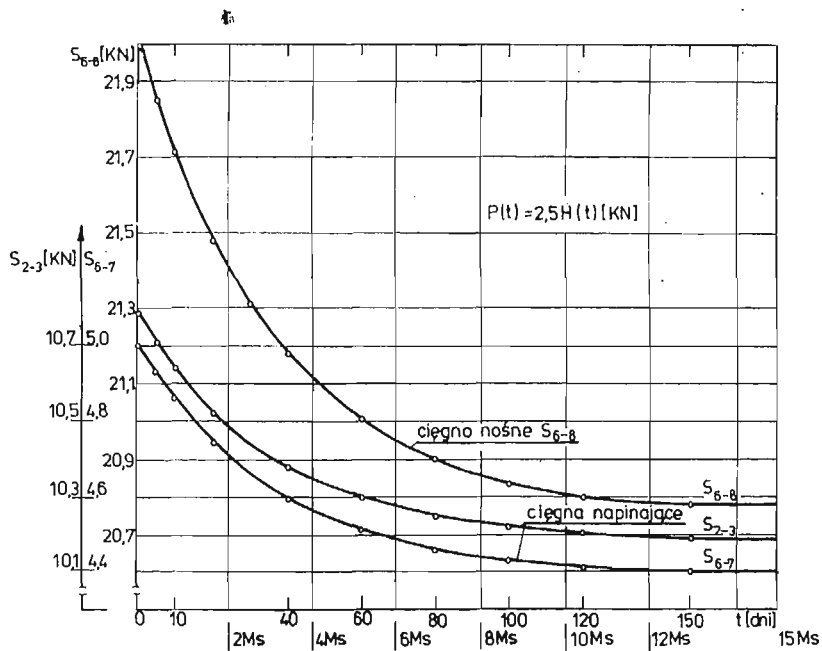
Tabela 2

		Ugięcie w $\times 10^2$ [m]		Siły wciągach [kN]		
		Węzeł nr 3	Węzeł nr 6	S_{6-8}	S_{2-3}	S_{6-7}
Wstępne sprężenie	$t = 0^-$	0,0	0,0	20,3961	10,1980	10,1980
	$t = 0^+$	-0,1544	1,3565	21,9981	10,7932	5,0113
Model lepko-sprężysty	$t = 30$ dni	-0,1599	1,4045	21,2889	10,4431	4,6591
	$t = 60$ dni	-0,1624	1,4262	20,9901	10,2935	4,5090
	$t = 150$ dni	-0,1642	1,4424	20,7846	10,1904	4,4059
	$t = 360$ dni	-0,1643	1,4440	20,7674	10,1818	4,3974
	Model sprężysty	$E = 145$ GPa	-0,1877 ($\Delta = 12,5\%$)	1,8133 ($\Delta = 20,4\%$)	22,0066 ($\Delta = 5,6\%$)	10,7263 ($\Delta = 5,1\%$)
$E = 175$ GPa		-0,1696 ($\Delta = 3,1\%$)	1,4603 ($\Delta = 1,1\%$)	22,0086 ($\Delta = 5,6\%$)	10,7628 ($\Delta = 5,4\%$)	5,0675 ($\Delta = 13,2\%$)

natrafia się na trudność w doborze modułu sprężystości liny. Autorzy odwołują się tu do obowiązujących w projektowaniu polskich norm. Według PN-80/B-03200 „Konstrukcje stalowe, obliczenia statyczne i projektowanie” dla lin z rdzeniem stalowym o profilu otwartym należy przyjmować $E = 145$ GPa. Natomiast norma PN-76/B-03264 „Konstrukcje



Rys. 3



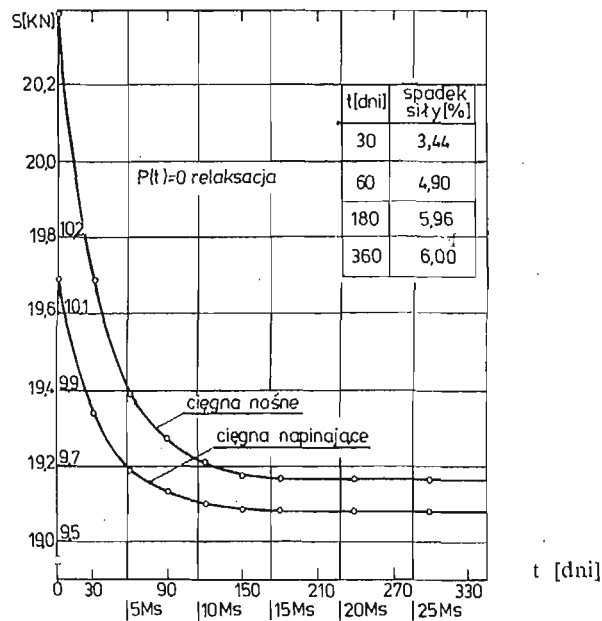
Rys. 4

betonowe, żelbetowe i sprężone, obliczenia statyczne i projektowanie” zaleca przyjmować dla lin stosowanych do sprężania betonu $E = 175$ GPa. Z uwagi na znaczną rozpiętość zalecanych przez normy wielkości, obliczenia porównawcze wykonano dla $E = 145$ GPa i dla $E = 175$ GPa. Dla obu przypadków różnica między modelem lepkosprężystym a sprężystym jest dość istotna: w ugięciach przekracza odpowiednio 20% i 3%, w siłach — 14% i 13%.

Przykład 2

Dla siatki z przykładu 1 analizowano relaksację wstępnego napięcia ($P(t) = 0$). Przebieg relaksacji ilustruje rys. 5. Można stwierdzić, że stabilizacja procesu relaksacji następuje po upływie 12÷15 Ms. Spadek wielkości sił po upływie 360 dni wyniósł 6%.

W przykładzie powyższym badano również wpływ długości kroku ϑ na wyniki (tablica 3). Długość kroku w tym przypadku, praktycznie rzecz biorąc, nie ma znaczenia. Zgodność należy tłumaczyć niewielkim udziałem czynnika lepkiego w badanym układzie lepko-sprężystym.



Rys. 5

Tablica 3

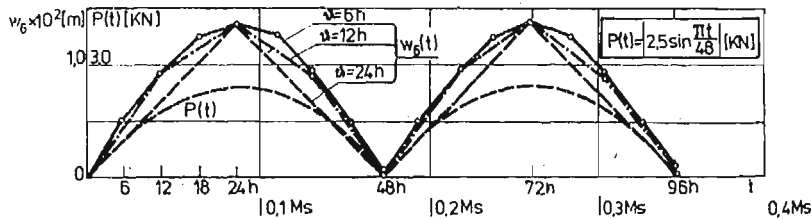
t [h]	Relaksacja w cięgnie 6—8, S_{6-8} [KN]				
	$\vartheta = 6h$	$\vartheta = 24h$	$\vartheta = 120h$	$\vartheta = 240h$	$\vartheta = 720h$
0	20,3961	20,3961	20,3961	20,3961	20,3961
120	20,2348	20,2350	20,2350	—	—
240	20,0948	20,0950	20,0950	20,0950	—
720	19,6964	19,6969	19,6969	19,6968	19,6953
960	19,5672	19,5679	19,5678	19,5677	—
1440	19,3964	19,3972	19,3971	19,3970	19,3958
2160	19,2679	19,2687	19,2687	19,2686	19,2678
3600	19,1891	19,1900	19,1899	19,1900	19,1898

Przykład 3

W dalszym ciągu badano wpływ długości kroku na wyniki w przypadku siły zmieniającej się według wzoru:

$$P(t) = \left| 2,5 \sin \frac{\pi t}{48} \right| [kN].$$

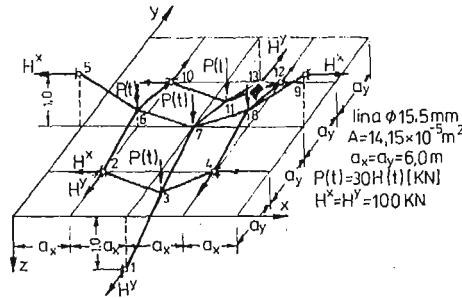
Przebieg w czasie obciążenia i przemieszczeń ilustruje wykres na rys. 6. Wyniki w analizowanym przedziale czasu (niewielkim, bo wynoszącym tylko 96 h) nie są obarczone zbyt dużym błędem nawet dla ϑ równego 1/2 okresu obciążenia. Oczywiście długość kroku większa od 1/2 okresu siły, przy stosowanej aproksymacji liniowej, będzie dawać wyniki rozbieżne w czasie.



Rys. 6

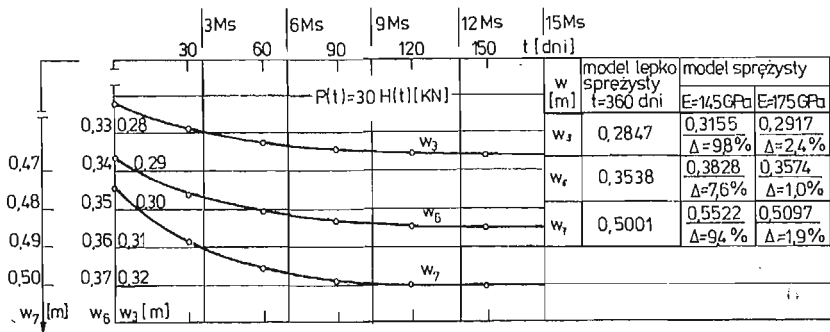
Przykład 4

Wykonano obliczenia wstępnie napiętej siatki przedstawionej na rysunku 7. Siatka jest wykonana z lin stalowych $\varnothing 15,5$ mm ($A = 14,15 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$) i każdy jej węzeł (swobodny) jest obciążony siłą pionową $P = 30$ kN, przyłożoną nagle w chwili $t = 0$. Parametry

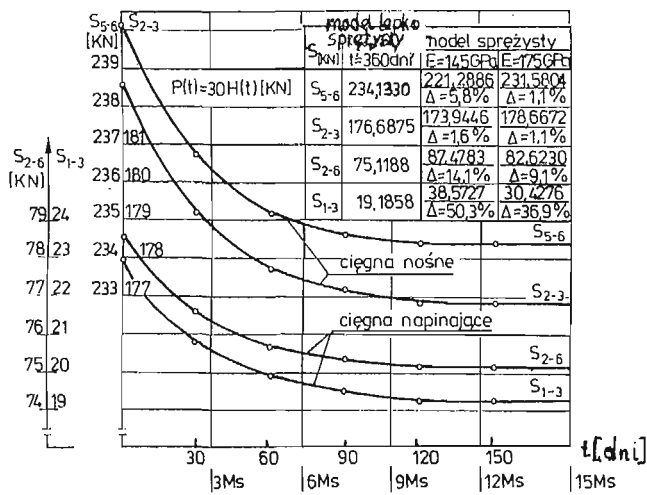


Rys. 7

lepkosprężystości przyjęto jak w przykładzie 1. Konfigurację początkową (dla $t = 0 - \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$) i końcową (dla $t = 360$ dni) zestawiono w tabelicy 4. Przebieg składowych pionowych przemieszczeń węzłów („ugięć”) w czasie przedstawia rys. 8, przebieg sił — rys. 9. Na dołączonej do rysunku tabelicy zestawiono wyniki dla modelu lepkosprężystego i dla modelu sprężystego. Różnice, jak widać, są w tym przypadku bardzo duże.



Rys. 8



Rys. 9

Tablica 4

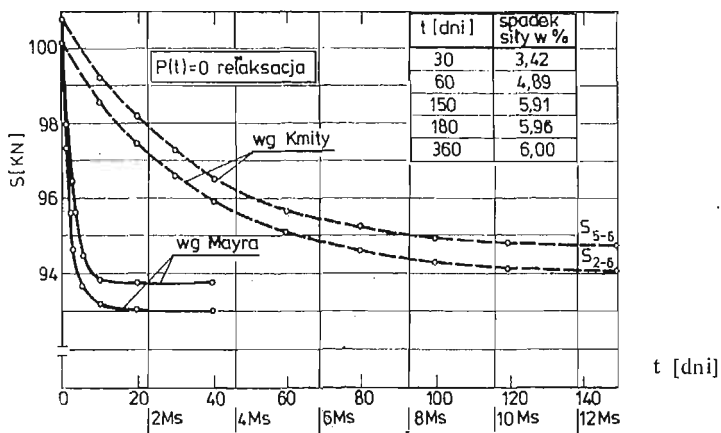
Numer węzła	Konfiguracja siatki [m]								
	Początkowa $t = 0^-$			Model sprężysty					
	Model lepko sprężysty $t = 360$ dni			$E = 145$ GPa			$E = 175$ GPa		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
3	$\frac{12,0}{12,0}$	$\frac{6,0}{6,0116}$	$\frac{0,25}{0,5347}$	12,0	6,0126	0,5655 ($\Delta = 5,4\%$)	12,0	6,0118	0,5417 ($\Delta = 1,3\%$)
6	$\frac{6,0}{5,9772}$	$\frac{12,0}{12,0}$	$\frac{-0,25}{0,1038}$	5,9757	12,0	0,1328 ($\Delta = 21,8\%$)	5,9771	12,0	0,1074 ($\Delta = 3,4\%$)
7	$\frac{12,0}{12,0}$	$\frac{12,0}{12,0}$	$\frac{0,0}{0,5001}$	12,0	12,0	0,5522 ($\Delta = 9,4\%$)	12,0	12,0	0,5097 ($\Delta = 1,9\%$)

Przykład 5

Dla liny o geometrii i obciążeniu jak w przykładzie 4 wykonano obliczenia relaksacji wstępnego napięcia dla dwóch wariantów parametrów lepkosprężystych.

Wariant pierwszy odnosi się do danych z przykładu 1 (wg badań Kmity), natomiast w wariantcie drugim przyjęto parametry wyznaczone w pracy [5] w oparciu o badania G. Mayra [4]. Krzywe relaksacji pokazuje rysunek 10 (linia przerywana — wariant pierwszy, linia ciągła — wariant drugi).

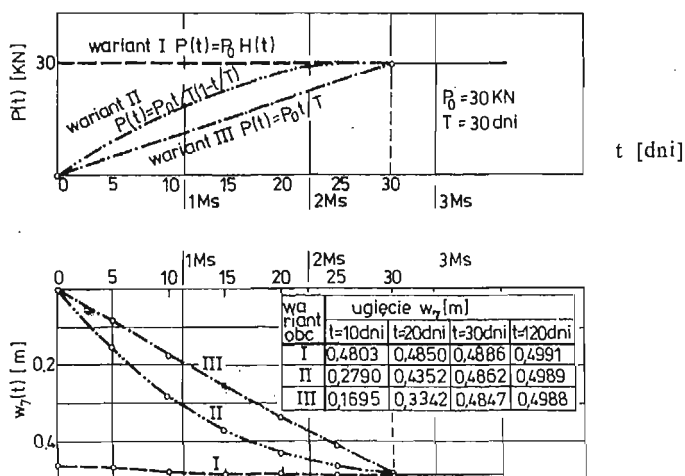
Relaksacja liny badanej przez G. Mayra, jakkolwiek znaczna (spadek siły przekracza 6,8% po 2 Ms) jest wybitnie krótkotrwała. Jest to niewątpliwie wynikiem właściwej technologii.



Rys. 10

Przykład 6

Na zakończenie zbadano wpływ początkowej historii obciążenia na zachowanie się układu. Siatkę cięgnową z przykładu 4 poddano trzem wariantom przebiegu obciążenia:



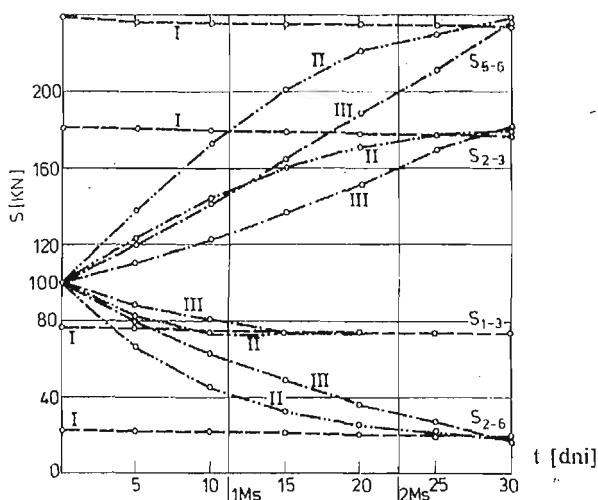
Rys. 11

— wariant I: $P(t) = P_0 H(t)$;

— wariant II: $P(t) = \begin{cases} P_0 \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right), & 0 \leq t \leq T, \\ P_0, & t \geq T, \end{cases}$

— wariant III: $P(t) = \begin{cases} P_0 \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ P_0, & t \geq T, \end{cases}$

Czas obciążenia konstrukcji T przyjęto równy 30 dniom. Wyniki zestawiono na rysunkach 11 i 12 oraz w tabeli 5. Wpływ sposobu obciążania konstrukcji istotny w trakcie trwania obciążania, okazuje się mało istotny już w chwili zakończenia obciążania i zupełnie nieistotny dla czasu przekraczającego znacznie czas obciążania.



Rys. 12

Tablica 5

Cięgno	Wariant obciążenia	Siła w ciągu [kN]			
		t = 10 dni	t = 20 dni	t = 30 dni	t = 120 dni
Nośne S_{5-6}	I	238,6904	237,5867	236,7536	234,3565
	II	174,7402	222,4009	237,3135	234,4040
	III	142,7650	190,1778	237,6478	234,4323
Napinające S_{2-6}	I	22,0682	21,3448	20,8034	19,3067
	II	46,6523	25,9568	20,4790	19,2796
	III	64,5446	38,1216	20,2634	19,2616

4. Wnioski

Opisana w pracy metoda okazuje się efektywnym narzędziem obliczania wstępnie napiętych siatek ciągnowych o właściwościach lepkosprężystych. Podstawową zaletą metody jest jej mała czułość na długość kroku. W wielu przypadkach krok może być bardzo długi, co jest niezwykle ważne przy badaniu skutków długotrwałych obciążeń.

Właściwości reologiczne lin stalowych, na pozór nieznaczące, mogą mieć istotne znaczenie dla pracy konstrukcji ciągnowych. Wpływ pełzania na zmiany w aktualnej konfiguracji siatki jest rzędu kilku procent, w pewnych przypadkach może przekraczać 20%. Wpływ ten na zmiany sił w ciągnach jest poważniejszy i może się wahać od kilku do ponad 50%.

Relaksacja wstępnego napięcia (dla siatki nieobciążonej) powoduje spadki sił o ok. 6%. Warto zwrócić uwagę na niebezpieczeństwo spadku sił w ciągnach napinających; nie można wykluczyć wyłączenia się ciągów na skutek rozwoju procesów reologicznych.

Z przeprowadzonych badań można więc wyciągnąć wniosek generalny, że zjawiska reologiczne w sposób istotny wpływają na pracę wstępnie napiętych siatek ciągnowych wykonanych z lin stalowych i powinny być uwzględniane przy ich projektowaniu. Wynika stąd potrzeba opracowania dalszych, bardziej doskonałych i bardziej efektywnych metod i programów obliczeń siatek lepkosprężystych, oraz potrzeba prowadzenia bardziej systematycznych badań nad właściwościami reologicznymi lin.

Literatura

1. J. HAJDUK, J. OSIECKI, *Ustroje ciągnowe, teoria i obliczanie*, Wyd. Nauk.-Techn., Warszawa 1970.
2. M. KOSIOREK, *Właściwości reologiczne stali do konstrukcji sprężonych*, Inżynieria i Budownictwo 1, 1975.
3. E. ENGBERG, L. WALLIN, *Kryprelaxation sprovmed höghallfast förspannigtråd under lång tid*, Nordisk Betong 3, 1966.
4. G. MAYR, *Untersuchungen an verschlossenen Spiralseilen, Weitgespannte Fläche tragwerke*, Werner-Verlag, Düsseldorf, 1973.
5. A. BORUSZAK, B. HUSIAR, R. ŚWITKA, *O wyznaczeniu parametrów lepkosprężystości lin stalowych*, III Konf. Nauk. WBL PP, Prace Instytutu Technologii i Konstrukcji Budowlanych, Poznań 1980.
6. J. КМИТА, *Z badań nad relaksacją lin stosowanych w kablobetonie*, II Sympozjon PTMTS poświęcony reologii, Wrocław 1964.
7. I. KISIEL, *Reologia w budownictwie*, „Arkady”, Warszawa 1967.
8. R. ŚWITKA, B. HUSIAR, *Dyskretna analiza modeli reologicznych*, Mechanika Teoret. i Stosowana 22, 1/2, 1984

Резюме

РЕОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЕТОК, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ СТАЛЬНЫХ КАНАТОВ

В настоящей работе обсуждается численный метод расчёта вязкоупругих сеток. Этот метод может быть использован при весьма длинном шаге, что представляет большой интерес при исследовании продолжительных реологических процессов. Анализ различных расчётов предварительно напряжённых тяговых сеток, изготовленных из стальных канатов показываем, что ползучесть и релаксация имеют существенное влияние на актуальную конфигурацию сетки, также на величину и соотношение сил.

S u m m a r y

REOLOGICAL ANALYSIS OF NET STRUCTURES MADE OF STEEL CABLES

The numerical method of calculating viscoelastic nets is presented. The method can be applied for a long step of time which is important in the study of long reological processes. The analysis of stressed net structures made of steel cables indicates, that the creep and relaxation are important for a actual configuration of net and for the size and force distribution.

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 kwietnia 1983 roku
