

WPLYW GRUBOŚCI NA NOŚNOŚĆ GRANICZNĄ I STAN ODKSZTAŁCENIA  
PŁASKICH ELEMENTÓW Z KARBAMI PROSTOKĄTNYMI  
O RÓŻNEJ OSTROŚCI

JÓZEF MIASTKOWSKI

*Instytut Podstawowych  
Problemów Techniki PAN  
Warszawa*

1. Wprowadzenie

Znaczna liczba elementów maszyn i konstrukcji inżynierskich ma postać płaskich prętów osłabionych korbami. Karby te są przyczyną koncentracji naprężeń, które mogą znacznie przewyższać średnią wartość naprężeń obliczonych jako iloraz siły przez pole przekroju poprzecznego.

Przy obciążeniach quasi-statycznych określenie rozkładu naprężeń i teoretycznej nośności granicznej płaskich elementów z korbami jest możliwe w dwóch skrajnych przypadkach, a mianowicie, dla płaskiego stanu odkształcenia i dla płaskiego stanu naprężenia.

Rozwiązanie kompletne dla płaskiego stanu odkształcenia jest możliwe, o ile stosunek części poza korbem  $2c$  do przewężenia  $2h$  (rys. 1b) jest na tyle duży, że pole linii poślizgu leży całkowicie wewnątrz konturu pręta [1, 2]. Jeżeli jednak wartość parametru  $\kappa = c/h$  jest mniejsza od wartości wynikającej z przedłużenia siatki linii poślizgu w obszar sztywny (rys. 2), możliwe jest jedynie oszacowanie górnej i dolnej oceny nośności granicznej.

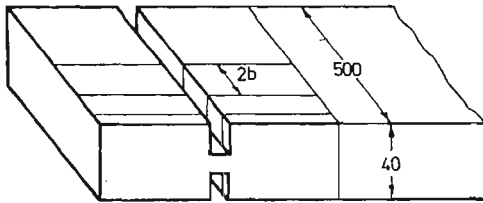
W rzeczywistych konstrukcjach występują często elementy, których grubość (wymiar  $2b$  na rys. 1) nie jest na tyle mała, aby powstał płaski stan naprężenia, ani na tyle duża, aby powstał płaski stan odkształcenia. Powstaje wówczas ważny problem, kiedy teoretyczne schematy płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia mogą stanowić dobre przybliżenie rzeczywistych warunków panujących w elementach o pośredniej grubości. Próba teoretycznej analizy tego zagadnienia, polegająca na doborze odpowiednich pól kinematycznie lub statycznie dopuszczalnych, może dać jedynie przybliżoną ocenę wielkości  $2b$ , niezbędnej dla powstania stanu zbliżonego do płaskiego stanu odkształcenia. Całkowicie pewne informacje mogą być uzyskane jedynie w sposób doświadczalny.

W. S. Żukowski [4, 5, 6] wykazał, że w prętach stalowych z korbami kątowymi stan odkształcenia zbliżony jest do płaskiego dla stosunku  $b/h > 4$ .

W pracy W. Szczepińskiego i J. Miastkowskiego [7] wartość stosunku  $b/h$  jest większa od 2 w prętach stalowych z korbami prostokątnymi o zaokrąglonych narożach.

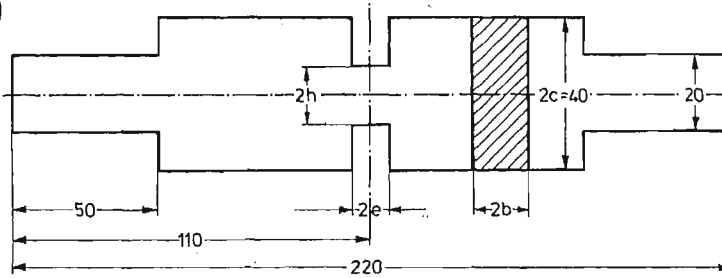
W pracy W. N. Findleya i D. C. Druckera [8] wartość stosunku  $b/h = 7$  dla płaskich prętów aluminiowych oraz  $b/h = 4$  dla próbek stalowych osłabionych odpowiednio nacięciami kątowymi i prostokątnymi z zaokrąglonymi narożami.

a)

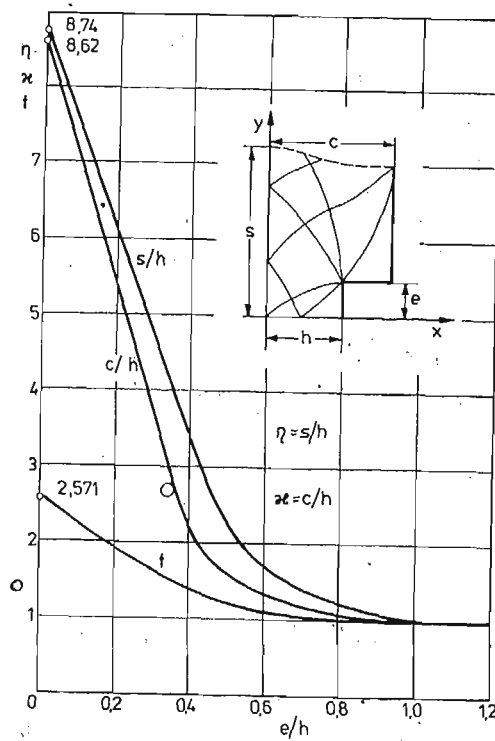


Materiał	PA 2 (Al Mg 2)
Liczba próbek	45
$2h_s$ [mm]	6,8
$\alpha = c/h$	5,9

b)



Rys. 1



Rys. 2

W pracy autora [9] stwierdzono, że w prętach ze stopu aluminium, osłabionych korbami kątowymi, płaski stan odkształcenia praktycznie realizuje się już dla stosunku  $b/h > 3$ .

Z przytoczonego przeglądu prac wynika duża różnorodność ocen wartości granicznej parametru  $\lambda = b/h$ , którą dla celów praktycznych można z dobrym przybliżeniem przyjmować za początek realizowania się w elementach z korbami płaskiego stanu odkształcenia. Podstawową przyczyną tej rozbieżności jest to, że w pracach tych badania przeprowadzane były w sposób wycinkowy i fragmentaryczny. Wyniki te więc nie dają podstaw do uogólnień, zwłaszcza, że badania przeprowadzono na próbkach wykonanych z różnych materiałów i osłabionych korbami o odmiennych konfiguracjach.

Próbie wyjaśnienia tego zagadnienia podjął autor w pracy [10] w oparciu o badania płaskich elementów wykonanych z dwóch różnych stopów aluminium i osłabionych korbami okrągłymi o różnej ostrości. Stwierdzono, że w przypadku karbu okrągłego, graniczna wartość stosunku grubości do przewężenia, powyżej której w elemencie powstają warunki płaskiego stanu odkształcenia, waha się od 2 do 7,5. Wartość ta zależy od rodzaju materiału i od ostrości karbu. W świetle tych wyników łatwiej zrozumieć spotykaną w literaturze różnorodność ocen granicznej wartości parametru  $\lambda = b/h$ .

W prezentowanej pracy zajęto się pokrewnym zagadnieniem, a mianowicie podjęto próbę określenia warunków powstawania płaskiego stanu odkształcenia w elementach osłabionych korbami prostokątnymi o różnej ostrości.

## 2. Rozwiązanie sztywno-plastyczne dla płaskiego stanu odkształcenia

Teoria stanu naprężenia i odkształcenia w płaskim pręcie osłabionym obustronnie symetrycznymi wycięciami i poddanym rozciąganiu jest oparta na założeniu, że panuje w nim płaski stan odkształcenia. Teoretycznie nastąpi to wtedy, gdy stosunek  $b/h$  (rys. 1b) dąży do nieskończoności. Jednakże, jak wykazują wyniki badań doświadczalnych, rozwiązania dla płaskiego stanu odkształcenia mają praktyczne znaczenie już przy grubości  $b$  kilkakrotnie przewyższającej charakterystyczny wymiar  $h$ . Określenie więc na drodze eksperymentalnej, kiedy teoretyczne schematy płaskiego stanu odkształcenia mogą stanowić dobre przybliżenie rzeczywistych warunków, stanowi istotny problem naukowy. Jest to o tyle ważne, że w wielu rzeczywistych konstrukcjach występują elementy o skończonej wartości stosunku  $b/h$ .

Wyznaczenie obciążenia granicznego elementów osłabionych symetrycznymi nacięciami o dowolnym kształcie oparte jest na założeniu, że cały najwęższy przekrój ulegnie uplastycznieniu. Stan naprężenia w sąsiedztwie brzegu jest wówczas zależny jedynie od istniejących na nim warunków. Kontur karbu jest brzegiem swobodnym, a więc warunki brzegowe są na nim jednoznacznie określone. Rozwiązując zagadnienie brzegowe Cauchy'ego można wyznaczyć z obu stron symetryczne siatki linii poślizgu do osi pręta (wstawka na rys. 2). Metoda podana przez R. Hilla [11] pozwala obliczyć w sposób numeryczny rozkład naprężeń i nośność graniczną dla dowolnego kształtu karbu [2]. Analiza teoretyczna wykazuje, że naprężenia normalne na osi próbki z korbami są znacznie większe od naprężeń równych granicy plastyczności materiału  $\sigma_{pl}$ , występujących w skrajnych punktach zewnętrznych [2]. Rozkład naprężeń normalnych zależy od kształtu karbu. W pewnych przypadkach

naprężenia na osi są przeszło dwu i półkrotnie większe od  $\sigma_{p1}$ . Jak wiadomo, jest to związane z istnieniem trójosiowego stanu naprężenia w wewnętrznych punktach najmniejszego przekroju. Taki rozkład naprężeń w chwili połączenia się obszarów plastycznych powoduje, że nośność graniczna  $P_{p1}^*$  prętów z karbem jest większa niż prętów gładkich o takim samym przekroju  $P_{p1}$ . Liczbowe ujęcie tego zjawiska określa współczynnik zwiększenia nośności granicznej  $f$  określany z zależności:

$$f = \frac{P_{p1}^*}{P_{p1}}$$

Dla rozpatrywanych w pracy karbów prostokątnych wykres wartości współczynnika zwiększenia nośności granicznej  $f$  w funkcji ostrości karbu  $\beta = e/h$  przedstawiono na rys. 2.

**2.1. Przedłużenie siatki linii poślizgu w obszar sztywny.** Całkowitą pewność, że maksymalna siła, określona nośnością graniczną najmniejszego przekroju, może być przeniesiona przez pozostałe przekroje elementu bez naruszenia warunku plastyczności, można uzyskać budując przedłużenie siatki linii poślizgu z otoczenia nacięć na przylegające obszary (wstawka na rys. 2) [2]. Pozwala to określić optymalną szerokość  $2c$  (rys. 1) części nieosłabionych. Sposób budowy przedłużenia siatki linii poślizgu w obszar sztywny podał J. F. W. Bishop [1]. Tak zbudowane pole naprężeń w sztywnej części pręta jest statycznie dopuszczalne. Określone na tej podstawie bezpieczne szerokości części chwytowych dla elementów osłabionych karbami o dowolnych kształtach przedstawione zostały w opracowaniu [2]. Dla rozpatrywanego w pracy przypadku elementu z nacięciami prostokątnymi wykres bezpiecznej szerokości części poza karbem  $\kappa = c/h$  w funkcji ostrości karbu  $\beta = e/h$  podano na rys. 2.

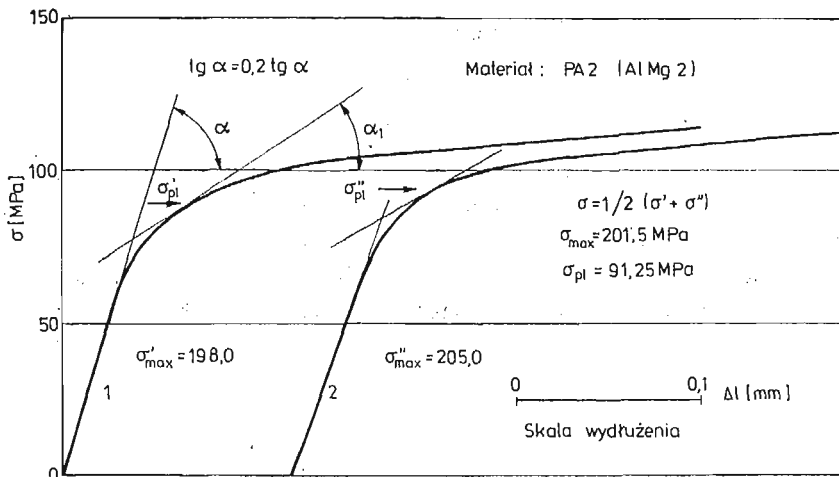
Drugą charakterystyczną wielkością przedłużenia w obszar sztywny siatki linii poślizgu jest wymiar  $s$  (rys. 2). Wymiar ten ma duże znaczenie praktyczne, zwłaszcza przy analizie nośności granicznej elementów z wieloma karbami. Pozwala ocenić minimalną odległość między nimi, przy której ich wzajemny wpływ zanika. Wykres  $\eta = s/h$  w funkcji  $\beta = e/h$ , dla rozpatrywanego przypadku karbów prostokątnych, podano również na rys. 2.

### 3. Doświadczalne badanie stanu odkształcenia w elementach z karbami prostokątnymi

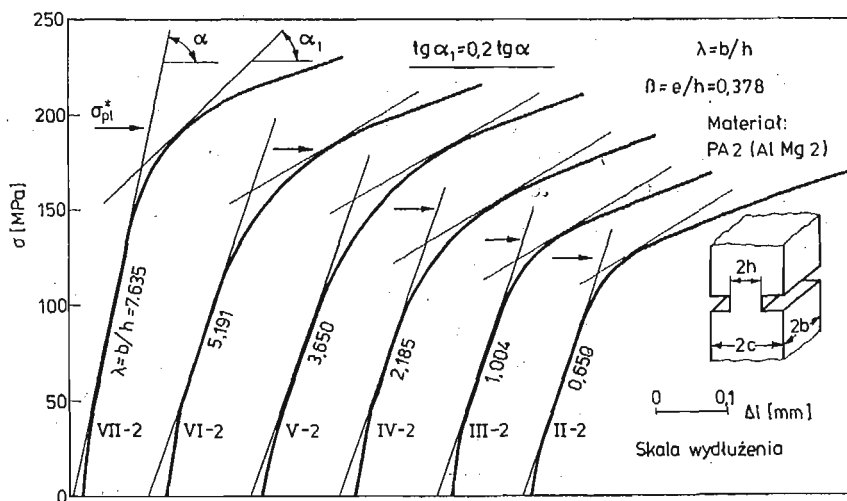
**3.1. Przebieg doświadczenia.** Próbkki do badań wykonano ze stopu aluminium PA2 (AlMg2). Kształt karbu oraz wymiary próbek podane zostały na rys. 1b. Łącznie z próbkami bez karbu (dwie próbki) badaniom poddano 47 próbek. Wszystkie próbki miały stałą wartość wymiarów  $2h$  i  $2c$ , przy czym szerokość części chwytowej  $2c$  była tak określona, aby w żadnym z rozpatrywanych przypadków nie była mniejsza od wynikającej z przedłużenia linii poślizgu w obszar sztywny (rys. 2). Końce próbek, przeznaczone do mocowania w uchwytach zrywarki, mają celowo zmniejszoną szerokość, aby zwiększyć osiowość obciążania i zapobiec ewentualnemu ich zginaniu w procesie rozciągania. Warto podkreślić, że wszystkie próbki, zarówno z karbami, jak i bez karbu, były wycinane z płyty w jednym określonym kierunku (rys. 1a). Próbkki z karbami podzielono na 5 grup, które różniły się między sobą ostrością karbów  $\beta = e/h$ . Wartości pięciu parametrów  $\beta$ , charakterystycznych dla

każdej grupy, podano na rys. 7. W każdej grupie było pięć próbek o różnej grubości (rysunki: 4, 5 i 6).

Odształcenia mierzono z dokładnością do 0,001 mm za pomocą dwóch tensometrów mechanicznych umieszczonych po obu stronach próbki na bazie pomiarowej 60 mm. Wydłużenie określano jako średnią wartość wskazań obu czujników. Mierzenie odkształceń na dwóch przeciwległych powierzchni próbki  $\pm b$  pozwoliło sprowadzić do minimum błędy pomiaru wydłużeń powstające w wyniku ewentualnego zginania próbki. Stwierdziło, że powyższa metoda badań zapewniła otrzymanie dobrych wyników doświadczeń. Wykresy krzywych obciążenie-wydłużenie cechowała duża regularność przebiegu. Typowe krzywe rozciągania próbek gładkich i z karbami pokazano odpowiednio na rys. 3 i 4. Wobec braku na krzywych wyraźnego momentu pełnego uplastycznienia przekroju określano umowną



Rys. 3



Rys. 4

granice plastyczności. Utożsamiano ją z punktem, w którym moduł stycznej osiągał wartość  $0,2 \operatorname{tg} \alpha$ . Przez  $\alpha$  oznaczono kąt, jaki tworzy początkowo prostoliniowa część wykresu z osią wydłużeń (rys. 3 i 4). Określone w powyższy sposób wartości umownych granic plastyczności były podstawą do określenia współczynnika zwiększenia nośności granicznej  $f$  (rys. 7) oraz do określenia grubości granicznej, przy której w elemencie pojawia się stan odkształcenia zbliżony do płaskiego.

**3.2. Wyniki badań.** Materiał PA2, z którego wykonano próbki, jest bardzo podatny do obróbki plastycznej na gorąco i na zimno. Stosowany jest do wyrobu średnio obciążonych elementów konstrukcji lotniczych, okrętowych, budowlanych i pojazdów mechanicznych, a także urządzeń przemysłu chemicznego i spożywczego. Umowna granica plastyczności, określona wyżej opisaną metodą stycznej,  $\sigma_{p1} = 91,25 \text{ MPa}$ . Wytrzymałość na rozciąganie  $\sigma_m = 201,5 \text{ MPa}$ . Określano ją z zależności:

$$\sigma_m = \frac{P_{\max}}{F_0},$$

gdzie  $P_{\max}$  jest największą siłą rozciągającą działającą na próbkę, a  $F_0$  — powierzchnią przekroju poprzecznego próbki. Wartości umownej granicy plastyczności i wytrzymałości na rozciąganie są określone jako średnie z dwóch prób (rys. 3).

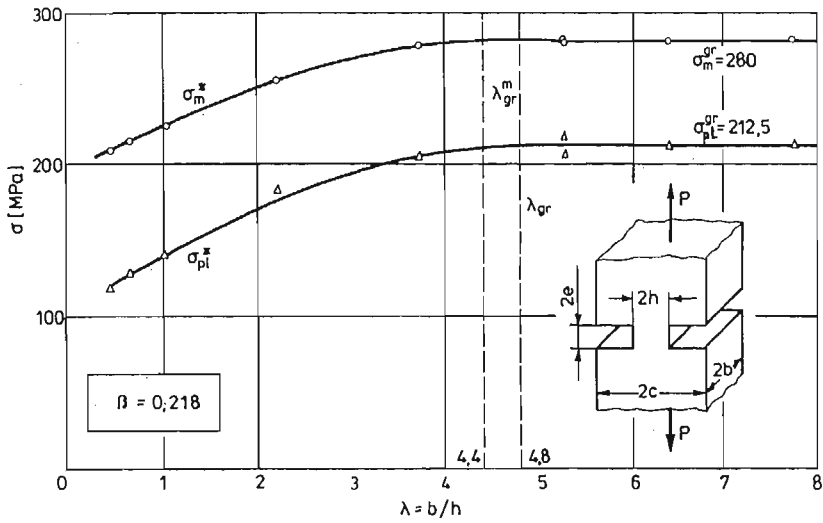
Na podstawie badań elementów z korbami określono wartości granic plastyczności  $\sigma_{p1}^*$ , wytrzymałości  $\sigma_m^*$ . Wytrzymałość na rozciąganie określano, podobnie jak próbek bez karbu, z zależności:

$$\sigma_m^* = \frac{P_{\max}^*}{F_0},$$

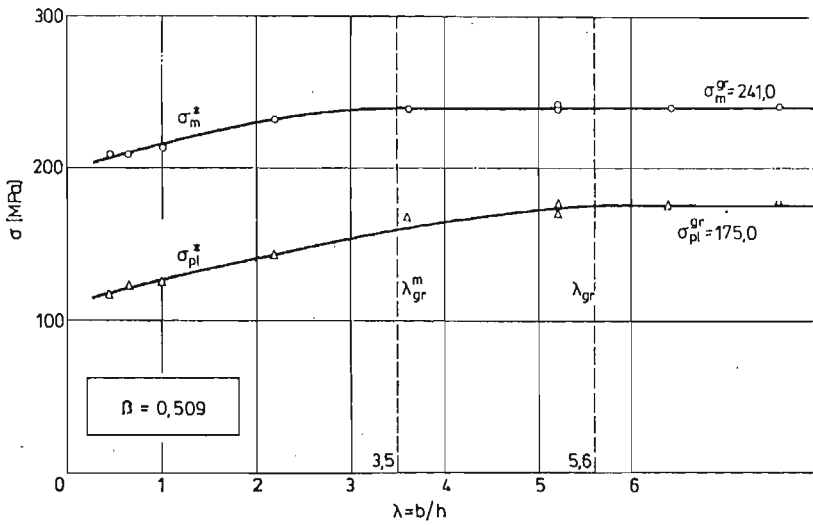
gdzie  $P_{\max}^*$  jest największą siłą rozciągającą próbkę z korbem.

Otrzymane wartości  $\sigma_{p1}^*$  i  $\sigma_m^*$  były podstawą do sporządzenia wykresów tych wielkości w funkcji grubości  $\lambda = b/h$ . Wykresy te wyznaczono dla pięciu grup próbek, a więc dla wszystkich pięciu wartości parametru  $\beta = e/h$  charakteryzujących ostrość karbu. Na rys. 5 i 6 podano przykładowo przebieg tych wykresów dla dwóch wartości  $\beta$ .

Rozpatrzmy teraz przebieg wykresu  $\sigma_{p1}^*$  na rys. 5. Widać wyraźnie, że zależność ta ma początkowo przebieg krzywoliniowy, a następnie przechodzi w prostoliniową fazę ustabilizowaną. Prostoliniowa część wykresu bierze początek w punkcie przecięcia z przerywaną linią o równaniu  $\lambda = 4,8$ . Oznacza to, że od wartości  $\lambda = 4,8$  przyrost grubości próbki nie ma wpływu na wielkość granicy plastyczności. Można więc uważać, że w rozpatrywanym przypadku dla  $\lambda \geq 4,8$  w elemencie realizuje się stan odkształcenia bliski płaskiemu. Tę wartość parametru  $\lambda$ , od której bierze początek prostoliniowa faza wykresu  $\sigma_{p1}^*$ , nazwano wartością graniczną i oznaczono przez  $\lambda_{gr}$ . W podobny sposób określono wartości graniczne parametru  $\lambda_{gr}$  dla pozostałych grup próbek, osłabionych korbami o innej ostrości. Drugi taki przykład podano na rys. 6. W tym przypadku  $\lambda_{gr} = 5,6$ . Przebieg pozostałych wykresów podano w postaci zależności współczynnika zwiększenia nośności granicznej  $f$  w funkcji grubości  $\lambda = b/h$  (rys. 7). Z rys. 7 wynika, że najszybciej stabilizuje się wykres odpowiadający korbom o największej ostrości. W elementach osłabionych nacięciami łagodnymi, stan graniczny pojawia się znacznie później, a więc dla większych grubości.



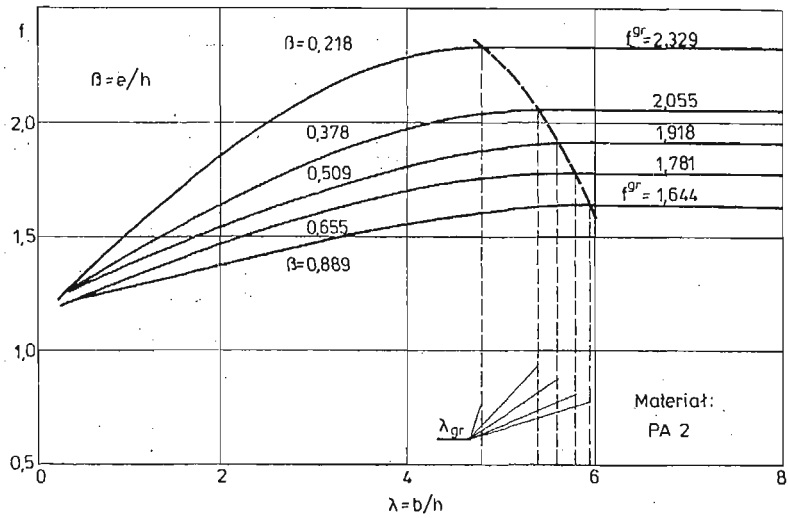
Rys. 5



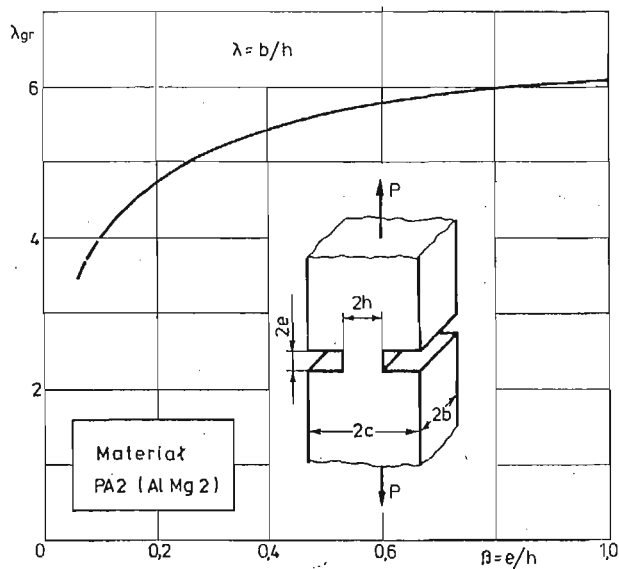
Rys. 6

Obok wykresów odpowiadających granicy plastyczności  $\sigma_{pl}^*$ , dla wszystkich pięciu grup próbek sporządzono także wykresy wytrzymałości na rozciąganie  $\sigma_m^*$  w funkcji grubości  $\lambda = b/h$ . Widać wyraźnie, że wartości graniczne grubości są różne dla  $\sigma_{pl}^*$  i  $\sigma_m^*$ .

Na rysunku 8 podano wykres parametru  $\lambda_{gr}$ , charakteryzującego graniczną grubość elementu osłabionego nacięciami prostokątnymi, w funkcji ostrości karbu  $\beta = e/h$ . Przebieg krzywej wskazuje, że w elementach osłabionych karbami ostrymi graniczne grubości są niższe od tych, które odpowiadają karbom o mniejszej ostrości.



Rys. 7



Rys. 8

#### 4. Wnioski

Na podstawie wyników przeprowadzonych badań można stwierdzić, że ostrość karbu jest istotnym czynnikiem warunkującym pojawienie się w rzeczywistym elemencie stanu granicznego zbliżonego do płaskiego stanu odkształcenia.

W elementach osłabionych nacięciami ostrymi stan graniczny pojawia się szybciej (przy mniejszej grubości), niż to ma miejsce w prętach z karami łagodnymi, o dużych szerokościach  $2e$  (rys. 8).



## Literatura

1. J. F. W. BISHOP: *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 1953, 43 - 53.
2. L. DIETRICH, J. MIĄSTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI: *Nośność graniczna elementów konstrukcji*, PWN Warszawa, 1970.
3. D. C. DRUCKER: *On obtaining plane strain or plane stress conditions in plasticity*, Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 485 - 488.
4. В. С. Жуковский: *Распределение деформаций и напряжений в плоских надрезанных стержнях в связи с объемностью напряженного состояния*, Проблемы прочности в машиностроении, Вып. 2, Изд. АН СССР, Москва 1959.
5. В. С. Жуковский: *О коэффициенте усиления и характере распространения пластических зон в надрезанных стержнях*, Изв. АН СССР, ОТН, 5, 1958, 116—119.
6. В. С. Жуковский: *Деформированное состояние и прочность плоских надрезанных стержней произвольной толщины*, Расчеты на прочность, сборник статей, вып. 9, Машгиз., Москва 1963, 231 - 252.
7. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIĄSTKOWSKI: *Doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganych płaskich prętów z karbem*, Rozprawy Inżynierskie, 3, 13, 1965, 637 - 652.
8. W. N. FINDLEY, D. C. DRUCKER: *An experimental study of plane plastic straining of notched bars*, J. Appl. Mech., 32, 1965, 493 - 503.
9. J. MIĄSTKOWSKI: *Nośność graniczna rozciąganych prętów z karbem kątowym o dowolnych wymiarach części nad karbami*, Mech. Teoret. Stosow., 1, 7, 1969, 81 - 98.
10. J. MIĄSTKOWSKI: *Analiza nośności granicznej płaskich elementów o dowolnej grubości osłabionych okrągłymi karbami o różnej ostrości*, Rozprawy Inżynierskie, 2, 32, 1984.
11. R. HILL: *The plastic yielding of notched bars under tension*, Quart, J. Mech. Appl. Math., 2, 1949, 40.

## Резюме

ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕЙ  
С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ НАДРЕЗАМИ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Приводятся результаты экспериментального исследования влияния толщины образца с прямоугольным надрезом различной геометрии на его несущую способность.

Определены предельные толщины стержней, при которых реализуется плоское деформированное состояние.

## Summary

THE INFLUENCE OF THE THICKNESS ON THE YIELD LOAD OF ELEMENTS WITH  
A RECTANGULAR NOTCH OF VARIOUS GEOMETRY

The influence of the thickness on the yield load of elements with a rectangular notch of various geometry was tested. The limit values of the thickness for which practically the plane state of strain occurs were determined.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 listopada 1983 roku*