

METODA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RUCHU PRZY INERCYJNYCH OBCIĄŻENIACH RUCHOMYCH

ANDRZEJ RADZIECKI

Politechnika Gliwicka

1. Wstęp

Problem dynamicznych obliczeń konstrukcji mostowych jest złożony. Występuje w nim znaczna liczba parametrów i nie udało się go dotychczas w pełni rozwiązać.

Istotne ożywienie w rozwiązywaniu zagadnienia drgań nieustalonych konstrukcji, m.in. przy obciążeniach ruchomych, wnosi elektroniczna technika obliczeniowa. Szczególnego znaczenia nabrały przy tym modele dyskretne i oparte na nich metody macierzowych analiz konstrukcji, w tym zwłaszcza metoda elementów skończonych. Mimo postępu w matematycznym modelowaniu pracy układów dynamicznych, osiągnięte rezultaty nie mogą zadowalać. Jak wynika z analizy dotychczasowych prac w tej dziedzinie, charakteryzują się one podejściem polegającym na rozwiązywaniu odrębnych przypadków. Bardziej złożone geometrycznie układy, wymagające nawet w dyskretnych modelach obliczeniowych znacznej liczby współrzędnych, przy inercyjnym traktowaniu obciążeń prowadzą do dużych układów liniowych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach, których rozwiązywanie jest bardzo czasochłonne. Wynika to z konieczności bezpośredniego całkowania krok po kroku pełnego układu (por. YOSHIDA, WEAVER [1], BOROWICZ [2]), postępowanie takie wymaga generowania i odwracania macierzy współczynników w każdym kroku całkowym, przy czym macierze te, jak i postać wektora obciążeń, wyznaczone są na podstawie funkcji kształtu.

W pracy przedstawiona zostanie efektywna metoda formowania i rozwiązywania równań ruchu konstrukcji poddanych obciążeniom zmiennym zarówno w czasie, jak i w przestrzeni. W szczególności rozważa się ogólny przypadek inercyjnych obciążeń skupionych. Obciążenia te mogą być traktowane jako grupy mas lub lepkosprężystych oscylatorów pozostających względem siebie w dowolnie zmieniającym się układzie.

2. Idea metody

W proponowanej metodzie wprowadza się oprócz stosowania dyskretyzacji geometrycznej również dyskretne podejście do opisu wielkości będących funkcją czasu. Jako punkt wyjścia przyjęto podstawowe równanie dynamiczne metody elementów skończonych,

opisujące zachowanie się konstrukcji sprężystych z liniowym tłumieniem, w postaci podanej przez ZIENKIEWICZA [3]:

$$\mathbf{K}\delta + \mathbf{C}\dot{\delta} + \mathbf{M}\ddot{\delta} + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

przy czym w rozpatrywanym przypadku oprócz wektora \mathbf{F} także macierze sztywności, tłumienia i mas (\mathbf{K} , \mathbf{C} i \mathbf{M}) są zmienne w czasie. Do rozwiązania zagadnienia dochodzi się drogą następującego rozumowania. Załóżmy, że wystarczająca jest znajomość usytuowania obciążeń tylko w wybranych stosunkowo odległych chwilach czasu t_1, t_2, \dots, t_m . Zdeterminowane w tych chwilach stany obciążenia układają się w kolejne „zdjęcia migawkowe” przebiegu całego procesu obciążenia. Jeśli dodatkowo, w miejscu położenia każdego obciążenia w wydzielonych chwilach t_i , występuje węzeł (stopień swobody) generowanie macierzy \mathbf{K}_{t_i} , \mathbf{C}_{t_i} i \mathbf{M}_{t_i} oraz wektora \mathbf{F}_{t_i} , może odbywać się bezpośrednio na podstawie odpowiednich macierzy ustroju nieobciążonego, bez stosowania funkcji kształtu. W tym celu wprowadza się dwa kryteria doboru węzłów siatki podziału ustroju na elementy. Obok kryterium dotychczas stosowanego, jakim jest właściwe oddanie cech geometryczno-materiałowych obliczanego ustroju, wprowadza się nowe, polegające na takiej ich lokalizacji, by w chwilach t_i każde z obciążeń znajdowało się w węźle (rys. 1). Jeśli teraz

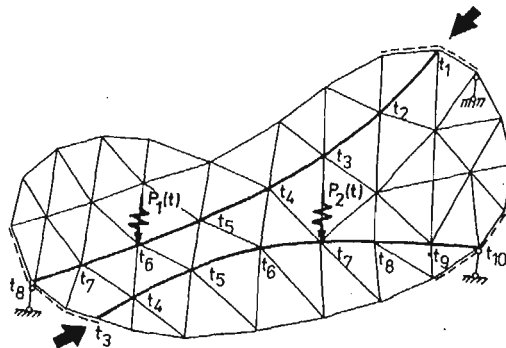


Fig. 1

przyjmemy, że znany nam jest wpływ zachowania się układu w odcinkach czasowych pomiędzy „zdjęciami” (zagadnienie to przedstawiono w pracy), to dysponując tak usytuowanymi węzłami, przebieg zmienności obciążeń i odpowiadającą mu modyfikację macierzy współczynników można opisać i wyznaczyć, deklarując jedynie numery stopni swobody, określające położenia obciążeń w chwilach czasu, przyjętych jako obligatoryjne. Obowiązuje przy tym założenie, że ruch pomiędzy kolejnymi chwilami odbywa się po torze prostym, z prędkością średnią.

Udogodnienie powyższe występuje również po przeprowadzeniu transformacji redukującej liczbę stopni swobody [3, 4] (tzw. kondensacji stopni swobody) pod warunkiem zachowania tych, które wydzielone zostały ze względu na drugie kryterium. Dokonać jej można przez transformację układu współrzędnych uogólnionych:

$$\delta = \mathbf{L}\delta^*, \quad (2.2)$$

gdzie δ — wektor (u) przemieszczeń węzłowych układu wyjściowego, δ^* — wektor (n) przemieszczeń węzłowych układu zredukowanego, L — prostokątna ($u \times n$) macierz redukcji.

Macierz L może być znajdowana w sposób oparty na analogii fizycznej (por. np. [5]), a następnie macierze sztywności i mas, zredukowane do wybranych stopni swobody, otrzymujemy z zależności

$$K^* = L^T K L, \quad M^* = L^T M L. \quad (2.3)$$

Po takiej redukcji przestaje mieć znaczenie typ modelowanej konstrukcji, istotne są tylko numery identyfikacyjne pozostawionych stopni swobody, przy czym nawet znaczne zmniejszenie ogólnej bazy współrzędnych (np. na skutek wyeliminowania obrotowych stopni swobody) nie ma większego wpływu na wartości podstawowych parametrów dynamicznych konstrukcji, a przyczynia się zdecydowanie do podniesienia efektywności dalszych operacji matematycznych.

3. Formowanie macierzowego równania ruchu

Istnieją dwa podstawowe modele inercyjnych obciążeń ruchomych; masa poruszająca się bezpośrednio po konstrukcji i oscylator, czyli masa, której działanie przekazuje się za pośrednictwem więzi sprężystej z liniowym tłumieniem. W obu przypadkach przemieszczenia poprzeczne odcinka toru, na którym aktualnie występuje obciążenie, można wyrazić przez wartości przemieszczeń węzłowych oraz założonych funkcji aproksymacyjnych (kształtu). Na rysunku 2 pokazano odcinek toru zawarty pomiędzy punktami $s(t_{i-1})$

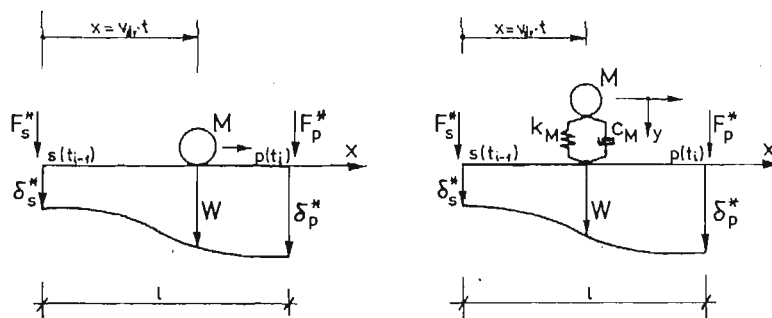


Fig. 2

i $p(t_i)$, w których występują stopnie swobody δ_s^* i δ_p^* . Punkty te identyfikują również położenie obciążenia we współrzędnej czasu. Przemieszczenie „śledzące” W wyrażamy ziążkiem

$$W = N \delta_l^*, \quad (3.1)$$

gdzie N — funkcja kształtu, δ_l^* — wektor przemieszczeń węzłowych końców odcinka toru.

Przyjmując, że obciążenie przesuwa się po odcinku ze stałą prędkością

$$v_{sr} = \frac{l}{t_i - t_{i-1}} = \frac{l}{\Delta t_i}, \quad (3.2)$$

bezwymiarową zmienną geometryczną można wyrazić również jako bezwymiarową zmienną czasu

$$\xi t = \frac{x}{l} = \frac{v_{sr}t}{l} = \frac{t}{\Delta t_i}. \quad (3.3)$$

Zakładając funkcje kształtu w postaci hermitowskich wielomianów sześciennych, związek (3.1) zapisujemy

$$w(\xi t, t) = \mathbf{N}(\xi t) \delta_i^*(t) = [1 - 3(\xi t)^2 + 2(\xi t)^3, 3(\xi t)^2 - 2(\xi t)^3] \begin{Bmatrix} \delta_s^* \\ \delta_p^* \end{Bmatrix}, \quad (3.4)$$

a uwzględniając ponadto (3.3), kolejne pochodne czasowe przemieszczenia śledzącego wyrażają wzory:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{1}{\Delta t_i} \mathbf{N}' \delta_i^* + \mathbf{N} \frac{d\delta_i^*}{dt}, \\ \frac{d^2W}{dt^2} &= \frac{1}{\Delta t_i^2} \mathbf{N}'' \delta_i^* + 2 \frac{1}{\Delta t_i} \mathbf{N}' \frac{d\delta_i^*}{dt} + \mathbf{N} \frac{d^2\delta_i^*}{dt^2}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

symbolem (') oznaczono pochodną po zmiennej geometrycznej.

W przypadku obciążeń masą nieresorowaną M , wektor obciążeń węzłowych (równoważników obciążeń zewnętrznych) przyjmuje postać ,

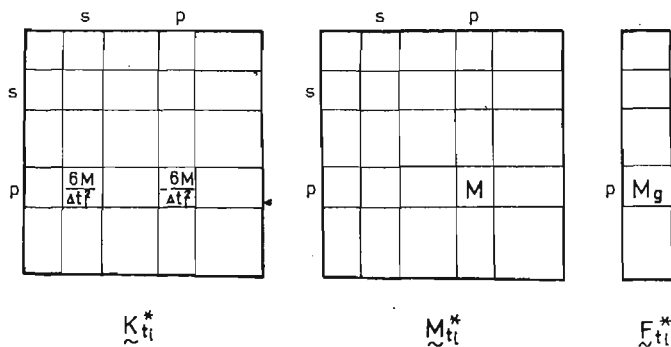
$$\mathbf{F}_i^* = \begin{Bmatrix} F_s^* \\ F_p^* \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^T(\xi t) P(t) = \mathbf{N}^T(\xi t) \left(Mg - M \frac{d^2W}{dt^2} \right) \quad (3.6)$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim.

Ostatecznie po uwzględnieniu (3.5) przy wartości $\xi t = 1,0$ odpowiadającej położeniu obciążenia w punkcie $p(t_i)$ (por. [6]), otrzymujemy

$$F_s^* = 0, \quad F_p^* = Mg - 6 \frac{1}{\Delta t_i^2} M \delta_s^* + 6 \frac{1}{\Delta t_i^2} M \delta_p^* - M \ddot{\delta}_p^*. \quad (3.7)$$

Wprowadzając powyższe wyrażenie na siłę do równania p układu i grupując składowe zależne od niewiadomych δ_s^* oraz δ_p^* i jej pochodnej otrzymujemy schemat (rys. 3) modyfikacji macierzy sztywności i mas oraz generowania wektora obciążeń w chwili t_i .



Rys. 3

W analogiczny sposób określany może być udział wszystkich mas ruchomych znajdujących się w danym momencie na konstrukcji i tym samym wygenerowanie bloków $\mathbf{K}_{t_i}^*$, $\mathbf{M}_{t_i}^*$ i $\mathbf{F}_{t_i}^*$. W rozważanym przypadku obciążenia, macierze $\mathbf{K}_{t_i}^*$ stają się niesymetryczne. Jest to wynik uwzględniania wpływu przyspieszenia Coriolisa. W proponowanej dalej metodzie rozwiązania równań ruchu o zmiennych współczynnikach, wpływ ten pominięto. Uproszczenie to nie ma większego znaczenia, gdy się weźmie pod uwagę realne prędkości obciążeń i wartości przemieszczeń konstrukcji, a pozwoli zachować symetryczność wszystkich macierzy układu.

W przypadku obciążeń masą M na zawieszeniu sprężystym o charakterystyce k_M z tłumieniem o współczynniku c_M , współrzędne wektora obciążeń węzłowych wynoszą

$$\mathbf{F}_{t_i}^* = \mathbf{N}^T(\xi t)P(t) = \mathbf{N}^T(\xi t) \left[Mg + k_M(y - W) + c_M \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dW}{dt} \right) \right] \quad (3.8)$$

oraz równanie równowagi ruchomej więzi sprężystej (rys. 2b)

$$F_M = M \frac{d^2y}{dt^2} + c_M \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dW}{dt} \right) + k_M(y - W) = 0 \quad (3.9)$$

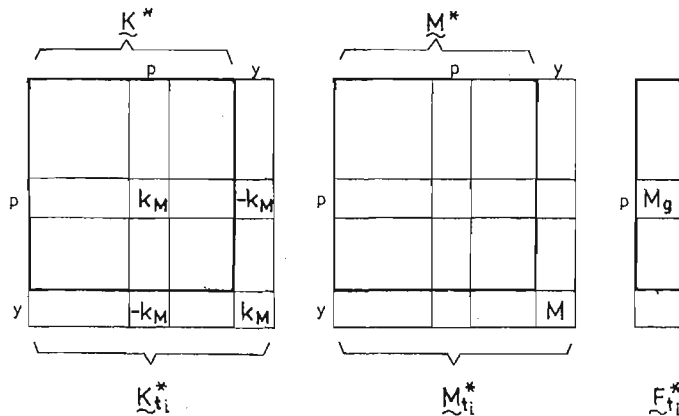
gdzie y współrzędna wychyleń masy na zawieszeniu sprężystym.

Dla wartości $\xi t = 1,0$ otrzymujemy:

$$F_s^* = 0, \quad F_p^* = Mg - k_M \delta_p^* - c_M \dot{\delta}_p^* + k_M y + c_M \dot{y}, \quad (3.10)$$

$$-k_M \delta_p^* - c_M \dot{\delta}_p^* + k_M y + c_M \dot{y} + M \ddot{y} = 0. \quad (3.11)$$

Dołączenie dodatkowego równania (3.11) do układu równań równowagi dynamicznej ustroju wyjściowego, na skutek pojawienia się nowego, (przemieszczającego się) stopnia swobody y , powoduje rozszerzenie macierzy współczynników układu. Schemat modyfikacji macierzy sztywności i mas oraz generowania wektora obciążeń w chwili t_i przedstawiono na rysunku 4. I tym razem możliwe jest uwzględnienie wielu różnych oscylatorów. Ulega wówczas zwiększeniu w odpowiednim stopniu liczba współrzędnych, nie wpływa to jednak na sposób generowania powyższych macierzy.



Rys. 4

Rozwiązanie tych równań przy wykorzystaniu maszyn cyfrowych nie nastęca większych trudności, niewiadome wartości funkcji i jej pochodnych obliczane mogą być przez zastosowanie jednej ze znanych metod całkowania numerycznego. Po określeniu wektorów z , \dot{z} i \ddot{z} w wybranych punktach czasu, wyrażenie tych wielkości w bazie współrzędnych naturalnych odbywa się na podstawie transformacji (4.2). W przypadku niepokrywania się założonych na wstępie obligatoryjnych chwil z tymi punktami na osi czasu, w których chcemy uzyskać parametry ruchu konstrukcji, zachodzi konieczność interpolacji wartości wektorów własnych.

Wprowadzenie oscylatora zmienia rozpatrywany układ w sposób jakościowy, prowadząc również do zmiany jego widma częstości drgań własnych. Zazwyczaj jednak częstość drgań własnych oscylatora znajduje się w dolnych rejonach tego widma i gdy sprzężenie jest w istocie znaczące, nie występuje niebezpieczeństwo pominięcia jego wpływu przy odrzuceniu równań odpowiadających dalszym częstościom. Współczynnik tłumienia równania związanego z częstością oscylatora można przyjąć jako stały i określić z zależności $2\gamma = c_M/M$. Zastosowanie analizy modalnej pozwala również uniknąć generowania i następnie dalszego przekształcenia macierzy tłumienia ustroju, której postać (w aspekcie złożoności zjawiska) jest trudna do określenia. W zbiorze współrzędnych głównych istnieje mianowicie możliwość określania współczynników tłumienia nie tylko według hipotezy tłumienia masowego czy tłumienia reologicznego wg wariantu Voigta, ale również według hipotezy ustalonego dekrementu, tłumienia mogą one być wreszcie specyfikowane indywidualnie dla każdej postaci.

5. Przykład

Opierając się na przedstawionej metodzie dokonano rozbudowy systemu programowego IDIM-34 [7]. Nowa konfiguracja systemu [5] pozwoliła zachować jego otwartość.

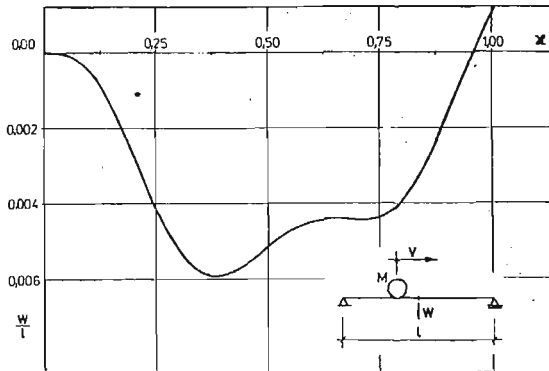
W pracy przedstawiono analizę dwóch przykładów, do których dane ustalono na podstawie obliczeń zamieszczonych w pracy [2]. Belkę swobodnie podpartą obciąża się raz masą nieresorowaną i drugi raz tą samą masą na zawieszeniu liniowo-sprężystym z tłumieniem. Obciążenia poruszały się ze stałymi prędkościami. Obliczenia prowadzone były dla trzech różnych modeli ustroju charakteryzujących się różną liczbą stopni swobody. Modele te, oznaczone B4, B8 i B16 składają się odpowiednio z 4, 8 i 16 elementów prętowych o równych długościach (oznaczonych l_1 , l_2 i l_3).

Dane fizyczne belki wynoszą: moduł sprężystości $E = 21 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$, moment bezwładności $J = 0,01 \text{ m}^4$, pole powierzchni przekroju $F = 0,1 \text{ m}^2$, długość belki $l = 20,0 \text{ m}$, długości elementów; $l_1 = 5,0 \text{ m}$, $l_2 = 2,5 \text{ m}$, $l_3 = 1,25 \text{ m}$, masa objętościowa $\rho = 267584 \text{ kg/m}^3$, współczynnik tłumienia $\gamma = 0$.

W poszczególnych modelach przeprowadzono, zgodną co do zasady, kondensację stopni swobody, i tak kolejne modele ustroju (B4, B8 i B16) zredukowano do 5, 9 i 17 stopni swobody, pozostawiając te, które są przemieszczeniami poprzecznymi wszystkich (również podporowych) węzłów. W każdym modelu liczba stopni swobody stanowiła równocześnie o liczbie punktów obligatoryjnych na osi czasu, a funkcje obciążenia i częstości drgań własnych z równań (4.4) aproksymowano wielomianami Lagrange'a o stopniu maksymalnie

możliwym do osiągnięcia w danym modelu, tj. odpowiednio 4-tego, 8-mego i 16-tego stopnia.

W przypadku obciążenia belki ruchomą masą bezpośrednio, parametry obciążenia wynosiły: masa $M = 133792$ kg, a jej prędkość $v = 8,8595$ m/s. Uzyskane w każdym obliczeniu przebiegi czasowe ugięć punktu środkowego belki (rys. 5) nie różniły się znacząco między sobą, jak również w porównaniu z przebiegiem, którego wykres zamieszczono w pracy [2].



Rys. 5

W tabeli 1 przedstawiono dwie wartości charakterystyczne powyższego wykresu otrzymane przy kolejnych modelach; są to: ugięcie maksymalne (w_{\max}^0) oraz ugięcie występujące w chwili zjazdu obciążenia z belki (w_k^0). Ponadto w tabeli tej podane zostały dwie pierwsze częstotliwości drgań własnych; ustroju nieobciążonego (f_1 i f_2) i ustroju w momencie gdy ruchoma masa znajduje się w środku belki (f'_1 i f'_2).

Tabela 1

Model	w_{\max}^0 [m]	w_k^0 [m]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f'_1 [Hz]	f'_2 [Hz]
B4	0,11661	-0,0158	1,1005	4,4323	0,89762	4,4323
B8	0,11804	-0,0219	1,1001	4,4018	0,89751	4,4018
B16	0,11741	-0,0212	1,1001	4,4006	0,89750	4,4006

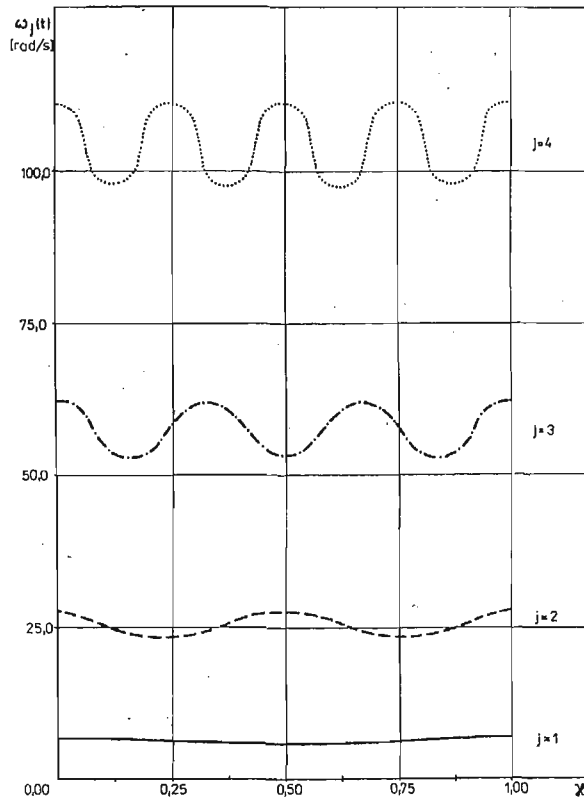
W tabeli 2 zamieszczono wartości ugięć w_{\max}^0 i w_k^0 , uzyskiwane przy wykorzystaniu modelu B8 z uwzględnieniem zmiennej (od 1 do 4) liczby form własnych.

Rezultaty zawarte w tabelach 1 i 2 potwierdzają dobrą zgodność wyników otrzymanych przy uwzględnieniu różnej liczby stopni swobody oraz główne znaczenie podstawowych form drgań własnych. Uzasadnieniem owej stabilności rozwiązań, otrzymywanych przy wykorzystaniu proponowanej metody, mogą być wykresy funkcji przedstawionych na rys. 6 i rys. 7. Na pierwszym z nich znajdują się wykresy funkcji czterech pierwszych częstotliwości

Tabela 2

Liczba postaci	w_{max}^0 [m]	w_k^0 [m]
1	0,11850	-0,021906
2	0,11804	-0,021906
3	0,11839	-0,021831
4	0,11839	-0,021831

drgań własnych, uzyskane z aproksymacji przy dziewięciu punktach obligatoryjnych. Zarówno charakter ich zmienności (występowanie minimów lokalnych w liczbie równej numerowi częstości), jak i wartości amplitud, wskazują na możliwość uzyskiwania największych dokładności aproksymacji funkcji najniższego rzędu, a więc najbardziej znaczących. Rysunek 7 zawiera cztery pierwsze, rozwinięte względem form własnych, funkcje obciążenia, które podzielone zostały przez odpowiadające im funkcje częstości drgań własnych. Tak określone funkcje, w przypadku gdy pomija się wpływ inercji obciążenia (ob-



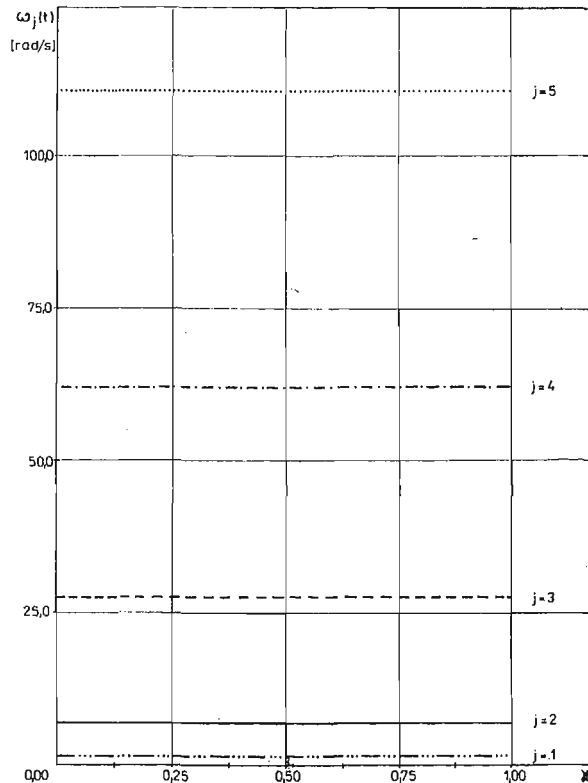
Rys. 6

Tabela 3

Model	w_{max}^0 [m]	w_k^0 [m]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f'_1 [Hz]	f'_2 [Hz]
B4	0,13037	0,00516	0,22233	1,1005	0,22183	1,1083
B8	0,13087	0,00576	0,22293	1,1001	0,22262	1,1043
B16	0,13148	0,00581	0,22293	1,1001	0,22274	1,0970

lizowanie wartości porównywanych wystąpiło w modelach B8 i B16, to przy obciążeniu oscylatorem wynik uzyskany przy najprostszym modelu B4 jest również bliski pozostałym.

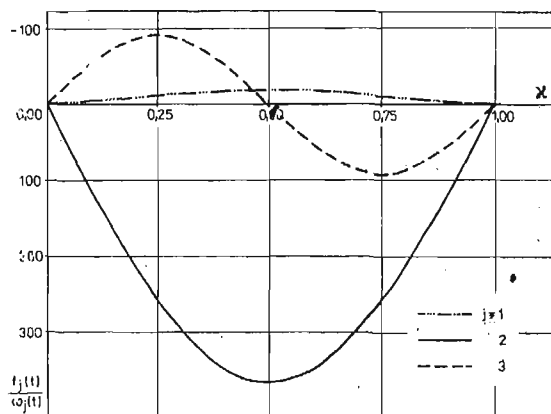
Uzasadnienie powyższego i tym razem można znaleźć analizując przebieg funkcji, od których zależy rozwiązanie zadania. Na rys. 9 pokazano wykres funkcji pierwszych pięciu częstości drgań własnych. Pomimo że obraz przebiegu tych funkcji wydaje się świadczyć o ich stałej wartości, zawierają one jednak pewną, niewidoczną w tej skali, zmienność w czasie. Tym razem występuje tendencja odwrotna, niż to miało miejsce przy obciążeniu bezpośrednio masą. Otóż w kolejnych funkcjach częstości pojawiają się nie minima, lecz maksyma lokalne w liczbie równej numerowi danej postaci drgań (licząc z pominięciem



Rys. 9

postaci wynikającej z wprowadzenia oscylatora), jak również obserwuje się zanikanie wartości ich amplitud wraz ze wzrostem numeru częstości.

Rysunek 10 zawiera wykresy trzech pierwszych funkcji obciążenia w konwencji określonej wcześniej. Funkcja o numerze $j = 1$ jest — rozwiniętą względem form własnych i podzieloną przez właściwą częstość — prawą stroną równania oscylatora. Jest ona podobnie uformowana jak pierwsza funkcja równania belki i przy założonych parametrach układu ma znacznie mniejszą amplitudę. Dalsze, nie pokazane funkcje mają ten sam kształt jak na rys. 7.



Rys. 10

Mając powyższe na uwadze, jak i brak widocznych różnic pomiędzy wykresem ugięć punktu środkowego (rys. 8), a analogicznym wykresem zamieszczonym w pracy [2], można stwierdzić, że powodem tak dobrych rezultatów jest z jednej strony model matematyczny ustroju, który już przy niewielkiej liczbie stopni swobody pozwala uzyskać z dużą dokładnością podstawowe parametry drgań swobodnych, z drugiej zaś łagodny przebieg pierwszych funkcji częstości i obciążenia, pozwalający na dokładną ich aproksymację.

6. Wnioski

Przedstawiony sposób powiązania współrzędnych przestrzeni i czasu umożliwia efektywną analizę drgań wymuszonych praktycznie dowolnych konstrukcji w zakresie liniowo-sprężystym przy ruchomych obciążeniach inercyjnych traktowanych jako grupa niezależnych mas skupionych lub pojedynczych oscylatorów.

Efektywność zaproponowanej metody wynika z dwuetapowej redukcji współrzędnych układu = statycznej i dynamicznej. Redukcja statyczna układu (kondensacja stopni swobody) pozwala zmniejszyć ogólną liczbę współrzędnych naturalnych, ograniczając je jedynie do tych, które mają istotny wpływ na drgania ustroju. Redukcję dynamiczną — w tym przypadku — umożliwia zaproponowany sposób rozwiązywania układów równań o zmiennych współczynnikach przez ich diagonalizację interpolacyjną na podstawie diagonalizacji w określonych chwilach. Wykorzystanie rozwinięcia względem form własnych, a więc rozwiązania układu we współrzędnych głównych ma jeszcze tę zaletę, iż czyni stosunkowo

gładkimi funkcje będące współczynnikami i wyrazami wolnymi równań odpowiadających najniższemu formom, co podnosi dokładność ich aproksymacji na podstawie wartości stabilizowanych. Najczęściej już kilka pierwszych równań postaci modalnej wystarcza dla uzyskania wyników technicznie dokładnych.

Literatura cytowana w tekście

1. D. M. YOSHIDA, W. J. R. WEAVER, *Finite element analysis of beam and plates with moving loads* IABSE Publications, 31, I, 1971.
2. T. BOROWICZ, *Wyteżenie belek pod obciążeniem ruchomym*, Arch. Inż. Łąd., 24, 2, 1978.
3. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
4. J. H. ARGYRIS i inni, *Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej*, IPPT PAN, Ossolineum, Wrocław 1977.
5. A. RADZIECKI, J. WESELI, *Obliczenia dynamiczne w otwartym systemie metody elementów skończonych IDIM-34, XXVI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Ref. t, 1, Krynica 1980.*
6. A. RADZIECKI, *Analiza ustroju mostowego poddanego działaniu złożonych układów skupionych sił ruchomych*, Arch. Inż. Łąd. 29, 1-2, 1983
7. J. WESELI, *Metoda elementów skończonych, programy do obliczania konstrukcji inżynierskich*, Część II, wyd. w ramach mat. XXIV Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB w Krynicy, Gliwice 1978.

Резюме

МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ИНЕРТНЫХ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗКАХ

В работе представлен метод образования и решения уравнений движения конструкций, подверженных действию подвижных инертных нагрузок, рассматриваемых в виде групп сосредоточенных масс или вязко-упругих осцилляторов. Причём отдельные нагрузки могут оставаться по отношению к себе в произвольно меняющемся соотношении.

В предлагаемом способе решения использован метод конечных элементов, в котором кроме геометрической дискретизации использован разностный метод для описания величин, являющихся функцией времени. Этот способ решения позволяет эффективно рассчитывать произвольные структуры в линейно-упругой области при сложных подвижных нагрузках. Эффективность метода вытекает из двухэтапной редукции координат системы — статической и динамической — причём последняя возможна благодаря применению интерполярной диагонализации системы уравнений движения.

Summary

A METHOD OF SOLVING EQUATIONS OF MOTION FOR INERT MOVING LOADS

A method of formulating and solving of the equations of motion of the constructions subjected to the inert moving loads is presented. The loads are treated as groups of concentrated masses or viscoelastic oscillators, particular loads can be in arbitrary varying relations with respect to one another.

In the considered solution we make use of the finite element method and apart from the geometrical discretisation also the time depending quantities are discretised. The method lets us to find the effective solution in the linear elastic regions for complex moving loads. The effectiveness of the method results from the two-stage reduction of the coordinate system — static and dynamic; the latter one is feasible due to the introduction of the interpolator diagonalisation of the system of equations of motion.

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 lipca 1982 roku