

JEDNOWYMIAROWY CIĄGŁY MODEL STATECZNOŚCI SPRĘŻYSTEJ PŁASKIEGO DŹWIGARA SIATKOWEGO

ROMAN NAGÓRSKI

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

Przedmiotem pracy są równania i przykłady rozwiązania problemu stateczności w zakresie sprężystym płaskiego dźwigara siatkowego o gęstej, regularnej i ortogonalnej siatce prętów przyzmatycznych.

Celem tej rozprawy jest podanie przykładowej realizacji zaproponowanej w pracy [1] koncepcji budowy równań ciągłego, liniowego modelu jednowymiarowego stateczności dźwigarów siatkowych ukształtowanych na powierzchniach w postaci jednoparametrowej rodziny konturów. Do sformułowania wymienionych wyżej równań wykorzystano w [1] metody mechaniki kontinuum z więzami wewnętrznymi [2] i równania ciągłego dwuwymiarowego modelu rozpatrywanych dźwigarów [3].

Rozważymy płaski ustrój w kształcie prostokąta (siatkowy płaskownik), dla którego po przyjęciu określonych hipotez geometrycznych i statycznych (analogicznych jak w teorii prętów pełnościennych) wyprowadzimy równania stateczności w sensie Eulera. Podamy przykłady rozwiązania dla konstrukcji w kształcie wspornika, utwierdzonego wzdłuż jednej krawędzi i obciążonego osiowo wzdłuż krawędzi przeciwległej, przyjmując pręty o przekroju prostokątnym i stałe charakterystyki geometryczno-fizyczne w obszarze dźwigara.

Szczegółowe założenia, dotyczące przyjętego modelu stateczności, podano w pracy [1].

2. Równania stateczności teorii dwuwymiarowej z więzami wewnętrznymi

Rozważymy w przestrzeni $Ox^1x^2x^3$ obszar prostokątny na płaszczyźnie $(x^1, x^2) = (x, y)$, będącej płaszczyzną podstawową dźwigara w stanie nieodkształconym i nienaprężonym, przyjmując (rys. 1)

$$x^1 = x \in (0, L), \quad x^2 = y \in \left(-\frac{\tilde{L}}{2}, \frac{\tilde{L}}{2}\right). \quad (2.1)$$

Wykorzystamy następujące liniowe równania podstawowego stanu odkształconego [1]:
— równania równowagi

$$\begin{aligned}
 p_{,x}^{11} + p_{,y}^{21} + r^1 + q^1 &= 0, & p_{,x}^{12} + p_{,x}^{22} + r^2 + q^2 &= 0 \\
 p_{,x}^{11} + p_{,y}^{21} + r + q &= 0, & m_{,x}^{11} + m_{,y}^{21} + p^2 + s^1 + h^1 &= 0 \\
 m_{,x}^{12} + m_{,y}^{22} - p^1 + s^2 + h^2 &= 0, & m_{,x}^{11} + m_{,y}^{21} + p^{12} - p^{21} + s + h &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

— statyczne warunki brzegowe
dla $x = 0$

$$\begin{aligned}
 -p^{11} &= 'p^1 + \tau^1, & -p^{12} &= 'p^2 + \tau^2, & -p^1 &= 'p + \tau, \\
 -m^{11} &= 'm^1 + \mu^1, & -m^{12} &= 'm^2 + \mu^2, & -m^1 &= 'm + \mu,
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

dla $x = L$

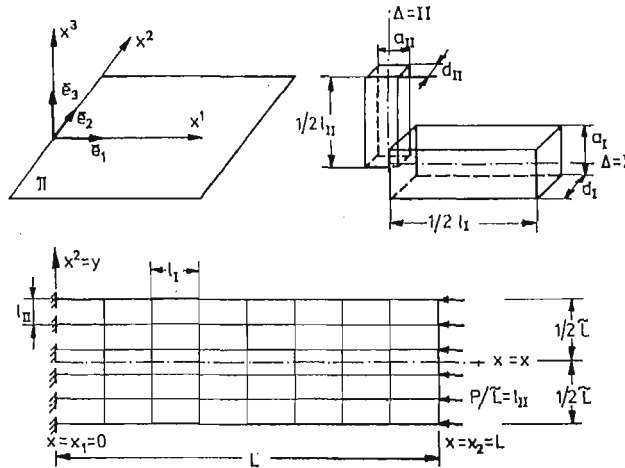
$$\begin{aligned}
 p^{11} &= 'p^1 + \tau^1, & p^{12} &= 'p^2 + \tau^2, & p^1 &= 'p + \tau, \\
 m^{11} &= 'm^1 + \mu^1, & m^{12} &= 'm^2 + \mu^2, & m^1 &= 'm + \mu,
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

dla $y = -\frac{1}{2}\tilde{L}$

$$\begin{aligned}
 -p^{21} &= 'p^1 + \tau^1, & -p^{22} &= 'p^2 + \tau^2, & -p^2 &= 'p + \tau, \\
 -m^{21} &= 'm^1 + \mu^1, & -m^{22} &= 'm^2 + \mu^2, & -m^2 &= 'm + \mu,
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

dla $y = \frac{1}{2}\tilde{L}$

$$\begin{aligned}
 p^{21} &= 'p^1 + \tau^1, & p^{22} &= 'p^2 + \tau^2, & p^2 &= 'p + \tau, \\
 m^{21} &= 'm^1 + \mu^1, & m^{22} &= 'm^2 + \mu^2, & m^2 &= 'm + \mu,
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$



Rys. 1

gdzie $p^{\alpha\beta}$, p^α i $m^{\alpha\beta}$, m^α — oznaczają składowe stanu napięcia typu sił i momentów, q^α , q , h^α , h i $'p^\alpha$, $'p$, $'m^\alpha$, $'m$ — składowe stanu obciążenia zewnętrznego powierzchniowego i brzegowego, r^α , r , s^α , s i τ^α , τ , μ^α , μ — reakcje powierzchniowe i brzegowe więzów wewnętrznych (w bazie \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3) — α , $\beta = 1, 2$, rys. 1),

— związki geometryczne

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11}^* &= v_{1,x}, & \gamma_{12}^* &= v_{2,x} - \vartheta, & \gamma_{21}^* &= v_{1,y} + \vartheta, & \gamma_{22}^* &= v_{2,y}, \\
 \gamma_1^* &= v_{,x} + \vartheta_2, & \gamma_2^* &= v_{,y} - \vartheta_1, & \kappa_1^* &= \vartheta_{,x}, & \kappa_2^* &= \vartheta_{,y}, \\
 \kappa_{11}^* &= \vartheta_{1,x}, & \kappa_{12}^* &= \vartheta_{2,x}, & \kappa_{21}^* &= \vartheta_{1,y}, & \kappa_{22}^* &= \vartheta_{2,y},
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie v_α , v i ϑ_α , ϑ są składowymi wektora małego przemieszczenia i obrotu.

— związki fizyczne, które dla dźwigara prętowego złożonego z dwu rodzin ortogonalnych prętów przyrządycznych sztywno połączonych w węzłach i osiach równoległych do linii parametrycznych $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ przyjmują postać (rys. 1):

$$\begin{aligned}
 p^{11} &= R_I \gamma_{11}, & p^{12} &= \check{R}_I \gamma_{12}, & p^{21} &= \check{R}_{II} \gamma_{21}, & p^{22} &= R_{II} \gamma_{22}, \\
 p^1 &= \check{R}_I \gamma_1, & p^2 &= \check{R}_{II} \gamma_2, & m^1 &= \check{S}_I \kappa_1, & m^2 &= \check{S}_{II} \kappa_2, \\
 m^{11} &= S_I \kappa_{11}, & m^{12} &= \check{S}_I \kappa_{12}, & m^{21} &= \check{S}_{II} \kappa_{21}, & m^{22} &= S_{II} \kappa_{22},
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdzie $\gamma_{\alpha\beta}$, γ_α , $\kappa_{\alpha\beta}$, κ_α są składowymi stanu odkształcenia, R_I , \check{R}_I , \check{R}_{II} , S , \check{S}_I , \check{S}_{II} — ciągłymi miarami sztywności sprężystej dla prętów rodziny Δ ($\Delta = I, II$),

— zasady idealności więzów typu kinematycznego (geometrycznego)

$$\begin{aligned}
 &\int_0^L \int_{-\frac{1}{2}\check{L}}^{\frac{1}{2}\check{L}} (r^1 \delta v_1 + r^2 \delta v_2 + r \delta v + s^1 \delta \vartheta_1 + s^2 \delta \vartheta_2 + s \delta \vartheta) dy dx + \int_0^L [(\tau^1 \delta v_1 + \tau^2 \delta v_2 + \tau \delta v + \\
 &+ \mu^1 \delta \vartheta_1 + \mu^2 \delta \vartheta_2 + \mu \delta \vartheta)|_{y=-\frac{1}{2}\check{L}} + (\tau^1 \delta v_1 + \tau^2 \delta v_2 + \tau \delta v + \mu^1 \delta \vartheta_1 + \mu^2 \delta \vartheta_2 + \mu \delta \vartheta)|_{y=\frac{1}{2}\check{L}}] dx + \\
 &+ \int_{-\frac{1}{2}\check{L}}^{\frac{1}{2}\check{L}} [(\tau^1 \delta v_1 + \tau^2 \delta v_2 + \tau \delta v + \mu^1 \delta \vartheta_1 + \mu^2 \delta \vartheta_2 + \mu \delta \vartheta)|_{x=0} + \\
 &+ (\tau^1 \delta v_1 + \tau^2 \delta v_2 + \tau \delta v + \mu^1 \delta \vartheta_1 + \mu^2 \delta \vartheta_2 + \mu \delta \vartheta)|_{x=L}] dy = 0 \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

dla dowolnych wariacji δv_α , δv , $\delta \vartheta_\alpha$, $\delta \vartheta$ ($\alpha = 1, 2$) zgodnych z więzami,

— zasadę idealności więzów typu kinetycznego (statycznego)

$$\begin{aligned}
 &\int_0^L \int_{-\frac{1}{2}\check{L}}^{\frac{1}{2}\check{L}} [(\gamma_{11} - \gamma_{11}^*) \delta p^{11} + (\gamma_{12} - \gamma_{12}^*) \delta p^{12} + (\gamma_{21} - \gamma_{21}^*) \delta p^{21} + (\gamma_{22} - \gamma_{22}^*) \delta p^{22} + \\
 &+ (\gamma_1 - \gamma_1^*) \delta p^1 + (\gamma_2 - \gamma_2^*) \delta p^2 + (\kappa_1 - \kappa_1^*) \delta m^1 + (\kappa_2 - \kappa_2^*) \delta m^2 + \\
 &+ (\kappa_{11} - \kappa_{11}^*) \delta m^{11} + (\kappa_{12} - \kappa_{12}^*) \delta m^{12} + (\kappa_{21} - \kappa_{21}^*) \delta m^{21} + (\kappa_{22} - \kappa_{22}^*) \delta m^{22}] dy dx = 0 \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

dla dowolnych wariacji $\delta p^{\alpha\beta}$, ..., δm^α zgodnych z więzami.

Równania więzów wewnętrznych sprecyzujemy w p. 3.

Następnie wykorzystamy zlinieryzowane wariacje równań dla zaburzonego stanu odkształconego w stosunku do stanu podstawowego — liniowe równania stateczności [1]:

— równania równowagi

$$\begin{aligned}
 \partial \hat{p}_{,x}^{11} + \partial \hat{p}_{,y}^{21} + \partial r^1 &= 0, & \partial \hat{p}_{,x}^{12} + \partial \hat{p}_{,y}^{22} \partial r^2 &= 0, \\
 \partial \hat{p}_{,x}^1 + \partial \hat{p}_{,y}^2 + \partial r &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \dot{m}_{,x}^{11} + \partial \dot{m}_{,y}^{21} + \partial \dot{p}^2 + \partial \dot{\gamma}_{12} p^1 + \dot{\gamma}_{12} \partial p^1 + \partial \dot{\gamma}_{22} p^2 + \dot{\gamma}_{22} \partial p^2 - \partial \dot{\gamma}_1 p^{12} - \dot{\gamma}_1 \partial p^{12} - \\ - \partial \dot{\tau}_2 p^{22} - \dot{\gamma}_2 \partial p^{22} + \partial s^1 = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \partial \dot{m}_{,x}^{12} + \partial \dot{m}_{,y}^{22} - \partial \dot{p}^1 - \partial \dot{\gamma}_{11} p^1 - \dot{\gamma}_{11} \partial p^1 - \partial \dot{\gamma}_{21} p^2 - \dot{\gamma}_{21} \partial p^2 + \partial \dot{\gamma}_1 p^{11} + \dot{\gamma}_1 \partial p^{11} + \\ + \partial \dot{\gamma}_2 p^{21} + \dot{\gamma}_2 \partial p^{21} + \partial s^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \dot{m}_{,x}^1 + \partial \dot{m}_{,y}^2 + \partial \dot{p}^{12} - \partial \dot{p}^{21} - \partial \dot{\gamma}_{12} p^{11} - \dot{\gamma}_{12} \partial p^{11} - \partial \dot{\gamma}_{22} p^{21} - \dot{\gamma}_{22} \partial p^{21} + \\ + \partial \dot{\gamma}_{11} p^{12} + \dot{\gamma}_{11} \partial p^{12} + \partial \dot{\gamma}_{21} p^{22} + \dot{\gamma}_{21} \partial p^{22} = 0. \end{aligned}$$

— statyczne warunki brzegowe

dla $x = 0$

$$\begin{aligned} -\partial \dot{p}^{11} = \partial \tau^1, \quad -\partial \dot{p}^{12} = \partial \tau^2, \quad -\partial \dot{p}^1 = \partial \tau, \\ -\partial \dot{m}^{11} = \partial \mu^1, \quad -\partial \dot{m}^{12} = \partial \mu^2, \quad -\partial \dot{m}^1 = \partial \mu, \end{aligned} \quad (2.12)$$

dla $x = L$

$$\begin{aligned} \partial \dot{p}^{11} = \partial \tau^1, \quad \partial \dot{p}^{12} = \partial \tau^2, \quad \partial \dot{p}^1 = \partial \tau, \\ \partial \dot{m}^{11} = \partial \mu^1, \quad \partial \dot{m}^{12} = \partial \mu^2, \quad \partial \dot{m}^1 = \partial \mu, \end{aligned} \quad (2.13)$$

dla $y = -\frac{1}{2} \tilde{L}$

$$\begin{aligned} -\partial \dot{p}^{21} = \partial \tau^1, \quad -\partial \dot{p}^{22} = \partial \tau^2, \quad -\partial \dot{p}^2 = \partial \tau, \\ -\partial \dot{m}^{21} = \partial \mu^1, \quad -\partial \dot{m}^{22} = \partial \mu^2, \quad -\partial \dot{m}^2 = \partial \mu, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dla $y = \frac{1}{2} L$

$$\begin{aligned} \partial \dot{p}^{21} = \partial \tau^1, \quad \partial \dot{p}^{22} = \partial \tau^2, \quad \partial \dot{p}^2 = \partial \tau, \\ \partial \dot{m}^{21} = \partial \mu^1, \quad \partial \dot{m}^{22} = \partial \mu^2, \quad \partial \dot{m}^2 = \partial \mu, \end{aligned} \quad (2.15)$$

— związki statyczne

$$\begin{aligned} \partial \dot{p}^{11} &= \partial p^{11} + \partial \dot{\gamma}_{11} p^{11} + \dot{\gamma}_{11} \partial p^{11} + \partial \dot{\gamma}_{21} p^{12} + \dot{\gamma}_{21} \partial p^{12} - \partial \dot{\gamma}_1 p^1 - \dot{\gamma}_1 \partial p^1, \\ \partial \dot{p}^{12} &= \partial p^{12} + \partial \dot{\gamma}_{12} p^{11} + \dot{\gamma}_{12} \partial p^{11} + \partial \dot{\gamma}_{22} p^{12} + \dot{\gamma}_{22} \partial p^{12} - \partial \dot{\gamma}_2 p^1 - \dot{\gamma}_2 \partial p^1, \\ \partial \dot{p}^{21} &= \partial p^{21} + \partial \dot{\gamma}_{11} p^{21} + \dot{\gamma}_{11} \partial p^{21} + \partial \dot{\gamma}_{21} p^{22} + \dot{\gamma}_{21} \partial p^{22} - \partial \dot{\gamma}_1 p^2 - \dot{\gamma}_1 \partial p^2, \\ \partial \dot{p}^{22} &= \partial p^{22} + \partial \dot{\gamma}_{12} p^{21} + \dot{\gamma}_{12} \partial p^{21} + \partial \dot{\gamma}_{22} p^{22} + \dot{\gamma}_{22} \partial p^{22} - \partial \dot{\gamma}_2 p^2 - \dot{\gamma}_2 \partial p^2, \\ \partial \dot{p}^1 &= \partial p^1 + \partial \dot{\gamma}_1 p^{11} + \dot{\gamma}_1 \partial p^{11} + \partial \dot{\gamma}_2 p^{12} + \dot{\gamma}_2 \partial p^{12}, \\ \partial \dot{p}^2 &= \partial p^2 + \partial \dot{\gamma}_1 p^{21} + \dot{\gamma}_1 \partial p^{21} + \partial \dot{\gamma}_2 p^{22} + \dot{\gamma}_2 \partial p^{22}, \\ \partial \dot{m}^{11} &= \partial m^{11} + \partial \dot{\gamma}_{11} m^{11} + \dot{\gamma}_{11} \partial m^{11} + \partial \dot{\gamma}_{21} m^{12} + \dot{\gamma}_{21} \partial m^{12} - \partial \dot{\gamma}_1 m^1 - \dot{\gamma}_1 \partial m^1, \\ \partial \dot{m}^{12} &= \partial m^{12} + \partial \dot{\gamma}_{12} m^{11} + \dot{\gamma}_{12} \partial m^{11} + \partial \dot{\gamma}_{22} m^{12} + \dot{\gamma}_{22} \partial m^{12} - \partial \dot{\gamma}_2 m^1 - \dot{\gamma}_2 \partial m^1, \\ \partial \dot{m}^{21} &= \partial m^{21} + \partial \dot{\gamma}_{11} m^{21} + \dot{\gamma}_{11} \partial m^{21} + \partial \dot{\gamma}_{21} m^{22} + \dot{\gamma}_{21} \partial m^{22} - \partial \dot{\gamma}_1 m^2 - \dot{\gamma}_1 \partial m^2, \\ \partial \dot{m}^{22} &= \partial m^{22} + \partial \dot{\gamma}_{12} m^{21} + \dot{\gamma}_{12} \partial m^{21} + \partial \dot{\gamma}_{22} m^{22} + \dot{\gamma}_{22} \partial m^{22} - \partial \dot{\gamma}_2 m^2 - \dot{\gamma}_2 \partial m^2, \\ \partial \dot{m}^1 &= \partial m^1 + \partial \dot{\gamma}_1 m^{11} + \dot{\gamma}_1 \partial m^{11} + \partial \dot{\gamma}_2 m^{12} + \dot{\gamma}_2 \partial m^{12}, \\ \partial \dot{m}^2 &= \partial m^2 + \partial \dot{\gamma}_1 m^{21} + \dot{\gamma}_1 \partial m^{21} + \partial \dot{\gamma}_2 m^{22} + \dot{\gamma}_2 \partial m^{22}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

— związki geometryczne

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{11} &= v_{1,x}, & \dot{\gamma}_{12} &= v_{2,x}, & \dot{\gamma}_{21} &= v_{1,y}, & \dot{\gamma}_{22} &= v_{2,y}, \\ & & \dot{\gamma}_1 &= v_{,x} & \dot{\gamma}_2 &= v_{,y} \end{aligned} \quad (2.17)$$

oraz

$$\begin{aligned} \partial \dot{\gamma}_1 &= \partial v_{,x}, & \partial \dot{\gamma}_2 &= \partial v_{,y}, \\ \partial \dot{\gamma}_{11} &= \partial v_{1,x}, & \partial \dot{\gamma}_{12} &= \partial v_{2,x}, & \partial \dot{\gamma}_{21} &= \partial v_{1,y}, & \partial \dot{\gamma}_{22} &= \partial v_{2,y}, \\ \partial \gamma_{11}^* &= \partial v_{1,x}, & \partial \gamma_{12}^* &= \partial v_{2,x} - \partial \vartheta, & \partial \gamma_{21}^* &= \partial v_{1,y} + \partial \vartheta, & \partial \gamma_{22}^* &= \partial v_{2,y} \quad (2.18) \\ \partial \gamma_1^* &= \partial v_{,x} + \partial \vartheta_2, & \partial \gamma_2^* &= \partial v_{,y} - \partial \vartheta_1, & \partial \kappa_1^* &= \partial \vartheta_{,x}, & \partial \kappa_2^* &= \partial \vartheta_{,y}, \\ \partial \kappa_{11}^* &= \partial \vartheta_{1,x} & \partial \kappa_{12}^* &= \partial \vartheta_{2,x}, & \partial \kappa_{21}^* &= \partial \vartheta_{1,y} & \partial \kappa_{22}^* &= \partial \vartheta_{2,y}, \end{aligned}$$

— związki fizyczne

$$\begin{aligned} \partial p^{11} &= R_I \partial \gamma_{11}, & \partial p^{12} &= \check{R}_I \partial \gamma_{12}, & \partial p^{21} &= \check{R}_{II} \partial \gamma_{21}, & \partial p^{22} &= R_{II} \partial \gamma_{22} \\ \partial p^1 &= \check{R}_I \partial \gamma_1, & \partial p^2 &= \check{R}_{II} \partial \gamma_2, & \partial m^1 &= \check{S}_I \partial \kappa_1, & \partial m^2 &= \check{S}_{II} \partial \kappa_2, \quad (2.19) \\ \partial m^{11} &= S_I \partial \kappa_{11}, & \partial m^{12} &= \check{S}_I \partial \kappa_{12}, & \partial m^{21} &= \check{S}_{II} \partial \kappa_{21}, & \partial m^{22} &= S_{II} \partial \kappa_{22}, \end{aligned}$$

— zasadę idealności więzów typu kinematycznego

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_{-\frac{1}{2}\check{L}}^{\frac{1}{2}\check{L}} (\partial r^1 \delta v_1 + \partial r^2 \delta v_2 + \partial r \delta v + \partial s^1 \delta \vartheta_1 + \partial s^2 \delta \vartheta_2 + \partial s \delta \vartheta) dy dx + \\ & + \int_0^L [(\partial \tau^1 \delta v_1 + \partial \tau^2 \delta v_2 + \partial \tau \delta v + \partial \mu^1 \delta \vartheta_1 + \partial \mu^2 \delta \vartheta_2 + \partial \mu \delta \vartheta)|_{y=\frac{1}{2}\check{L}} + \\ & + (\partial \tau^1 \delta v_1 + \partial \tau^2 \delta v_2 + \partial \tau \delta v + \partial \mu^1 \delta v_1 + \partial \mu^2 \delta v_2 + \partial \mu \delta v)|_{y=\frac{1}{2}L}] dx + \\ & + \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} [(\partial \tau^1 \delta v_1 + \partial \tau^2 \delta v_2 + \partial \tau \delta v + \partial \mu^1 \delta \vartheta_1 + \partial \mu^2 \delta \vartheta_2 + \partial \mu \delta \vartheta)|_{x=0} + \\ & + (\partial \tau^1 \delta v_1 + \partial \tau^2 \delta v_2 + \partial \tau \delta v + \partial \mu^1 \delta \vartheta_1 + \partial \mu^2 \delta \vartheta_2 + \partial \mu \delta \vartheta)|_{x=L}] dy = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

— zasadę idealności więzów typu kinetycznego

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_{-\frac{1}{2}\check{L}}^{\frac{1}{2}\check{L}} [(\partial \gamma_{11} - \partial \gamma_{11}^*) \delta p^{11} + (\partial \gamma_{12} - \partial \gamma_{12}^*) \delta p^{12} + (\partial \gamma_{21} - \partial \gamma_{21}^*) \delta p^{21} + \\ & + (\partial \gamma_{22} - \partial \gamma_{22}^*) \delta p^{22} + (\partial \gamma_1 - \partial \gamma_1^*) \delta p^1 + (\partial \gamma_2 - \partial \gamma_2^*) \delta p^2 + (\partial \kappa_1 - \partial \kappa_1^*) \delta m^1 + \\ & + (\partial \kappa_2 - \partial \kappa_2^*) \delta m^2 + (\partial \kappa_{11} - \partial \kappa_{11}^*) \delta m^{11} + (\partial \kappa_{12}^* - \partial \kappa_{12}^*) \delta m^{12} + (\partial \kappa_{21} - \partial \kappa_{21}^*) \delta m^{21} + \\ & + (\partial \kappa_{22} - \partial \kappa_{22}^*) \delta m^{22}] dy dx = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

dla dowolnych δv_α , δv , ..., δm^α zgodnych z więzami wewnętrznymi (nałożonymi na przy-

rosty stanu przemieszczenia i napięcia w stosunku do stanu podstawowego). Symbol „ $\partial(\dots)$ ” oznacza przyrost danej wielkości typu geometrycznego lub statycznego.

Rozważymy również uproszczenia wymienionych wyżej równań, przyjmując w (2.11), (2.16)

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = 0, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha} = 0 \quad (2.22)$$

oraz

$$1 + \partial\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = 1, \quad 1 + \partial\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha} = 1 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (2.23)$$

Jeżeli na składowe stanu przemieszczenia i napięcia oraz ich przyrosty nie nakładamy żadnych więzów, to wobec dowolności i niezależności δv_{α} , ..., $\delta \vartheta$ i $\delta p^{\alpha\beta}$, ..., δm^{α} wynika z zasad idealności (2.9), (2.10) i (2.20), (2.21), że składowe reakcji więzów i miary niezgodności odkształceń oraz ich przyrosty są równe zero. Zatem równania (2.2) - (2.8), (2.11) - (2.19) sprowadzają się do równań dwuwymiarowego modelu ciągłego stateczności rozważanego dźwigara.

W monografii [3] podano uzyskane za pomocą szeregów Fouriera rozwiązania tych równań, tj. rozwiązanie zagadnienia na wartości własne dla niektórych typów obciążenia i warunków podparcia przy dodatkowych uproszczeniach (pominięciu wielkości małych wyższych rzędów). Nie uzyskano do tej pory, w przekonaniu autora, zdawalających (prostych i dostatecznie dokładnych) rozwiązań problemu stateczności rozważanego dźwigara (w ramach przyjętego w tej pracy liniowego modelu ciągłego) dla wielu innych praktycznie ważnych rodzajów obciążenia i podparcia.

3. Równania teorii jednowymiarowej

Przyjmujemy następujące liniowe równania idealnych więzów typu kinematycznego w postaci całkowanej [1]

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1 - \Theta_2 y, & v_2 &= w_2, & v &= w_3 + \Theta_1 y, \\ \vartheta_1 &= \varphi_1, & \vartheta_2 &= \varphi_2 + \lambda y, & \vartheta &= \varphi_3, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie $w_1, w_2, w_3, \Theta_1, \Theta_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \lambda$ są nieznanymi funkcjami zmiennej x — przemieszczeniami uogólnionymi.

Równania (3.1) wyrażają hipotezę prostoliniowości przekroju $x = \text{const}$ po odkształceniu oraz taką postać funkcji obrotów węzłów, aby w szczególności spełnione były założenia Bernoulli'ego-Timoshenki-Własowa dla płaskownika pełnościennego. Dla dużej gęstości siatki elementów dźwigara obserwujemy bowiem duże podobieństwo między zachowaniem się konstrukcji o strukturze siatkowej i ciągłej. Ponadto w pracy [4] wykazano, że w zakresie zginania statycznego równania więzów (3.1) prowadzą do dobrej zgodności z rezultatami ścisłymi w ramach modelu dyskretnego.

Po uwzględnieniu (3.1) w (2.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^* &= w_1' - \Theta_2' y, & \gamma_{12}^* &= w_2' - \varphi_3, & \gamma_{21}^* &= -\Theta_2 + \varphi_3, & \gamma_{22}^* &= 0, \\ \gamma_1^* &= w_3' + \varphi_2 + (\Theta_1' + \lambda) y, & \gamma_2^* &= \Theta_1 - \varphi_1, & \kappa_1^* &= \varphi_3', & \kappa_2^* &= 0, \\ \kappa_{11}^* &= \varphi_1', & \kappa_{12}^* &= \varphi_2' + \lambda' y, & \kappa_{21}^* &= 0, & \kappa_{22}^* &= \lambda, \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie $(\dots)' = \partial(\dots)/\partial x$.

Więzy typu kinetycznego przyjmiemy w postaci wyrażającej fakt pomijalności niektórych składowych stanu napięcia na zachowanie się ustroju [1]

$$p^{\alpha\beta} = \pi_p^{\alpha\beta} p^{\alpha\beta}, \quad p^\alpha = \pi_p^\alpha p^\alpha, \quad m^{\alpha\beta} = \pi_m^{\alpha\beta} m^{\alpha\beta}, \quad m^\alpha = \pi_m^\alpha m^\alpha, \quad (3.3)$$

gdzie $\pi_p^{\alpha\beta}$, π_p^α , $\pi_m^{\alpha\beta}$, π_m^α przyjmują wartości „0” lub „1” w zależności od tego, czy dana składowa stanu napięcia może być pominięta, czy nie.

Po wyznaczeniu z (2.2) - (2.6) reakcji więzów, a z (3.1) wariacji składowych stanu przemieszczenia i po podstawieniu do zasady idealności (2.10) otrzymujemy po wykonaniu całkowania wobec dowolności i niezależności $\delta w_1, \dots, \delta \lambda$ równania równowagi modelu jednowymiarowego dla stanu podstawowego ($x \in (0, L)$)

$$\begin{aligned} P_1^{w'} + f &= 0, & P_2^{w'} + f_2^w &= 0, & P_2^{w'} + f_3^w &= 0, \\ M_1^{\Theta'} - P_1^{\Theta} + g_1^{\Theta} &= 0, & M_2^{\Theta'} - P_2^{\Theta} + g_2^{\Theta} &= 0, \\ M_1^{\varphi'} + P_1^{\varphi} + g_1^{\varphi} &= 0, & M_2^{\varphi'} - P_2^{\varphi} + g_2^{\varphi} &= 0, \\ M_3^{\varphi'} + P_2^w - P_2^{\Theta} + g_3^{\varphi} &= 0, & H^{\lambda'} - M_1^{\Theta} - M^{\lambda} + h^{\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

oraz warunki brzegowe ($x = 0, L$)

$$\begin{aligned} P_1^w &= 'P_{1\alpha}^w & \text{lub} & & w_1 &= 'w_{1\alpha}, \\ P_2^w &= 'P_{2\alpha}^w & \text{lub} & & w_2 &= 'w_{2\alpha}, \\ P_3^w &= 'P_{3\alpha}^w & \text{lub} & & w_3 &= 'w_{3\alpha}, \\ M_1^{\Theta} &= 'M_{1\alpha}^{\Theta} & \text{lub} & & \Theta_1 &= '\Theta_{1\alpha}, \\ M_2^{\Theta} &= 'M_{2\alpha}^{\Theta} & \text{lub} & & \Theta_2 &= '\Theta_{2\alpha}, \\ M_1^{\varphi} &= 'M_{1\alpha}^{\varphi} & \text{lub} & & \varphi_1 &= '\varphi_{1\alpha}, \\ M_2^{\varphi} &= 'M_{2\alpha}^{\varphi} & \text{lub} & & \varphi_2 &= '\varphi_{2\alpha}, \\ M_3^{\varphi} &= 'M_{3\alpha}^{\varphi} & \text{lub} & & \varphi_3 &= '\varphi_{3\alpha}, \\ H^{\lambda} &= 'H^{\lambda} & \text{lub} & & \lambda &= '\lambda_{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie uogólnione siły wewnętrzne określone są następująco

$$\begin{aligned} P_1^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^{11} dy, & P_2^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^{12} dy, & P_3^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^1 dy, \\ M_1^{\Theta} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^1 y dy, & P_1^{\Theta} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^2 dy, & M_2^{\Theta} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^{11} y dy, \\ P_2^{\Theta} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} p^{21} dy, & M_1^{\varphi} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} m^{11} dy, & M_2^{\varphi} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} m^{12} dy, \\ M_3^{\varphi} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} m^1 dy, & H^{\lambda} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} m^{12} y dy, & M^{\lambda} &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} m^{22} dy, \end{aligned} \quad (3.6)$$

a siły zewnętrzne przęsłowe i brzegowe dane są odpowiednio wzorami (dla $x \in (0, L)$)

$$\begin{aligned}
 f_1^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} q^1 dy + 'p^1|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} + 'p^1|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}, & f_2^w &= \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} q^2 dy + 'p^2|_{-\frac{1}{2}L} + 'p^2|_{\frac{1}{2}L}, \\
 f_3^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} q dy + 'p|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} + 'p|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}, & g_1^\circ &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} q y dy - \frac{1}{2}\tilde{L}('p|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} - 'p|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}), \\
 g_2^\circ &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} q^1 y dy - \frac{1}{2}\tilde{L}('p^1|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} - 'p^1|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}), & g_1^q &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} h^1 dy + 'm|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} + 'm|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}, \\
 g_2^q &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} h^2 dy + 'm^2|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} + 'm^2|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}, & g_3^q &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} h dy + 'm|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} + 'm|_{\frac{1}{2}\tilde{L}}, \\
 h^1 &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} h^2 y dy - \frac{1}{2}\tilde{L}('m^2|_{-\frac{1}{2}\tilde{L}} - 'm^2|_{\frac{1}{2}\tilde{L}})
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

oraz (dla $x = x_\alpha$; $x_1 = 0$, $x_2 = L$)

$$\begin{aligned}
 'P_{1\alpha}^w &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'p^1|_{x_\alpha} dy, & 'P_{2\alpha}^w &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'p^2|_{x_\alpha} dy, \\
 'P_{3\alpha}^w &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'p|_{x_\alpha} dy, & 'M_{1\alpha}^\circ &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'p y|_{x_\alpha} dy, \\
 'M_{2\alpha}^\circ &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'p^1 y|_{x_\alpha} dy, & 'M_{1\alpha}^q &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'm^1|_{x_\alpha} dy, \\
 'M_{2\alpha}^q &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'm^2|_{x_\alpha} dy, & 'M_{3\alpha}^q &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'm|_{x_\alpha} dy, \\
 'H_\alpha^1 &= (-1)^\alpha \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} 'm^2 y|_{x_\alpha} dy.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Na podstawie (3.3), (2.8), (2.10) oraz (3.6) znajdujemy związki fizyczne modelu jednowymiarowego (przy założeniu stałości miar sztywności R_A, \dots, \tilde{S}_A dla $A = I, II$)

$$\begin{aligned} P_1^w &= R_1^w w_1', & P_2^w &= R_2^w (w_2' - \varphi_3), & P_3^w &= R_3^w (w_3' + \varphi_2), \\ M_1^\Theta &= S_1^\Theta (\Theta_1' + \lambda), & P_1^\Theta &= R_1^\Theta (\Theta_1 - \varphi_1), & M_2^\Theta &= -S_2^\Theta \Theta_2', \\ P_2^\Theta &= R_2^\Theta (\varphi_3 - \Theta_2), & M_1^\varphi &= S_1^\varphi \varphi_1', & M_2^\varphi &= S_2^\varphi \varphi_2', \\ M_3^\varphi &= S_3^\varphi \varphi_3' & H^\lambda &= T^\lambda \lambda', & M^\lambda &= S^\lambda \lambda, \quad ((\dots)' = \partial(\dots)/\partial x), \end{aligned} \quad (3.9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} R_1^w &= \pi_p^{11} R_I \tilde{L}, & R_2^w &= \pi_p^{12} \tilde{R}_I L, & R_3^w &= \pi_p^1 \check{R}_I \tilde{L} \\ S_1^\Theta &= \frac{1}{12} \pi_p^1 \check{R}_I \tilde{L}^3, & R_1^\Theta &= \pi_p^2 \check{R}_{II} \tilde{L}, & S_2^\Theta &= \frac{1}{12} \pi_p^{11} R_I \tilde{L}^3, \\ R_2^\Theta &= \pi_p^2 \tilde{R}_{II} \tilde{L}, & S_1^\varphi &= \pi_m^{11} S_I \tilde{L}, & S_2^\varphi &= \pi_m^{12} \tilde{S}_I \tilde{L}, \\ S_3^\varphi &= \pi_m^1 \check{S}_I \tilde{L}, & T^\lambda &= \frac{1}{12} \pi_m^{12} \tilde{S}_I \tilde{L}^3, & S^\lambda &= \pi_m^{22} S_{II} \tilde{L}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

W przypadku gdy przekroje prętów dźwigara są prostokątne o osiach głównych równoległych do osi układu współrzędnych (rys. 1), mamy

$$\begin{aligned} R_1^w &= \pi_p^{11} K_I, & R_2^w &= \pi_p^{12} K_I \left(\frac{a_I}{l_I} \right)^2, & R^w &= \pi_p^1 K_I \left(\frac{d_I}{l_I} \right)^2, \\ \frac{S_1}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_p^1 K_I \left(\frac{\tilde{L}}{L} \right)^2, & R_1^\Theta &= \pi_p^2 K_{II} \left(\frac{d_{II}}{l_{II}} \right)^2, \\ \frac{S_2^\Theta}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_p^{11} K_I \left(\frac{\tilde{L}}{L} \right)^2, & R_2^\Theta &= \pi_p^{21} K_{II} \left(\frac{a_{II}}{l_{II}} \right)^2, \\ \frac{S_1^\varphi}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_m^{11} K_I \frac{G_I}{E_I} \left(\frac{l_I}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{a_I}{l_I} \right)^2 + \left(\frac{d_I}{l_I} \right)^2 \right], \\ \frac{S_2^\varphi}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_m^{12} K_I \left(\frac{l_I}{L} \right)^2 \left(\frac{d_I}{l_I} \right)^2, & \frac{S_3^\varphi}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_m^1 K_I \left(\frac{l_I}{L} \right)^2 \left(\frac{a_I}{l_I} \right)^2, \\ \frac{T^\lambda}{L^4} &= \frac{1}{144} \pi_m^{12} K_I \left(\frac{\tilde{L}}{L} \right)^2 \left(\frac{l_I}{L} \right)^2 \left(\frac{d_I}{l_I} \right)^2, \\ \frac{S^\lambda}{L^2} &= \frac{1}{12} \pi_m^{22} K_{II} \frac{G_{II}}{E_{II}} \left(\frac{\tilde{L}}{L} \right)^2 \left(\frac{l_{II}}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{a_{II}}{l_{II}} \right)^2 + \left(\frac{d_{II}}{l_{II}} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdzie

$$K = R \tilde{L} = \frac{E}{\tilde{I}} a d \tilde{L}, \quad (3.12)$$

przy czym a, d oznaczają szerokości (w płaszczyźnie podstawowej konstrukcji) i grubość elementów rodziny $\Delta, l = l_{II}$ — długość, E i G moduły Younga i skręcania ($\Delta = I, II$).

Zauważmy, że równania stanu podstawowego rozdzielają się na niezależne układy opisujące

- I. Rozciąganie (ściskanie) osiowe (w_1),
- II. Zginanie z płaszczyzny dźwigara (w_3, φ_2)
- III. Zginanie w płaszczyźnie dźwigara (w_2, Θ_2, φ_3)
- IV. Skręcanie ($\Theta_1, \varphi_1, \lambda$)

(w nawiasach podano przemieszczenia uogólnione określające dany stan zachowania się konstrukcji).

Wyprowadzimy następnie równania modelu jednowymiarowego dla stanu zaburzonego.

Założymy, że więzy typu kinematycznego są również postaci (3.1), tzn.

$$\begin{aligned} \partial v_1 &= \partial w_1 - \partial \Theta_2 y, & \partial v_2 &= \partial w_2, & \partial v &= \partial w_3 + \partial \Theta_1 y, \\ \partial \vartheta_1 &= \partial \varphi_1, & \partial \vartheta_2 &= \partial \varphi_2 + \partial \lambda y, & \partial \vartheta &= \partial \varphi_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

gdzie $\partial w_1, \dots, \partial \varphi_3$ są przyrostami przemieszczeń uogólnionych.

Na podstawie (3.1), (3.13) oraz (2.17), (2.18) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{11} &= w'_1 - \Theta'_2 y, & \dot{\gamma}_{12} &= w'_2, & \dot{\gamma}_{21} &= -\Theta_2, & \dot{\gamma}_{22} &= 0, \\ \dot{\gamma}_1 &= w'_3 + \Theta'_1 y, & \dot{\gamma}_2 &= \Theta_1, \end{aligned} \quad (3.14)$$

oraz

$$\begin{aligned} \partial \dot{\gamma}_{11} &= \partial w'_1 - \partial \Theta'_2 y, & \partial \dot{\gamma}_{12} &= \partial w'_2, & \partial \dot{\gamma}_{21} &= -\partial \Theta_2, & \partial \dot{\gamma}_{22} &= 0, \\ \partial \dot{\gamma}_1 &= \partial w'_3 + \partial \Theta'_1 y, & \partial \dot{\gamma}_2 &= \partial \Theta_1, \\ \partial \gamma_{11}^* &= \partial w'_1 - \partial \Theta'_2 y, & \partial \gamma_{12}^* &= \partial w'_2 - \partial \varphi_3, & \partial \gamma_{21}^* &= -\partial \Theta_2 + \partial \varphi_3, & \partial \gamma_{22}^* &= 0, \\ \partial \gamma_1^* &= \partial w'_3 + \partial \varphi_2 + (\partial \Theta'_1 + \partial \lambda) y, & \partial \gamma_2^* &= \partial \Theta_1 - \partial \varphi_1, & \partial \kappa_1^* &= \partial \varphi_3, & \partial \kappa_2^* &= 0, \\ \partial \kappa_{11}^* &= \partial \varphi_1, & \partial \kappa_{12}^* &= \partial \varphi_2 + \partial \lambda y, & \partial \kappa_{21}^* &= 0, & \partial \kappa_{22}^* &= \partial \lambda. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Więzy typu kinetycznego przyjmiemy również w postaci (3.3)

$$\partial p^{\alpha\beta} = \pi_p^{\alpha\beta} \partial p^{\alpha\beta}, \quad \partial p^\alpha = \pi_p^\alpha \partial p^\alpha, \quad \partial m^{\alpha\beta} = \pi_m^{\alpha\beta} \partial m^{\alpha\beta}, \quad \partial m^\alpha = \pi_m^\alpha \partial m^\alpha, \quad (3.16)$$

gdzie parametry $\pi_p^{\alpha\beta}, \dots, \pi_m^\alpha$ przyjmują wartość „1” lub „0”, przy czym w stosunku do (3.3) niekoniecznie te same przyrosty składowych stanu napięcia $p^{\alpha\beta}, \dots, m^\alpha$ mogą być pominięte, co składowe w stanie podstawowym ($\alpha, \beta = 1, 2$).

Po wyznaczeniu z (2.11) - (2.16) przyrostów reakcji więzów, a z (3.13) wariacji składowych stanu przemieszczenia i po podstawieniu do zasady idealności (2.12) oraz uwzględnieniu związków (2.16), (3.14), (3.15) i zasady idealności (2.21), związków fizycznych (2.19) oraz wyrażeń (3.16) otrzymujemy po wykonaniu całkowania i wykorzystaniu oznaczeń (3.6) wobec dowolności i niezależności $\delta w_1, \dots, \delta \lambda$ równania równowagi

$$\begin{aligned} \partial P_1^{w'} + (\partial w'_1 P_1^{w'} - \partial \Theta'_2 M_2^\vartheta - \partial \Theta_2 P_2^{w'} - \partial w'_3 P_3^{w'} - \partial \Theta'_1 M_1^\vartheta)' + (w'_1 \partial P_1^{w'} - \Theta'_2 \partial M_2^\vartheta - \Theta_2 \partial P_2^{w'} - \\ - w'_3 \partial P_3^{w'} - \Theta'_1 \partial M_1^\vartheta)' = 0, \\ \partial P_2^{w'} + (\partial w'_2 P_1^{w'} - \partial \Theta_1 P_3^{w'})' + (w'_2 \partial P_1^{w'} - \Theta_1 \partial P_3^{w'})' = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
 & \partial P_3^w + (\partial w_3' P_1^w + \partial \Theta_1' M_2 + \partial \Theta_1 P_2^w)' + (w_3' \partial P_1^w + \Theta_1' \partial M_2^{\circ} + \Theta_1 \partial P_2^w)' = 0, \\
 & \partial M_1^{\circ} + \left(\partial w_3' M_2^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_1^w \right)' + \left(w_3' \partial M_2^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_1' \partial P_1^w \right)' - \\
 & \quad - \partial P_1^{\circ} - \partial w_3' P_2^{\circ} - w_3' \partial P_2^{\circ} = 0, \\
 & \partial M_2^{\circ} + \left(\partial w_1' M_2^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_2' P_1^w - \partial w_3' M_1^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_3^w \right)' + \\
 & \quad + \left(\tilde{w}_1' \partial M_2^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_2' \partial P_1^w - w_3' \partial M_1^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_1' \partial P_3^w \right)' - \\
 & \quad - \partial P_2^{\circ} - \partial w_1' P_2^{\circ} + \partial w_3' P_1^{\circ} - w_1' \partial P_2^{\circ} + w_3' \partial P_1^{\circ} = 0, \\
 & \partial M_1^w + (\partial w_1' M_1^w - \partial \Theta_2 M_2^w - \partial w_3' M_3^w)' + (w_1' \partial M_1^w - \Theta_2 \partial M_2^w - w_3' \partial M_3^w)' + \\
 & \quad + \partial P_1^{\circ} + \partial w_3' (P_2^{\circ} - P_2^w) + \partial w_2' P_3^w + w_3' (\partial P_2^{\circ} - P_2^w) + w_2' \partial P_3^w = 0, \\
 & \partial M_2^w + (\partial w_2' M_1^w - \partial \Theta_1 M_3^w)' + (w_2' \partial M_1^w - \Theta_1 \partial M_3^w)' - \partial P_3^w - \partial w_1' P_3^w + \\
 & \quad + \partial \Theta_2' M_1^{\circ} - \partial \Theta_1 (P_2^w - P_2^{\circ}) - w_1' \partial P_3^w + \Theta_2' \partial M_1^{\circ} - \Theta_1 (\partial P_2^w - \partial P_2^{\circ}) = 0, \\
 & \partial M_3^w + (\partial w_3' M_1^w + \partial \Theta_1 M_2^w)' + (w_3' \partial M_1^w + \Theta_1 \partial M_2^w)' + \partial P_2^w - \partial P_2^{\circ} + \\
 & \quad + \partial w_1' (P_2^w - R_2^{\circ}) + \partial w_3' P_1^{\circ} - \partial \Theta_1 P_3^w + w_1' (\partial P_2^w - \partial P_2^{\circ}) + w_3' \partial P_1^{\circ} - \Theta_1 \partial P_3^w = 0, \\
 & \partial H^{\lambda} - \partial M_1^{\circ} - \partial M^{\mu} - \partial w_1' M_1^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_2 P_3^w - w_1' \partial M_1^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_2 \partial P_3^w = 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

[cd.]

oraz warunki brzegowe

$$\begin{aligned}
 & \partial P_1^w + \partial w_1' P_1^w - \partial \Theta_2' M_2^{\circ} - \partial \Theta_2 P_2^w - \partial w_3' P_3^w - \partial \Theta_1' M_1^{\circ} + \\
 & \quad + w_1' \partial P_1^w - \Theta_2' \partial M_2^{\circ} - \Theta_2 \partial P_2^w - w_3' \partial P_3^w - \Theta_1 \partial M_1^{\circ} = 0 \quad \text{lub} \quad \partial w_1 = 0, \\
 & \partial P_2^w + \partial w_2' P_1^w - \partial \Theta_1 P_3^w + w_2' \partial P_1^w - \Theta_1 \partial P_3^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial w_2 = 0, \\
 & \partial P_3^w + \partial w_3' P_1^w + \partial \Theta_1' M_2^{\circ} + \partial \Theta_1 P_2^w + w_3' \partial P_1^w + \Theta_1' \partial M_2^{\circ} + \Theta_1 \partial P_2^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial w_3 = 0, \\
 & \partial M_1^{\circ} + \partial w_3' M_2^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_1^w + w_3' \partial M_2^{\circ} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_1' \partial P_1^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \Theta_1 = 0, \\
 & \partial M_2^{\circ} + \partial w_1' M_2^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_2 P_1^w - \partial w_3' M_1^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_3^w + \\
 & \quad + w_1' \partial M_2^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_2 \partial P_1^w - w_3' \partial M_1^{\circ} - \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \Theta_1' \partial P_3^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \Theta_2 = 0, \\
 & \partial M_1^w + \partial w_1' M_1^w - \partial \Theta_2 M_2^w - \partial w_3' M_3^w + w_1' \partial M_1^w - \Theta_2 \partial M_2^w - w_3' \partial M_3^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \varphi_1 = 0, \\
 & \partial M_2^w + \partial w_2' M_1^w - \partial \Theta_1 M_3^w + w_2' \partial M_1^w - \Theta_1 \partial M_3^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \varphi_2 = 0, \\
 & \partial M_3^w + \partial w_3' M_1^w + \partial \Theta_1 M_2^w + w_3' \partial M_1^w + \Theta_1 \partial M_2^w = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \varphi_3 = 0, \\
 & \partial H^{\lambda} = 0 \quad \text{lub} \quad \partial \lambda = 0,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

gdzie siły uogólnione P_1^w, \dots, M^λ wyrażają się za pomocą (3.6), a ich przyrosty $\partial P_1^w, \dots, \partial M^\lambda$ następująco:

$$\begin{aligned}
\partial P_1^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial p^{11} dy, & \partial P_2^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}L} \partial p^{12} dy, & \partial P_3^w &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial p^1 dy, \\
\partial M_1^\Theta &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial p^1 y dy, & \partial P_1^\Theta &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}L} \partial p^2 dy, & \partial M_2^\Theta &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial p^{11} y dy, \\
\partial P_2^\Theta &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial p^{21} dy, & \partial M_1^\varphi &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial m^{11} dy, & \partial M_2^\varphi &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial m^{12} dy, \\
\partial M_3^\varphi &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}L} \partial m^1 dy, & \partial H^\lambda &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial m^{12} y dy, & \partial M^\lambda &= \int_{-\frac{1}{2}\tilde{L}}^{\frac{1}{2}\tilde{L}} \partial m^{22} dy,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

przy czym

$$\begin{aligned}
\partial P_1^w &= \overset{*}{R}_1^w \partial w_1', & \partial P_2^w &= \overset{*}{R}_2^w (\partial w_2' - \partial \varphi_3), & \partial P_3^w &= \overset{*}{R}_3^w (\partial w_3' + \partial \varphi_2), \\
\partial M_1^\Theta &= \overset{*}{S}_1^\Theta (\partial \Theta_1' + \partial \lambda), & \partial P_1^\Theta &= \overset{*}{R}_1^\Theta (\partial \Theta_1 - \partial \varphi_1), & \partial M_2^\Theta &= -\overset{*}{S}_2^\Theta \partial \Theta_2', \\
\partial P_2^\Theta &= \overset{*}{R}_2^\Theta (\partial \varphi_3 - \partial \Theta_2), & \partial M_1^\varphi &= \overset{*}{S}_1^\varphi \partial \varphi_1', & \partial M_2^\varphi &= \overset{*}{S}_2^\varphi \partial \varphi_2', \\
\partial M_3^\varphi &= \overset{*}{S}_3^\varphi \partial \varphi_3', & \partial H^\lambda &= \overset{*}{T}^\lambda \partial \lambda', & \partial M^\lambda &= \overset{*}{S}^\lambda \partial \lambda,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

natomiast $\overset{*}{R}_1^w, \dots, \overset{*}{S}^\lambda$ określone są wzorami (3.10) (lub w szczególności (3.11)) po zastąpieniu $\pi_p^{11}, \dots, \pi_m^2$ odpowiednio przez $\overset{*}{\pi}_p^{11}, \dots, \overset{*}{\pi}_m^2$.

W przypadku uwzględnienia założeń (2.22), (2.23) w (2.11), (2.16) równania równowagi (3.17) i warunki brzegowe (3.18) upraszczają się do postaci

$$\begin{aligned}
\partial P_1^{w'} - (\partial \Theta_2 P_2^w + \partial w_3' P_3^w + \partial \Theta_1' M_1^\Theta)' &= 0, \\
\partial P_2^{w'} + (\partial w_2' P_1^w - \partial \Theta_1 P_3^w)' &= 0, \\
\partial P_3^{w'} + (\partial w_3' P_1^w + \partial \Theta_1' M_2^\Theta + \partial \Theta_1 P_2^w)' &= 0, \\
\partial M_1^{\Theta'} + \left(\partial w_3' M_2^\Theta + \frac{1}{14} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_1^w \right)' - \partial P_1^\Theta - \partial w_3' P_2^\Theta &= 0, \\
\partial M_2^{\Theta'} - \left(\partial w_3' M_1^\Theta + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_3^w \right)' - \partial P_2^\Theta + \partial w_3' P_1^\Theta &= 0, \\
\partial M_1^{\varphi'} - (\partial \Theta_2 M_2^\varphi + \partial w_3' M_3^\varphi)' + \partial P_1^\Theta + \partial w_3' (P_2^\Theta - P_2^w) + \partial w_2' P_3^w &= 0, \\
\partial M_2^{\varphi'} + (\partial w_2' M_1^\varphi - \partial \Theta_1 M_3^\varphi)' \partial P_3^w - \partial \Theta_1 (P_2^w - P_2^\Theta) &= 0, \\
\partial M_3^{\varphi'} + (\partial w_3' M_1^\varphi + \partial \Theta_1 M_2^\varphi) + \partial P_2^w - \partial P_2^\Theta + \partial w_3' P_1^\Theta - \partial \Theta_1 P_3^w &= 0, \\
\partial H^{\lambda'} - \partial M_1^\Theta - \partial M^\lambda &= 0,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \partial P_1^w - (\partial \Theta_2 P_2^w + \partial w_3' P_3^w + \partial \Theta_1' M_1^{\Theta}) &= 0 & \text{lub} & \quad \partial w_1 = 0, \\
 \partial P_2^w + \partial w_2' P_1^w - \partial \Theta_1 P_3^w &= 0 & \text{lub} & \quad \partial w_2 = 0, \\
 \partial P_3^w \partial w_3' P_1^w + \partial \Theta_1' M_2^{\Theta} + \partial \Theta_1 P_2^w &= 0 & \text{lub} & \quad \partial w_3 = 0, \\
 \partial M_1^{\Theta} + \partial w_3' M_2^{\Theta} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_1^w &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \Theta_1 = 0, \\
 \partial M_2^{\Theta} - \left(\partial w_3' M_1^{\Theta} + \frac{1}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' P_3^w \right) &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \Theta_2 = 0, \\
 \partial M_1^{\varphi} - (\partial \Theta_2 M_2^{\varphi} + \partial w_3' M_3^{\varphi}) &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \varphi_1 = 0, \\
 \partial M_2^{\varphi} + \partial w_2' M_1^{\varphi} - \partial \Theta_1 M_3^{\varphi} &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \varphi_2 = 0, \\
 \partial M_3^{\varphi} + \partial w_3' M_1^{\varphi} + \partial \Theta_1 M_2^{\varphi} &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \varphi_3 = 0, \\
 \partial H^{\lambda} &= 0 & \text{lub} & \quad \partial \lambda = 0,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

4. Stateczność stanu osiowego ściskania

Równania stanu podstawowego składają się z równania równowagi (3.4), i warunków brzegowych (3.5)₁, związku fizycznego (3.9)₁

$$\begin{aligned}
 P_1^{w'} + f_1^w &= 0, \\
 P_1^w &= 'P_{1\alpha}^w \quad \text{lub} \quad w_1 = 'w_{1\alpha}, \\
 P_1^w &= R_1^w w_1'.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Rozważmy dla przykładu dźwigar w kształcie wspornika obciążony siłami o wypadkowej $'P_{12}^w = -P$. Tak jest np. gdy węzły krawędzi $x = L$ obciążone są równomiernie rozłożonymi siłami o gęstości $'P^1 = -P/\tilde{L}$. Wtedy bowiem zgodnie z (3.8) dla $\alpha = 2$ jest $'P_{12}^w = -P$, a pozostałe brzegowe siły uogólnione są równe zeru.

Rozwiązanie równań (4.1)_{1,3} dla $f_1^w = 0$, $\pi_p^{11} = 1$ i przy warunkach brzegowych

$$w_1 = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0, \quad P_1^w = -P \quad \text{dla} \quad x = L \tag{4.2}$$

wyraża się następująco:

$$w_1 = -\frac{Px}{R_1^w}, \quad P_1^w = -P. \tag{4.3}$$

Równania równowagi stanu zaburzonego (3.17) upraszczają się po uwzględnieniu (4.3) i (3.20) do postaci

$$\begin{aligned}
 R_1^{*w} \partial w_1' - P \left(1 + \frac{R_1^{*w}}{R_1^w} \right) \partial w_1' &= 0, \\
 R_2^{*w} (\partial w_2' - \partial \varphi_3') - P \partial w_2' &= 0, \\
 R_3^{*w} (\partial \omega_3' + \partial \varphi_2') - P \partial w_3' &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{*}{S}_1^\varnothing (\partial\Theta_1' + \partial\lambda) - \frac{P}{12} \tilde{L}^2 \partial\Theta_1' - \overset{*}{R}_1^\varnothing (\partial\Theta_1 - \partial\varphi_1) = 0, \\
& -\overset{*}{S}_2^\varnothing \partial\Theta_2' + P \left(\frac{\tilde{L}^2}{12} + \frac{\overset{*}{S}_2^\varnothing}{R_1^w} \right) \partial\Theta_2' + \left(P \frac{\overset{*}{R}_2^\varnothing}{R_1^w} - \overset{*}{R}_2^\varnothing \right) (\partial\varphi_3 - \partial\Theta_2) = 0, \\
& \left(\overset{*}{S}_1^\varphi - P \frac{\overset{*}{S}_1^\varphi}{R_1^w} \right) \partial\varphi_1' + \overset{*}{R}_1^\varnothing (\partial\Theta_1 - \partial\varphi_1) = 0, \\
& \overset{*}{S}_2^\varphi \partial\varphi_2' - \left(\overset{*}{R}_3^w - P \frac{\overset{*}{R}_3^w}{R_1^w} \right) (\partial w_3' + \partial\varphi_2) = 0, \\
& \overset{*}{S}_3^\varphi \partial\varphi_3' + \left(\overset{*}{R}_2^w - P \frac{\overset{*}{R}_2^w}{R_1^w} \right) (\partial w_2' - \partial\varphi_3) - \left(\overset{*}{R}_2^\varnothing - P \frac{\overset{*}{R}_2^\varnothing}{R_1^w} \right) (\partial\varphi_3 - \partial\Theta_2) = 0, \\
& \overset{*}{T}^\lambda \partial\lambda' - \left(\overset{*}{S}_1^\varnothing - P \frac{\overset{*}{S}_1^\varnothing}{R_1^w} \right) (\partial\Theta_1' + \partial\lambda) - \overset{*}{S}^\lambda \partial\lambda = 0,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4)
[cd.]

natomiast warunki brzegowe dla dźwigara w kształcie wspornika do postaci

— dla $x = 0$

$$\partial w_1 = \partial w_2 = \partial w_3 = 0, \quad \partial\Theta_1 = \partial\Theta_2 = \partial\varphi_1 = \partial\varphi_2 = \partial\varphi_3 = 0, \quad \partial\lambda = 0, \tag{4.5}$$

— dla $x = L$

$$\begin{aligned}
& \overset{*}{R}_1^w \partial w_1' - P \left(1 + \frac{\overset{*}{R}_1^w}{R_1^w} \right) \partial w_1' = 0, \quad \overset{*}{R}_2^w (\partial w_2' - \partial\varphi_3) - P \partial w_2' = 0, \\
& \overset{*}{R}_3^w (\partial w_3' + \partial\varphi_2) - P \partial w_3' = 0, \quad \overset{*}{S}_1^\varnothing (\partial\Theta_1' + \partial\lambda) - \frac{P}{12} L^2 \partial\Theta_1' = 0, \\
& -\overset{*}{S}_2^\varnothing \partial\Theta_2' + P \left(\frac{\tilde{L}^2}{12} + \frac{\overset{*}{S}_2^\varnothing}{R_1^w} \right) \partial\Theta_2' = 0, \quad \left(\overset{*}{S}_1^\varphi - P \frac{\overset{*}{S}_1^\varphi}{R_1^w} \right) \partial\varphi_1' = 0, \\
& \overset{*}{S}_2^\varphi \partial\varphi_2' = 0, \quad \overset{*}{S}_3^\varphi \partial\varphi_3' = 0, \quad \overset{*}{T}^\lambda \partial\lambda' = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Z równań (4.4) wynika, że możliwe są trzy niezależne, jakościowo różne postacie wybočenja określone przez następujące układy przyrostów przemieszczeń uogólnionych: $(\partial w_3, \partial\varphi_2)$, $(\partial w_2, \partial\Theta_2, \partial\varphi_3)$, $(\partial\Theta_1, \partial\varphi_1, \partial\lambda)$ (możliwą teoretycznie czwartą postacią dla $w_1 = f(x)$ przy $f(0) = 0$ i $P = \overset{*}{R}_1^w \overset{*}{R}_1^w / (\overset{*}{R}_1^w + \overset{*}{R}_1^w)$ należy odrzucić jako fizycznie niedopuszczalną).

Stosując znane postępowanie dla zagadnienia na wartości własne dla równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach otrzymujemy następujące wyrażenia lub równania algebraiczne na podstawowe wartości własne — wartości obciążenia krytycznego i odpowiadające im funkcje własne — postacie wybočenja (dla $\overset{*}{\pi}_p^{11} = \overset{*}{\pi}_p^{12} = \overset{*}{\pi}_p^{21} = \overset{*}{\pi}_p^1 = \overset{*}{\pi}_{11}^m = \overset{*}{\pi}_{12}^m = \overset{*}{\pi}_m^1 = \overset{*}{\pi}_m^{22} = 1$)

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{R_1^w}{2} \left(1 + \frac{\pi^2 \overset{*}{S}_2^\varphi}{4L^2 \overset{*}{R}_3^w} - \sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2 \overset{*}{S}_2^\varphi}{4L^2 \overset{*}{R}_3^w} \right)^2 - \frac{\pi^2 \overset{*}{S}_2^\varphi}{L^2 \overset{*}{R}_1^w}} \right), \\
\partial w_3 &= A \left(\cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} - 1 \right), \quad \partial\varphi_2 = \frac{\pi}{2L} \frac{\overset{*}{R}_3^w - P}{\overset{*}{R}_3^w} A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^2}{2L^2} &= \frac{\sqrt{(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 + 4a_1 b_1 (a_3 b_3 - a_2 b_2)} - a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 b_1} \\
 a_1 &= S_2^{\circ} \left(1 - \frac{P_2}{R_1^w} \right) - \frac{\tilde{L}^2}{12} P_2, \quad a_2 = R_2^{\circ} \left(1 - \frac{P_2}{R_1^w} \right) = b_3, \\
 a_3 &= R_2^{\circ} \frac{R_2^w - P_2}{R_2^*} \left(1 - \frac{P_2}{R_1^w} \right), \quad b_1 = S_3^{\circ} \frac{R_2^w - P_2}{R_2^*}, \\
 b_2 &= \left(1 - \frac{P_2}{R_1^w} \right) \frac{R_2^w R_2^{\circ} - P_2 (R_2^w + R_2^{\circ})}{R_2^*}, \\
 \partial w_2 &= A \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right), \quad \partial \varphi_3 = \frac{\pi}{2L} \frac{R_2^w - P_2}{R_2^*} A \sin \frac{\pi x}{2L}, \\
 \partial \Theta_2 &= \frac{\pi}{2L} \left[\frac{R_2^w - P_2}{R_2^*} \left(1 + \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_3^{\circ}}{R_2^*} \right) - \frac{P_2}{R_2^{\circ}} \right] A \sin \frac{\pi x}{2L}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 &\left[1 + \left(\frac{\beta_2 \alpha_2^2 + \beta_1}{\beta_2 \alpha_1^2 - \beta_1} \right)^2 \right] \cos \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \frac{\beta_2 \alpha_2^2 + \beta_1}{\beta_2 \alpha_1^2 - \beta_1} \operatorname{th} \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0, \\
 \alpha_1 &= \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + 4a_1 a_3} + a_2}{2a_1} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \alpha_2 = \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + 4a_1 a_3} - a_2}{2a_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 a_1 &= T^{\lambda} \beta_2, \quad a_2 = T^{\lambda} \beta_1 + L^2 S_1^{\circ} \left(1 - \frac{P_3}{R_1^w} \right) (\beta_2 - \beta_0) + S^{\lambda} \beta_2 L^2, \\
 a_3 &= \left[S_1^{\circ} \left(1 - \frac{P_3}{R_1^w} \right) (1 - \beta_1) - S^{\lambda} \beta_1 \right] L^2, \quad \beta_0 = \frac{S_1^{\circ}}{L^2 R_1^*} \left(1 - \frac{P_3}{R_1^w} \right), \\
 \beta_1 &= 1 - \frac{P_3}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^{\circ}} + \frac{S_1^{\circ}}{S_1^{\circ}} \left(1 - \frac{P_3}{R_1^w} \right), \quad \beta_2 = 1 - \frac{P_3}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^{\circ}} \beta_0,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

gdzie A jest stałą dowolną. Skrętniej postaci wyboczenia nie podajemy.

Następnie zbadamy możliwość uproszczenia otrzymanych wyżej zależności na wartości obciążeń krytycznych. W tym celu wykorzystamy równania (3.21) i warunki brzegowe (3.22), które po uwzględnieniu (3.20), (4.3) doprowadzamy do postaci

$$\begin{aligned}
 R_1^* \partial w_1' &= 0, \quad R_2^w (\partial w_2' - \partial \varphi_3') - P \partial w_2' = 0, \\
 R_3^w (\partial w_3' + \partial \varphi_2') - P \partial w_3' &= 0, \quad S_1^{\circ} (\partial \Theta_1' + \partial \lambda') - \frac{P}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' - R_1^{\circ} (\partial \Theta_1 - \partial \varphi_1) = 0, \\
 -S_2^{\circ} \partial \Theta_2' - R_2^{\circ} (\partial \varphi_3 - \partial \Theta_2) &= 0, \quad S_1^{\circ} \partial \varphi_1' + R_1^{\circ} (\partial \Theta_1 - \partial \varphi_1) = 0, \\
 S_2^{\circ} \partial \varphi_2' - R_3^w (\partial w_3' + \partial \varphi_2) &= 0, \quad S_3^{\circ} \partial \varphi_3' + R_2^w (\partial w_2' - \partial \varphi_3) - \\
 -R_2^{\circ} (\partial \varphi_3 - \partial \Theta_2) &= 0, \quad T^{\lambda} \partial \lambda'' - S_1^{\circ} (\partial \Theta_1' + \partial \lambda) - S^{\lambda} \partial \lambda = 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

oraz dla dźwigara w kształcie wspornika

— dla $x = 0$

$$\partial w_1 = \partial w_2 = \partial w_3 = 0, \quad \partial \Theta_1 = \partial \Theta_2 = \partial \varphi_1 = \partial \varphi_2 = \partial \varphi_3 = 0, \quad \partial \lambda = 0, \quad (4.11)$$

— dla $x = L$

$$\begin{aligned} \overset{*}{R}_1^w \partial w_1' &= 0, & \overset{*}{R}_2^w (\partial w_2' - \partial \varphi_3) - P \partial w_2' &= 0, \\ \overset{*}{R}_3^w (\partial w_3' + \partial \varphi_2) - P \partial w_3' &= 0, & \overset{*}{S}_1^\Theta (\partial \Theta_1' + \partial \lambda) - \frac{P}{12} \tilde{L}^2 \partial \Theta_1' &= 0, \\ -\overset{*}{S}_2^\Theta \partial \Theta_2' &= 0, & \overset{*}{S}_1^\varphi \partial \varphi_1' &= 0, & \overset{*}{S}_2^\varphi \partial \varphi_2' &= 0, & \overset{*}{S}_3^\varphi \partial \varphi_3' &= 0, & T^\lambda \partial \lambda' &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Zauważmy, że jeżeli

$$\frac{\overset{*}{S}_3^\varphi}{\overset{*}{S}_2^\Theta} \ll 1, \quad \frac{\overset{*}{S}_1^\varphi}{\overset{*}{S}_1^\Theta} \ll 1, \quad \frac{\overset{*}{S}^\lambda}{\overset{*}{S}_1^\Theta} \ll 1, \quad \frac{T^\lambda}{\overset{*}{S}_1^\Theta L} \ll 1, \quad (4.13)$$

to możliwe są również dodatkowe uproszczenia w wyniku przyjęcia

$$\overset{*}{\pi}_m^1 = 0, \quad \overset{*}{\pi}_m^{1,1} = 0, \quad \overset{*}{\pi}_m^{2,2} = 0, \quad \overset{*}{\pi}_m^{1,2} = 0 (w T^{\lambda*}) \quad (4.14)$$

przy $\overset{*}{\pi}_p^{1,1} = \overset{*}{\pi}_p^1 = \overset{*}{\pi}_p^2 = \overset{*}{\pi}_p^{1,2} = \overset{*}{\pi}_p^{2,1} = 1$ (por. (3.11) w przypadku prostokątnego przekroju prętów dźwigara po zastąpieniu $\pi_p^{\alpha\beta}, \dots, \pi_m^\alpha$ przez $\overset{*}{\pi}_p^{\alpha\beta}, \dots, \overset{*}{\pi}_m^\alpha$).

Innego typu uproszczenia obliczeń można otrzymać zauważając, że jeżeli (dla $\overset{*}{\pi}_p^1 = \overset{*}{\pi}_p^2 = \overset{*}{\pi}_p^{1,2} = \overset{*}{\pi}_p^{2,1} = 1$)

$$\frac{\overset{*}{S}_2^\varphi}{L^2 \overset{*}{R}_3^w} \ll 1, \quad \frac{\overset{*}{S}_3^\varphi}{L^2 (\overset{*}{R}_2^w + \overset{*}{R}_2^\Theta)} \ll 1, \quad \frac{\overset{*}{S}_1^\varphi}{L^2 \overset{*}{R}_1^\Theta} \ll 1, \quad \frac{T^\lambda}{L^2 (\overset{*}{S}_1^\Theta + \overset{*}{S}^\lambda)} \ll 1 \quad (4.15)$$

to w równaniach (4.10) uzasadnione są następujące asymptotyczne przybliżenia:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\partial w_3' + \frac{\overset{*}{S}_2^\varphi}{L^2 \overset{*}{R}_2^w} \partial \varphi_2'' \approx -\partial w_3', \\ \partial \varphi_3 &= \frac{\overset{*}{R}_2^w \partial w_2' + \overset{*}{R}_2^\Theta \partial \Theta_2}{\overset{*}{R}_2^w + \overset{*}{R}_2^\Theta} + \frac{\overset{*}{S}_3^\varphi}{\overset{*}{R}_2^w + \overset{*}{R}_2^\Theta} \partial \varphi_3'' \approx \frac{\overset{*}{R}_2^w \partial w_2' + \overset{*}{R}_2^\Theta \partial \Theta_2}{\overset{*}{R}_2^w + \overset{*}{R}_2^\Theta}, \\ \partial \varphi_1 &= \partial \Theta_1 - \frac{\overset{*}{S}_1^\varphi}{\overset{*}{R}_1^\Theta} \partial \varphi_1'' \approx \partial \Theta_1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\partial \lambda = -\frac{\overset{*}{S}_1^\Theta}{\overset{*}{S}_1^\Theta + \overset{*}{S}^\lambda} \partial \Theta_1' + \frac{T^\lambda}{\overset{*}{S}_1^\Theta + \overset{*}{S}^\lambda} \partial \lambda'' \approx -\frac{\overset{*}{S}_1^\Theta}{\overset{*}{S}_1^\Theta + \overset{*}{S}^\lambda} \partial \Theta_1'.$$

Stosując znany sposób postępowania wyznaczamy z (4.10) - (4.12) podstawowe obciążenia krytyczne i odpowiadające im giętne i skrętne postacie wybożenia (przy $\overset{*}{\pi}_p^{1,1} = \overset{*}{\pi}_p^1 = \overset{*}{\pi}_p^2 = \overset{*}{\pi}_p^{1,2} = \overset{*}{\pi}_p^{2,1} = 1$)

Mamy zatem

— dla $\pi_m^{*12} = 1$

$$P_1^\alpha = \frac{\pi^2}{4} \frac{S_2^*}{L^2} \frac{1}{1+\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi^2}{4} \frac{S_2^*}{R_3^* L^2},$$

$$\partial w_3^\alpha = A \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \right) \frac{x}{L}, \quad \partial \varphi_2^\alpha = -\frac{\pi}{2L} \frac{A}{1+\alpha} \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$
(4.17)

— dla $S_2^*/L^2 R_3^* \ll 1$ ($\pi_m^{*12} = 1$)

$$P_1^b = \frac{\pi^2}{4} \frac{S_2^{*q}}{L^2}, \quad w_3^b = A \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \right) \frac{x}{L}, \quad \partial \varphi_2^b = -\frac{\pi}{2L} A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$
(4.18)

— dla $\pi_m^{*1} = 1$

$$P_2^a = R_2^{*o} \frac{(1+a_1)(1+b_1)-1}{(1+b_1)(1+a_2)+b_2},$$

$$a_1 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_3^*}{R_2^{*o}}, \quad a_2 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_3^*}{R_2^*},$$

$$b_1 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_2^{*o}}{R_2^{*o}}, \quad b_2 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_2^{*o}}{R_2^*},$$
(4.19)

$$\partial w_2^a = A \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right), \quad \partial \varphi_3^a = \frac{\pi}{2L} \frac{R_2^{*w} - P_2^a}{R_2^{*o}} A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

$$\partial \Theta_2^a = \frac{\pi}{2L} \left[\frac{R_2^{*w} - P_2^a}{R_2^{*o}} \left(1 + \frac{2}{4L^2} \frac{S_3^*}{R_2^{*o}} \right) - \frac{P_2^a}{R_2^{*o}} \right] A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

— dla $\pi_m^{*1} = 0$

$$P_2^b = \frac{\pi^2}{4} \frac{S_2^{*o}}{L^2} \frac{1}{1+\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_2^{*o}}{R_s^*}, \quad R_s^* = \frac{R_2^{*w} R_2^{*o}}{R_2^{*w} + R_2^{*o}}.$$

$$\partial w_2^b = A \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right), \quad \partial \varphi_3^b = \frac{\pi}{2L} \frac{R_2^{*w} - P_2^b}{R_2^{*w}} A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$
(4.20)

$$\partial \Theta_2^b = \frac{\pi}{2L} \frac{A}{1+\alpha} \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

— dla $S_3^*/L^2 (R_3^* + R_2^{*o}) \ll 1$ ($\pi_m^{*1} = 1$)

$$P_2^c = P_2^b, \quad \partial w_2^c = \partial w_2^b, \quad \partial \varphi_3^c = \partial \varphi_3^b, \quad \partial \Theta_2^c = \partial \Theta_2^b,$$
(4.21)

— dla $\pi_m^{*12} = \pi_m^{*11} = 1$ ($\pi_m^{*22} = 1$ lub $\pi_m^{*22} = 0$)

$$\left[1 + \left(\frac{\beta_2 \alpha_2^2 + \beta_1}{\beta_2 \alpha_1^2 - \beta_1} \right)^2 \right] \cos \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \frac{\beta_2 \alpha_2^2 + \beta_1}{\beta_2 \alpha_1^2 - \beta_1} \operatorname{th} \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + 4a_1 a_3 + a_2}}{2a_1} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \alpha_2 = \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + 4a_1 a_3 - a_2}}{2a_1} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$a_1 = T^{\lambda} \beta_2, \quad a_2 = T^{\lambda} \beta_1 + S_1^{\ominus} L^2 (\beta_2 - \beta_0) + S_1^{\lambda} L^2 \beta_2, \quad (4.22)$$

$$a_3 = [S_1^{\ominus} - (S_1^{\ominus} + S_1^{\lambda}) \beta_1] L^2, \quad \beta_0 = \frac{S_1^{\ominus}}{L^2 R_1^{\ominus}},$$

$$\beta_1 = 1 - \frac{P_3^a}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^{\ominus}} + \frac{S_1^{\ominus}}{S_1^{\lambda}}, \quad \beta_2 = \beta_0 \left(1 - \frac{P_2^a}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^{\ominus}} \right),$$

— dla $\pi_m^{12} = 0, \pi_m^{11} = 1$ ($\pi_m^{22} = 0$ lub $\pi_m^{22} = 1$)

$$P_3^b = \frac{12}{\tilde{L}^2} \frac{S_1^{\lambda} (1 + a_1) + S_1^{\ominus} (1 + a_2)}{(1 + a_1)(1 + a_2)}, \quad a_1 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_1^{\ominus}}{R_1^{\ominus}}, \quad a_2 = \frac{S_1^{\lambda}}{S_1^{\ominus}},$$

$$\partial \Theta_1^b = A \left(1 + \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_1^{\ominus}}{R_1^{\ominus}} \right) \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L}, \quad \partial \varphi_1^b = A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L}, \quad (4.23)$$

$$\partial \lambda^b = -\frac{\pi}{2L} \left[\left(1 - \frac{P_3^b}{12} \frac{L^2}{S_1^{\ominus}} + \frac{S_1^{\ominus}}{S_1^{\lambda}} \right) + \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{S_1^{\ominus}}{R_1^{\ominus}} \left(1 - \frac{P_3^b}{12} \frac{L^2}{S_1^{\ominus}} \right) \right] A \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

— dla $\pi_m^{12} = 1, \pi_m^{11} = 0$ ($\pi_m^{22} = 1$ lub $\pi_m^{22} = 0$)

$$P_2^c = 12 \frac{S_1^{\ominus}}{\tilde{L}^2} \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \alpha = \frac{S_1^{\lambda}}{S_1^{\ominus}} + \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{T^{\lambda}}{S_1^{\ominus}}, \quad (4.24)$$

$$\partial \Theta_1^c = \partial \varphi_1^c = A \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right), \quad \partial \lambda^c = -\frac{\pi}{L^2} \left(1 - \frac{P_3^c}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^{\ominus}} \right) A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

— dla $\pi_m^{12} = \pi_m^{11} = 0, \pi_m^{22} = 1$

$$P_3^d = 12 \frac{S_1^{\ominus}}{\tilde{L}^2} \frac{S_1^{\lambda}}{S_1^{\ominus} + S_1^{\lambda}}, \quad \partial \Theta_1^d = \partial \varphi_1^d = A \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right), \quad (4.25)$$

$$\partial \lambda^d = -\frac{\pi}{2L} \frac{S_1^{\ominus}}{S_1^{\ominus} + S_1^{\lambda}} A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

lub

$$P_3^d = 12 \frac{S_1^{\ominus}}{\tilde{L}^2} \frac{S_1^{\lambda}}{S_1^{\ominus} + S_1^{\lambda}}, \quad \partial \Theta_1^d = \partial \varphi_1^d = A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L}, \quad (4.26)$$

$$\partial \lambda^d = -\frac{\pi}{2L} \frac{S_1^{\ominus}}{S_1^{\ominus} + S_1^{\lambda}} A \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

— dla $S_1^\varphi/L^2 R_1^\varphi \ll 1$ ($\kappa_m^{*12} = \kappa_m^{*11} = 1$, $\kappa_m^{*22} = 1$ lub $\kappa_m^{*22} = 0$)

$$P_3^e = 12 \frac{S_1^*(1+a_1) + S_s^*(1+a_2)}{\tilde{L}^2(1+a_1)},$$

$$a_1 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{T^\lambda}{S_1^\varphi + S^\lambda}, \quad a_2 = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{T^\lambda}{S^\lambda}, \quad S_s^* = \frac{S_1^\varphi S^\lambda}{S_1^\varphi + S^\lambda}, \quad (4.27)$$

$$\partial\theta_1^e = \partial\varphi_1^e = A \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right), \quad \partial\lambda^e = -\frac{\pi}{2L} \left(1 - \frac{P_3^e}{12} \frac{\tilde{L}^2}{S_1^\varphi} + \frac{S_1^\varphi}{S_1^\varphi} \right) A \sin \frac{\pi x}{2L},$$

Tabela 1

Nr	[m]	a _I	a _{II}	d _I = d _{II}	l _I	l _{II}	L	\tilde{L}	
1		0,10	0,10	0,10	1,0	1,0	18,0	6,0	
2		0,20	0,10	0,10					
3		0,10	0,20	0,10					
4		0,10	0,10	0,20					
5		0,10	0,10	0,10	2,0	1,0			
6		0,20	0,10	0,10					
7		0,10	0,20	0,10					
8		0,10	0,10	0,20					
9		0,40	0,10	0,10					
10		0,40	0,20	0,10					
11		0,40	0,10	0,20					
12		0,10	0,10	0,10	1,0	0,5			
13		0,10	0,10	0,05					
14		0,10	0,05	0,10					
15		0,05	0,10	0,10					
16		0,10	0,10	0,10	1,0	1,0	36,0		
17		0,10	0,10	0,10	2,0	1,0			
18		0,20	0,10	0,10					
19		0,10	0,10	0,10	4,0	1,0			
20		0,20	0,10	0,10					
21		0,40	0,10	0,10					
22		0,40	0,10	0,20					

— dla $\dot{S}_1/L^2 \dot{R}_1^{\circ} \ll 1$, $\dot{T}^{\lambda}/L^2(\dot{S}_1^{\circ} + \dot{S}^{\lambda}) \ll 1$ ($\pi_m^{12} = \pi_m^{11} = 1$, $\pi_m^{22} = 1$ lub $\pi_m^{22} = 0$)

$$P_3^f = \frac{12}{L^2} \left(\dot{S}_1^{\circ} + \frac{\dot{S}_1^{\circ} \dot{S}^{\lambda}}{\dot{S}_1^{\circ} + \dot{S}^{\lambda}} \right), \quad \partial \Theta_1^f = \partial \varphi_1^f = A \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$

$$\partial \lambda^f = -\frac{\pi}{2L} \frac{\dot{S}_1^{\circ}}{\dot{S}_1^{\circ} + \dot{S}^{\lambda}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{L},$$
(4.28)

gdzie A jest stałą dowolną.

Tabela 2

[kN] Nr	P_1 ($\times 10^1$)	P_2 ($\times 10^3$)	P_2^b ($\times 10^3$)	P_3 ($\times 10^2$)	P_3^b ($\times 10^2$)	P_3^c ($\times 10^2$)	P_3^d ($\times 10^2$)	P_3^e ($\times 10^2$)	P_3^f ($\times 10^2$)
1	11,4	7,38	7,38	8,06	7,16	3,65	3,54	7,27	7,16
2	22,8	13,5	13,4	16,8	15,3	3,80	3,58	15,6	15,4
3	11,4	11,5	11,5	15,5	14,7	11,2	11,1	14,8	14,7
4	91,3	14,8	14,8	24,2	23,5	12,6	11,7	24,4	23,5
5	11,4	2,80	2,80	6,15	5,35	1,84	1,74	5,46	5,36
6	22,8	6,68	6,62	14,7	13,5	1,99	1,77	13,8	13,6
7	11,4	3,84	3,83	9,53	8,82	5,30	5,22	8,91	8,82
8	91,2	5,60	5,59	18,2	17,6	6,68	5,80	18,5	17,6
9	45,6	8,98	8,29	38,3	30,5	2,24	1,79	31,1	30,7
10	45,6	43,1	42,7	36,5	34,5	6,13	5,70	35,0	34,6
11	36,5	18,0	16,6	210	193	9,48	5,87	198	194
12	22,8	18,6	18,6	10,9	10,8	3,80	3,58	11,0	10,8
13	2,85	9,30	9,29	2,41	2,20	0,75	0,72	2,22	2,20
14	22,8	6,64	6,62	8,03	7,96	0,93	0,73	8,19	7,96
15	11,4	3,84	3,84	5,12	5,02	3,65	3,55	5,13	5,02
16	2,85	4,79	4,80	8,44	7,16	3,57	3,55	7,19	7,16
17	2,85	2,32	2,32	6,51	5,35	1,77	1,74	5,38	5,35
18	5,71	5,35	5,33	15,5	13,5	1,83	1,77	13,6	13,6
19	2,85	0,83	0,83	5,37	4,45	0,86	0,84	4,48	4,45
20	5,70	2,63	2,62	13,9	12,6	0,92	0,87	12,7	12,6
21	11,4	4,00	3,84	30,2	29,7	1,00	0,87	29,9	29,8
22	91,2	8,01	7,68	203	191	3,82	2,92	192	191

Tabela 3

[kN]	R_1^I ($\times 10^5$)	R_2^S ($\times 10^4$)	S_1^0/L^2 ($\times 10^0$)	R_2^S ($\times 10^4$)	R_2^0 ($\times 10^4$)	S_2^0/L^2 ($\times 10^4$)	S_3^0/L^2 ($\times 10^0$)	R_1^0 ($\times 10^4$)	S_1^0/L^2 ($\times 10^2$)	S_1^I/L^2 ($\times 10^0$)	S^2/L^2 ($\times 10^1$)	T^2/L^4 ($\times 10^{-2}$)
Nr												
1	18,0	1,80	4,63	1,80	1,80	1,67	4,63	1,80	1,67	3,35	3,35	4,29
2	36,0	3,60	9,26	1,44	1,80	3,33	37,0	1,80	3,33	10,9	3,35	8,57
3	18,0	1,80	4,63	1,80	1,44	1,67	4,63	3,60	1,67	3,35	10,9	4,29
4	36,0	14,4	37,0	3,60	3,60	3,33	9,26	14,4	13,3	10,9	10,9	34,3
5	18,0	0,45	4,63	0,45	0,90	1,67	4,63	0,90	0,42	3,35	1,67	4,29
6	36,0	0,90	9,26	3,60	0,90	3,33	37,0	0,90	0,83	10,9	1,67	8,57
7	18,0	0,45	4,63	0,45	7,20	1,67	4,63	1,80	0,42	3,35	5,45	4,29
8	36,0	3,60	37,0	0,90	1,80	3,33	9,26	7,20	3,33	10,9	5,45	34,3
9	72,0	1,80	18,5	2,88	0,90	6,67	296	0,90	1,67	26,8	1,67	17,2
10	72,0	1,80	18,5	2,88	7,20	6,67	296	1,80	1,67	26,8	5,45	17,2
11	144	14,4	148	5,76	1,80	13,3	593	7,20	13,3	175	5,45	137
12	36,0	3,60	9,26	3,60	7,20	3,33	9,26	7,20	3,33	6,70	3,35	8,57
13	18,0	0,45	1,16	1,80	3,60	1,67	4,63	0,90	0,42	1,36	0,68	1,07
14	36,0	3,60	9,26	3,60	0,90	3,33	9,26	3,60	3,33	6,70	0,68	8,57
15	18,0	1,80	4,63	0,45	7,20	1,67	1,16	7,20	1,67	1,36	3,35	4,29
16	18,0	1,80	1,16	1,80	1,80	0,42	1,16	1,80	0,42	0,84	0,84	0,27
17	18,0	0,45	1,16	0,45	0,90	0,42	1,16	0,90	0,10	0,84	0,42	0,27
18	36,0	0,90	2,32	3,60	0,90	0,83	9,26	0,90	0,21	2,73	0,42	0,54
19	18,0	0,11	1,16	0,11	0,45	0,42	1,16	0,45	0,026	0,84	0,21	0,27
20	36,0	0,23	2,32	0,90	0,45	0,83	9,26	0,45	0,052	2,73	0,21	0,54
21	72,0	0,45	4,63	7,20	0,45	1,67	74,1	0,45	0,10	6,69	0,21	1,07
22	144	3,60	37,0	14,4	0,90	3,33	148	3,60	0,83	43,6	0,68	8,57

Na podstawie (4.7) - (4.9), (4.17) - (4.28) wyznaczono wartości krytyczne parametru obciążenia P przyjmując

$$E = 3 \cdot 10^7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad \nu = 1/6, \quad \pi_m^{*22} = 1$$

oraz $a_I, a_{II}, d_I = d_{II}, l_I, l_{II}, L, \tilde{L}$ zgodnie z tabeli 1. Rezultaty obliczeń zamieszczono w tabeli 2. Dodatkowo w tabeli 3 podano wartości miar sztywności (zgodnie z numeracją z tabeli 1).

Stwierdzono, że dla rozpatrywanych danych liczbowych różnice między P_1^a, P_2^a, P_3^a oraz odpowiednio P_1, P_2, P_3 nie przekraczają 0,1%, a różnice między P_1 i P_1^b — 0,5%. Z przedstawionych w tabeli 2 wyników wnioskujemy, że wartości P_2, P_2^b praktycznie pokrywają się (poza P_2, P_2^b z pozycji 9, 11, 21, 22 w tabeli 2). Różnic między P_3 oraz P_3^c, P_3^d są bardzo duże. Natomiast zbliżone do siebie na ogół wartości P_3^b, P_3^c, P_3^f w pewnych przypadkach różnią się mało od P_3 , a w innych przypadkach różnią się stosunkowo znacznie, przy czym najbliższa P_3 jest wielkość P_3^c (mniejsza od P_3 , a więc bezpieczna z punktu widzenia projektowania). W rozpatrywanym przykładzie wyniki przybliżone są bliskie ścisłym (w ramach rozważanego modelu) w przypadku giętej postaci wyboczenia, a w przypadku postaci skrętnej obciążone są większymi błędami.

Zauważmy, że wielkości P_{1II}^b/\tilde{L} są dokładnymi wartościami krytycznymi obciążenia dla pręta o długości L i o przekroju prostokątnym $a_I \times d_I$.

5. Uwagi końcowe

Na podstawie uzyskanych w p. 4 rezultatów można wnioskować, że przyjęcie niezależnych parametrów obrotów węzłów w stosunku do parametrów obrotu przekroju $x = \text{const}$ (por. (3.1), (3.13)) ma istotne znaczenie przy formułowaniu jednowymiarowego modelu rozważanego w pracy dźwigara. Oznacza to, że formalne przeniesienie hipotez typu Bernoulli'ego-Timoshenki-Własowa z teorii dźwigarów pełnościennych na konstrukcje siatkowe może prowadzić do znacznych błędów (por. również [4]).

Oczywiście można było przewidzieć, że najmniejszą z wartości krytycznych parametru obciążenia w rozważanym w p. 4 przykładzie jest P_1 i można ją łatwo wyznaczyć w sposób ścisły na podstawie zarówno modelu dyskretnego, jak również dwuwymiarowego modelu ciągłego. Przedstawiona analiza ma przede wszystkim na celu zbadanie stopnia trudności rozwiązywania problemów stateczności w ramach zaproponowanego modelu jednowymiarowego oraz możliwości dalszych jego uproszczeń. Przykłady innych, bardziej technicznie interesujących zagadnień stateczności (jak np. problemu utraty płaskiej postaci zginania) będą przedmiotem dalszych prac autora. Pełniejszego wyjaśnienia wymaga również zakres stosowności omówionego modelu jednowymiarowego.

Spis literatury

1. R. NAGÓRSKI, *Jednowymiarowy ciągły model stateczności sprężystej siatkowych dźwigarów powierzchniowych*, (ibid.).
2. Cz. WOŹNIAK, *On the non-standard continuum mechanics. I. Basic-concepts. Continua with constrained kinematic fields. II. Continua with kinetic and kinematic-kinetic constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci. Serie Sci. Techn., 24, 1, 1976.
3. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970,
4. R. NAGÓRSKI, *Jednowymiarowe modele ciągłe siatkowych dźwigarów powierzchniowych*, Zesz. Nauk. Pol. Warszawskiej, Seria: Budownictwo (w druku).

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ СЕТКООБРАЗНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК

Предметом работы являются линейные уравнения устойчивости прямоугольной сеткообразной пластинки типа роллверк с густой, регулярной ортогональной сеткой призматических элементов. Эти уравнения получены в результате применения представленной в работе [1] идеи построения одномерной непрерывной модели устойчивости сеткообразных поверхностных систем. Для конструкции в форме консоли определены критические параметры нагрузки при осевом состоянии сжатия

Summary

STABILITY OF A ONE-DIMENSIONAL CONTINUOUS MODEL OF LATTICE-TYPE ELASTIC PLATES

The paper deals with linear equations of stability for an elastic grid with dense, regular and orthogonal lattice of prismatic rods. The equations were obtained by applying the concept of the one-dimensional continuous model of the lattice-type surface structures, presented in [1]. The critical values of load for the grid in the shape of cantilever in the state of axial compression were obtained and analysed.

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 listopada 1983 roku