MECHANIKA
TEORETYCZNA
i STOSOWANA
4, 24, (1986)

O PEWNYCH ROZWIĄZANIACH RÓWNANIA DYFUZJI CZ. II*

JÓZEF WACŁAWIK

Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

W moim liście do Redakcji Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej [3] zwracałem uwagę na nieuzasadnione stwierdzenia i wnioski w pracach [1] i [2]. Polemikę podjął ich Autor dr Eugeniusz Bobula [4]. Jego odpowiedź zawiera liczne błędy.

Przedmiotem dyskusji są niektóre rozwiązania równania różniczkowego

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial (cp)}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial p}{\partial x} + cp\right)_{x=0^-} \delta(x) \tag{2}$$

i ich własności.

W równaniu (2) $p(x, t)$ oznacza stężenie lub temperaturę, x — oś liczbową, t — czas, $c(x, t)$ — siłę wymuszającą transport, $\delta(x)$ — dystrybucję delta Diraca.

Dr Bobula czyni szereg założeń [1]. Między innymi przyjmuje, że funkcja p jest parzysta: $p(x, t) = p(-x, t)$, c — nieparzysta: $c(x, t) = -c(-x, t)$, a

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} + cp\right)_{x=0\pm} \neq 0.$$

W odpowiedzi [4] Autor twierdzi, że rozwiązanie równania (2) posiada własność skończonej prędkości impulsu (pierwsza strona odpowiedzi 16 - 17_d). Można wykazać, że tak nie jest. Dla skrócenia dowodu rozważę przypadek $c = 0$. Parzystą funkcję $p(x, 0)$ w warunku początkowym przedstawiam w postaci sumy dwóch funkcji: $p(x, 0) = u_0(x) + v_0(x)$, z których każda jest parzysta. Ponadto przyjmuję, że $u_0(x)$ jest gładka, zaś $v_0(x)$ nie posiada pochodnej względem x w punkcie $x = 0$. Rozwiązując równanie

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0^-} \delta(x) \tag{6}$$

otrzymuje się dwie parzyste funkcje $u(x, t)$, $v(x, t)$.

Pierwszą z nich można wyznaczyć z równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{gdyż } \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0^-} \delta(x) = 0,$$

* W MTiS t. 22, z. 3 - 4, 1984 roku została opublikowana odpowiedź Pana Eugeniusza Bobuli na list Pana Józefa Wacławika zamieszczony w MTiS t. 20, z. 1 - 2, 1982 r. Poniżej zamieszczamy polemiczny artykuł Pana Józefa Wacławika, którym to autor zamyka swój udział w dyskusji uważając, że w dostatecznym stopniu zwrócił uwagę na błędy zawarte w rozprawach Pana E. Bobuli.

drugą zaś z równania

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=0^-} \delta(x).$$

Suma tych rozwiązań $p(x, t) = u(x, t) + v(x, t)$ spełnia równanie (6):

$$\frac{\partial(u+v)}{\partial t} = \frac{\partial^2(u+v)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial(u+v)}{\partial x}\bigg|_{x=0^-} \delta(x).$$

Funkcja $u(x, t)$, jako rozwiązanie klasycznego równania parabolicznego, nie posiada własności skończonej prędkości impulsu, a funkcję $p(x, 0)$ można przedstawić na nieskończenie wiele sposobów w postaci sumy $u_0(x) + v_0(x)$, o składnikach posiadających podane wyżej własności. Zatem funkcja $p(x, t)$, będąc sumą $u(x, t) + v(x, t)$, nie może mieć własności skończonej prędkości impulsu.

Powyższe jest także dowodem, że funkcja $p(x, t)$, będąca rozwiązaniem równania (2), nie może mieć własności lokalizacji zaburzenia. W kwestii tej dr Bobula wypowiada się na drugiej stronie odpowiedzi [4] w punkcie ad 2.4.

Autor odpowiedzi [4] (strona pierwsza w. 16d) stawia pytanie „Czy ... równanie (2) posiada źródło?" i podaje negatywną odpowiedź, stwierdzając w uzasadnieniu, że równanie to nie zawiera funkcji niezależnej od rozwiązań. Źródło w równaniu przedwodnictwa nie musi być niezależne od poszukiwanej funkcji. Przykładem może być równanie opisujące przewodnictwo cieplne w rezystorze znajdującym się pod napięciem, opływanym strumieniem nieizotermicznym, gdy oporność zależy od temperatury.

W przypadku rozważanym w pracach [1] i [2] źródło występuje w punkcie $x = 0$. Jego wydajność, w przedziale czasu $t \in (t_1, t_2)$, można wyliczyć całkując wyrażenie na strumień $\Phi(x, t)$ względem zmiennej t:

$$2\int_{t_1}^{t_2} \Phi(x, t)|_{x=0^-} dt$$

Gdyby nie było źródła to skąd „brałaby się" materia lub energia odpływająca od punktu $x = 0$ strumieniami o przeciwnych zwrotach!?

Autor przyjął, że dla $|x| > |\lambda(t)|$ funkcja $p(x, t) = 0$ (odpowiedź [4] strona pierwsza w. 4d). Funkcja ta spełnia równanie (2) przy $x \in (-\infty, +\infty)$ a nie tylko przy $|x| > |\lambda(t)|$, jak to napisano w odpowiedzi. Natomiast wyrażenie

$$p(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(1 + \frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{j+1} & |x| \leqslant |\lambda(t)| \\ 0 & |x| > |\lambda(t)| \end{cases}$$

nie jest rozwiązaniem równania {6}. Współczynnik w równaniu {6} przy $x \neq 0$ jest funkcją regularną. Rozwiązanie

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(1 + \frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{j+1} \tag{7}$$

przy $x = \lambda(t)$ zeruje się, a jego pochodna względem x w tym punkcie jest różna od zera.

Na zewnątrz linii $x = \lambda(t)$ rozwiązania (7) nie można zatem przedłużać rozwiązaniem zerowym. Funkcja przedłużona rozwiązaniem zerowym odpowiada równaniu podanemu przez J. Szarskiego w przypadku, gdy spełnione są dodatkowo warunki [2], podane też w liście do Redakcji [3] (wzór (4) i następny). Warunki te oznaczają, że intensywność źródła energii (materii) w punkcie $x = 0$ dostosowana jest do jej odbioru w punktach $|x| = |\lambda(t)|$.

W celu wykazania, że obydwa wzory na strumień, podane przez E. Bobulę i M. Smoluchowskiego są identyczne w odpowiedzi (strona druga punkt ad 2.2) zależności (1) i (5) [3] zostały porównane ze sobą! Jednakże czytelnik pracy [1] nie znajduje w niej tych rozważań, ani równoważnych. Natomiast wywody przedstawione w rozprawie [1] są sprzeczne ze stwierdzeniami zawartymi w punkcie ad 2.2 odpowiedzi. Dr Bobula podaje, że $c(x, t)$ jest siłą wywołującą transport (np. str. 35 i 36 rozprawy [1]). Ponieważ z porównania (1) i (5) wynika

$$c = -\frac{uF}{k} \tag{8}$$

powinno tam znaleźć się stwierdzenie, że $c(x, t)$ jest stosunkiem iloczynu siły wywołującej transport F i ruchliwość cząsteczek u do współczynnika dyfuzji k, ze znakiem minus. Gdyby nawet przyjąć, że wzór (1) sugerowany w pracy [1] pochodzi od M. Smoluchowskiego [8] oraz, że wywód Autora pracy [1] jest wynikiem założenia (8) to przecież wyrażenie w liczniku ułamka uF jest prędkością konwekcji ([8] str. 1105 wzór (4)), o której w pracy [1] nie ma wzmianki. Gdyby nawet Autor przyjął, że $c(x, t)$ jest stosunkiem prędkości konwekcji do współczynnika dyfuzji, który ma wartość skończoną, to jakie fizyczne znaczenie ma nieskończenie wielka prędkość konwekcji wynikająca z przyjęcia $c = \frac{x}{2(r-t)}$, przy x rosnącym do $\pm\infty$. Jak ma być spełnione równanie ciągłości w świetle własności cieczy i gazów!. W tej sytuacji nie zachodzi przypadek sugerowany w punkcie ad. 2.3. Ponadto pozostają aktualne uwagi o niezgodności zwrotów bodźców i przepływów termodynamicznych [3].

Do pewnych wniosków prowadzi także analiza wymiarów fizycznych poszczególnych składników wzorów; na przykład w rozdziale o „cofaniu się" dyfuzji, wzór (24) str. 28 [1].

Gdyby zachodził proces odwrócenia dyfuzji (druga strona [4] w. 8.9g) to można mówić o tworzeniu się struktury, w takim rozumieniu jak to podają I. Prigogine, P. Glansdorff, G. Nicolis [5], [6], W. Ebeling [7].

Według cytowanych monografii warunkami koniecznymi wystąpienia takiego procesu są:

— otwarty układ termodynamiczny,

— przebieg procesu poprzez stany dalekie od równowagi,

— nieliniowość równań opisujących dynamikę.

Muszą być spełnione wszystkie trzy warunki i to jeszcze nie zawsze wystarczy do powstawania struktury. W przypadku rozważanym przez dr Bobulę warunki te nie zachodzą. Opis matematyczny oparty jest na fenomenologicznych prawach Fouriera lub Ficka (czyli tak, jak w liniowej termodynamice procesów nieodwracalnych), równanie bilansu jest liniowe. Odnośnie punktu ad. 2.4. Autor rozważa równania bilansu (nie zachowania!) ze źródłem w punkcie $x = 0$.

W celu zbadania jak zmienia się pochodna z całki:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\,dx$$

za $p(x, t)$ podstawiam wyrażenie (24) [1]:

$$p(x,t) = -2\frac{|x|}{r-t} + 2(r-t)^{-\frac{1}{2}}$$

Wobec parzystości p ze względu na x otrzymuję

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} p(x,t)\,dx = \left[-2x^2(r-t)^{-1}+4x(r-t)^{-\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^{\infty}$$

Całka ta jest nieskończenie wielka $(-\infty)$. Gdy $t \to r$ rosną wartości obu czynników $(r-t)^{-1}$ i $(r-t)^{-\frac{1}{2}}$.

Natomiast gdy $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x, t) = 0$ (o takim przypadku Autor pisze [1] lecz nie wynika to z wzorów) wystarczy scałkować równanie (6) względem x:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\,dx = \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\frac{dp}{dx}\Big|_{x=0^-}$$

Widać, że o zmianie w czasie całki z energii lub ilości materii decyduje źródło w punkcie $x = 0$ i że całka ta nie jest stała w czasie.

W swoim liście do Redakcji [3] nie kwestionowałem twierdzenia J. Szarskiego [2].

Na zakończenie pragnę oświadczyć, że niniejszym zapowiadam zakończenie swego udziału w dyskusji niezależnie od tego czy dr. E. Bobula prześle odpowiedź i czy zostanie ona wydrukowana czy nie. Uważam bowiem, że w dostatecznym stopniu podkreśliłem w swoich recenzjach i listach do Redakcji MTiS błędy, nieuzasadnione stwierdzenia i wnioski prac [1], [2], [4]. Niestety trudny problem matematycznego opisu dyfuzji i przewodnictwa ciepła ze skończoną prędkością zaburzenia, pozostaje otwarty. Jego stan podaje monografia K. Wilmańskiego, na co zwróciłem uwagę w poprzednim liście [3].

Literatura

1. E. BOBULA, *Równanie zachowawczej dyfuzji w przestrzeni dystrybucji a możliwość wpływu na jej przebieg*, ZN AGH, Górnictwo, z. 104, Kraków, 1979
2. E. BOBULA, *Pseudoźródłowa hipoteza transportu parabolicznego*, rękopis wraz z recenzjami oraz pismem Jacka Szarskiego, złożony w Bibliotece Jagiellońskiej, praca doktorska UJ, 1974, r.
3. J. WACŁAWIK, *List do redakcji*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, t. 20, z. 1÷2, 1982. r.
4. E. BOBULA, *Odpowiedź na list J. Wacławika do Redakcji Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, t. 22, z. 3÷4, 1984 r.
5. P. GLANSDORFF, I. PRIGOGINE, *Thermodynamics of structure, stability and fluctuations*, Wiley — Interscience, N. J. 1971 r.

6. G. NICOLIS, I. PRIGOGINE, Self — *organization in nonequilibrium systems*, Wiley — Interscience, N. J., 1977 r.
7. W. EBELING, *Strukturbildung und irreversible Prozessen*, Treubner, Lipsk, 1976 r.
8. M. SMOLUCHOWSKI, Ann. der Physik, 48, 1915.

List wpłynął do Redakcji dnia 7 marca 1986 roku.