

## METODA MACIERZOWA W ZASTOSOWANIU DO OPTIMALIZACJI CHARAKTERYSTYKI ODKSZTAŁCALNEGO UKŁADU STEROWANIA\*

STANISŁAW DUBIEL

MACIEJ MRÓZ

*Wojskowa Akademia Techniczna*

Sterowanie lotem obiektów latających realizowane jest najczęściej za pomocą sił aerodynamicznych lub innych równoważnych tym siłom oddziaływań. Jednakże niezależnie od sterowań wiele własności obiektu istotnych dla optymalizacji związanych jest z jego konstrukcją, jego wewnętrznymi parametrami. Zmiany w konstrukcji obiektu, wprowadzenie dodatkowych sprzężeń pomiędzy jego elementami zasadniczo wpływają na charakter ruchu. Zadaniem optymalizacji jest ustalenie takich związków między układem sterowania a parametrami konstrukcyjnymi obiektu, aby proces przejściowy całego układu był jak najszybciej tłumiony.

Zależności pomiędzy parametrami obiektu a charakterem jego ruchu wyrażone są analitycznie przez współczynniki równań różniczkowych opisujących dany proces. Z tego względu optymalizacja ruchu obiektu może być wykonywana nie tylko przez dobór odpowiednich oddziaływań zewnętrznych i programu ich zmiany w czasie, lecz również przez dobór odpowiedniej konstrukcji obiektu i parametrów układów wewnętrznych. Synteza optymalnych układów powinna uwzględniać oba obszary optymalizacji, tak obszar sterowań, jak i obszar parametrów obiektu.

Jako szczególny przypadek zbadano dynamikę podłużnego ruchu samolotu z ruchomym ważkim sterem wysokości i odkształcalnym układem sterowania [4].

Stosowane oznaczenia:

$\bar{C}_H$  — współczynnik tłumienia wiskotycznego w układzie sterowania (zredukowany),  
 $k$  — współczynnik sztywności zastępczej w układzie sterowania,  
 $\bar{\kappa}_H$  — zredukowany współczynnik sztywności

$$\bar{C}_H = Cr_{SH}^2, \quad \bar{\kappa}_H = k \cdot r_{SH}^2,$$

$r_{SH}$  — promień bezwładności steru wysokości,  
 $m$  — masa samolotu  
 $m_{SH}$  — masa steru wysokości,  
 $e_H$  — odległość środka masy steru wysokości od jego osi obrotu,  
 $Z_H$  — współrzędna osi obrotu steru wysokości wzdłuż osi  $z$ ,

\*) Referat wygłoszony na I Krajowej Konferencji „Mechanika w lotnictwie”.

$S_H$	— współrzędna osi obrotu steru wysokości wzdłuż osi $x$ ,
$X_d$	— przemieszczenie rączki drążka sterowanego w kierunku $x$ ,
$V(U; V; W)$	— prędkość lotu i jej składowe wzgl. odpowiednich osi układu $Oxyz$ ,
$p, q, r$	— prędkości kątowe obrotu samolotu wzgl. odpowiednich osi,
$L$	— moment przechylający,
$M$	— moment pochylający,
$N$	— moment odchylający,
$M$	— moment pochylający,
$I_H$	— masowy moment bezwładności steru wysokości wzgl. osi obrotu,
$I_y$	— moment bezwładności samolotu wzgl. osi $Oy$ ,
$M_H$	— moment zawiasowy steru wysokości,
$P(t)$	— zewnętrzna siła wymuszająca,
$Q$	— ciężar samolotu,
$M_{HZ}$	— sterujący moment zawiasowy steru wysokości.
$T$	— ciąg silników

### 1. Równania ruchu samolotu

Rozpatruje się podłużny ruch samolotu o napędzie odrzutowym. Przyjmuje się, iż ruch odbywa się w pionowej płaszczyźnie, która pokrywa się z płaszczyzną symetrii samolotu. Równania ruchu zapisano posługując się układem osi przepływu  $Ox_a z_a$ , którego początek umieszczono w środku masy samolotu. Założono, iż samolot jest bryłą sztywną, natomiast układ sterowania sterem wysokości jest odkształcalny, charakteryzujący się odpowiednią sztywnością i tłumieniem.

Przyjęto ustalony ruch prostoliniowy samolotu określony następującymi parametrami

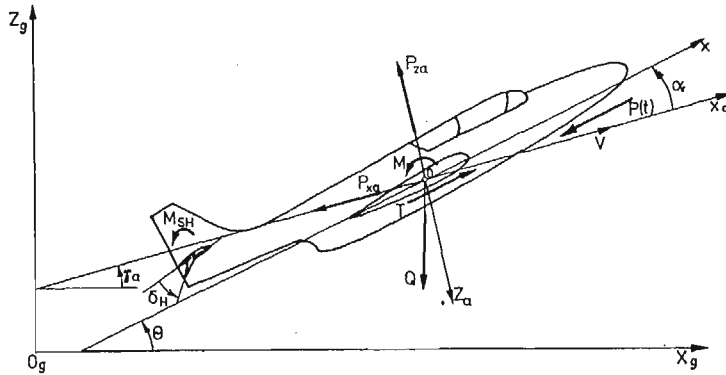
$$V = V_0, \gamma_a = \gamma_{a0}, \Theta = \Theta_0, \alpha = \alpha_0 = \Theta_0 - \gamma_0, \delta_H = \delta_{H0} \text{ — kąt wychylenia steru wysokości dla ustalonego ruchu samolotu.}$$

Ponadto zakłada się, iż małe perturbacje  $V$  nie mają istotnego znaczenia dla procesu optymalizacji, a wartości kątów  $\gamma$  i  $\alpha$  są małe pozwalając na linearyzację ( $\sin \varkappa \cong \varkappa$ ;  $\cos \varkappa \cong 1$ ). Dodatkowo zwroty sił i momentów działających na samolot przyjęto jak na rys. 1. Schemat odkształcalnego układu sterowania sterem wysokości pokazano na rys. 2. Przy powyższych założeniach układ równań opisujących ruch samolotu względem trajektorii lotu poziomego ma postać:

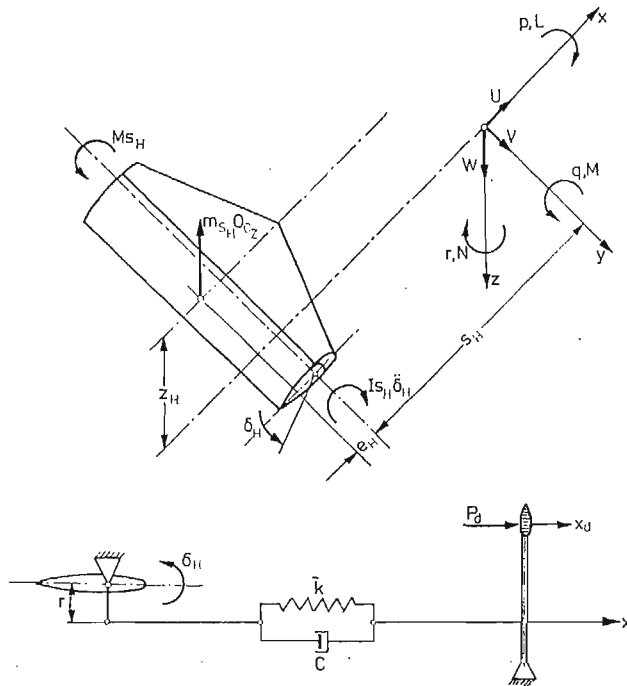
$$\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m} \cos \alpha - C_x \frac{\rho \cdot V^2}{2m} \cdot S - g \sin \gamma_a \cong 0, \quad (1.1)$$

$$V \frac{d\gamma_a}{dt} = \frac{T}{m} \sin \alpha + C_z^\alpha \frac{\rho \cdot V^2}{2m} \cdot S \cdot \alpha - g \cos \gamma_a, \quad (1.2)$$

$$I_y \left( \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d^2 \gamma_a}{dt^2} \right) = - (M^a + M^{\dot{\alpha}}) \dot{\alpha} - M^a \frac{d\gamma_a}{dt} - M^a \cdot \alpha - M^\delta \cdot \delta_H - M^{\dot{\delta}} \cdot \dot{\delta}_H,$$



Rys. 1. Układ współrzędnych osi oraz dodatnie kierunki sił, momentów i kątów



Rys. 2. Schemat odkształcalnego układu sterowania steru wysokości.

$$I_H \cdot \ddot{\delta}_H + \bar{C}_H \cdot \dot{\delta}_H + \bar{\kappa}_H \cdot \delta_H = m_H \cdot e_H V \frac{d\gamma_a}{dt} - (I_H + m_H e_H S_H), \tag{1.3}$$

$$\left( \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d^2 \gamma_a}{dt^2} \right) + M_H + M_{HZ} + m_H e_H g \cos \gamma_a, \tag{1.4}$$

gdzie:

$$q = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\gamma_a}{dt}.$$

Wyliminowując z równań kąt  $\gamma_a$  i jego pochodne oraz pomijając równanie (1.1) jako, że lot jest poziomy ze stałą  $V$

$$(\gamma_a = \gamma_{a0} = 0, \quad \sin \alpha \cong \alpha),$$

równanie (1.2) można zapisać w postaci (1.2')

$$\frac{d\gamma_a}{dt} = b \cdot \alpha - g, \quad (1.2')$$

gdzie:

$$b = \frac{T}{mV} + C_z^\alpha \frac{\rho \cdot V^2}{2} \cdot S.$$

Uwzględniając (1.2') w równaniach (1.3) i (1.4), otrzymuje się układ równań ruchu samolotu z odkształcalnym układem sterowania w następującej postaci:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + C_s \dot{\alpha} + \kappa_s \cdot \alpha = a_0 \cdot \delta_H + a_1 \cdot \dot{\delta}_H + f_1, \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2\delta_H}{dt^2} C_H \cdot \dot{\delta}_H + \kappa_H \cdot \delta_H = b_0 \cdot \alpha + b_1 \cdot \dot{\alpha} + f_2, \quad (1.6)$$

gdzie:

$$C_s = b + \frac{M^q + M^{\dot{\alpha}}}{I_y}; \quad C_H = \frac{\bar{C}_H}{I_H} + \left(1 + \frac{m_H e_H S_H}{I_H}\right) \frac{M^{\delta}}{I_y};$$

$$\kappa_s = \frac{M^q \cdot b + M^{\alpha}}{I_y}; \quad \kappa_H = \frac{\bar{\kappa}_H}{I_H} + \left(1 + \frac{m_H e_H S_H}{I_H}\right) \frac{M^{\delta}}{I_y};$$

$$a_0 = -\frac{M^{\delta}}{I_y};$$

$$b_0 = -\left[\frac{m_H e_H V \cdot b}{I_H} + \left(1 + \frac{m_H S_H e_H}{I_H}\right) \left(\frac{M^q \cdot b + M^{\alpha}}{I_H}\right)\right];$$

$$a_1 = -\frac{M^{\delta}}{I_y};$$

$$b_1 = -\left[\left(\frac{1 + m_H e_H S_H}{I_H}\right) \left(\frac{M^q + M^{\dot{\alpha}}}{I_y}\right)\right];$$

$$f_1 = \frac{M^q}{I_y} \cdot g;$$

$$f_2 = \left[\frac{m_H e_H}{I_H} (1+V) + \left(1 + \frac{m_H e_H S_H}{I_H}\right) \frac{M^q}{I_y}\right] \cdot g + \frac{M_H + M_{HZ}}{I_H}.$$

W zapisie macierzowym układ równań (1.5) i (1.6) przedstawia się następująco:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{F}(t), \quad (1.7)$$

gdzie:

$$x_1 = \alpha; \quad x_2 = \dot{\alpha}; \quad x_3 = \delta_H; \quad x_4 = \dot{\delta}_H;$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43}^* & a_{44}^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \\ f_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= -\kappa_s; & a_{22} &= -C_s; & a_{23} &= a_0; & a_{24} &= a_1; \\ a_{41} &= b_0; & a_{42} &= b_1; & a_{43}^* &= -\kappa_H; & a_{44}^* &= -C_H. \end{aligned}$$

Współczynniki oznaczone \*) są tymi parametrami, które należy w procesie optymalizacji dobrać celem zapewnienia odpowiedniej charakterystyki napędu ze względu na tłumienie procesu przejściowego.

## 2. Optymalizacja parametrów dynamicznych

Własności dynamiczne obiektu reprezentuje macierz stanu  $\mathbf{A}$ , zatem dla optymalizacji parametrów napędu sterów zapewniających najszybsze tłumienie wahań samolotu rozważania sprowadza się do analizy układu bez wymuszeń, czyli

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}. \quad (2.1)$$

Wartości własne macierzy stanu  $\mathbf{A}$  określone są przez równanie charakterystyczne o postaci:

$$|\mathbf{A} \cdot r \mathbf{I}| = 0,$$

gdzie:  $\mathbf{I}$  — jest macierzą jednostkową, a „ $r$ ” dla  $i = 1, 2, 3, 4$  stanowią wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$ .

Macierz  $\mathbf{A}$  nie musi posiadać rzeczywistych wartości własnych, ale ponieważ  $|\mathbf{A} - r \mathbf{I}| = 0$  ma współczynniki rzeczywiste, to wszystkie zespolone wartości własne muszą być parami sprzężone.

Ponieważ  $\text{tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^4 r_i$ , a dla najszybszego tłumienia procesu przejściowego żąda się aby wartości własne były niezależne i posiadały jednakowe ujemne części rzeczywiste  $\sigma$  [1, 3] zatem:

$$\text{Re } r_i = \sigma = \frac{\text{tr} \mathbf{A}}{4}. \quad (2.2)$$

Zgodnie z tzw. Sylwestra warunek ujemnych wartości  $\sigma$  jest spełniony, gdy:

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^4 r_i > 0.$$

Warunek optymalizacyjny uzyskuje się na drodze przekształcenia macierzy stanu  $\mathbf{A}$  w macierz  $\tilde{\mathbf{A}}$  stosując przekształcenie

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot e^{\sigma t}, \quad (2.3)$$

zatem:

$$\dot{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{y}, \quad (2.4)$$

gdzie:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \sigma \mathbf{I},$$

i wówczas  $\text{tr}(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I}) = \text{tr} \mathbf{A} - n \cdot \sigma = 0$

Poszukuje się takich wartości  $C_H$  i  $\kappa_H$  aby rozwiązanie równania (2.4) było rozwiązaniem nierosnącym.

Ponieważ ślad macierzy  $\tilde{\mathbf{A}}$  jest równy zero

$$\text{tr} \tilde{\mathbf{A}} = 0,$$

zatem wartości własne  $\det \tilde{\mathbf{A}}$  winny być urojone lub równe zero [1]. Przekształcamy w tym celu wyznacznik charakterystyczny macierzy do wielomianu

$$|\mathbf{A} - \omega \mathbf{I}| = (-1)^n [\omega^n - p_1 \omega^{n-1} + p_2 \omega^{n-2} + \dots + (-1)^n p_n]. \quad (2.5)$$

Współczynniki  $p$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tego wielomianu wyrażają się za pomocą elementów macierzy  $\tilde{\mathbf{A}}$  w sposób następujący:

$$p_1 = \tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22} + \dots + \tilde{a}_{nn} = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ii} = \text{tr} \tilde{\mathbf{A}},$$

$p_2$  — jest sumą minorów głównych (tj. minorów położonych symetrycznie względem głównej przekątnej) stopnia drugiego macierzy  $\tilde{\mathbf{A}}$

$$p_2 = \sum_{i < j}^{n-1} \begin{vmatrix} \tilde{a}_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & \tilde{a}_{jj} \end{vmatrix}, \quad j > i,$$

$p_3$  — jest sumą minorów głównych stopnia trzeciego,

$$p_3 = \sum_{i < j < h}^{n-2} \begin{vmatrix} \tilde{a}_{ii} & a_{ij} & a_{ih} \\ a_{ji} & \tilde{a}_{jj} & a_{jh} \\ a_{hi} & a_{hi} & \tilde{a}_{hh} \end{vmatrix}, \quad h > j > i,$$

itd, a

$$p_n = \det \mathbf{A},$$

gdzie:  $\tilde{a}_{ii} = a_{ii} - \sigma$ .

Rozwiązanie równania będzie nierosnącym jeżeli:

$$\begin{aligned} p_i &> 0, & \text{dla } i \text{ — parzystych,} \\ p_i &= 0, & \text{dla } i \text{ — nieparzystych.} \end{aligned}$$

Otrzymuje się w ten sposób warunki na charakterystykę układu napędowego steru, a więc na  $C_H$  i  $\kappa_H$ , która zapewnia najłagodniejsze sterowanie samolotem przy najkrótszym czasie trwania procesu przejściowego.

Dla rozpatrywanego przykładu  $\tilde{\mathbf{A}}$  ma postać:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} -\sigma & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \sigma & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & -\sigma & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43}^* & a_{44}^* - \sigma \end{vmatrix},$$

a poszukiwane warunki są następujące:

$$p_1 = \text{tr} \tilde{\mathbf{A}} = -4\sigma + a_{22} + a_{44}^* = 0,$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= 3\sigma^2 - \sigma(2a_{22} + a_{44}^*) - (a_{21} + a_{43}^*) > 0, \\
p_3 &= -2\sigma^3 + \sigma^2(2a_{22} + a_{44}^*) + \sigma(a_{21} - a_{22}a_{44}^* + a_{43}^* + a_{42} + a_{24}) + \\
&\quad + (a_{42}a_{23} - a_{22}a_{43}^*) = 0, \\
p_4 &= \det \tilde{\mathbf{A}} = \sigma^4 - \sigma^3(a_{22} + a_{44}^*) + \sigma^2(a_{22}a_{44}^* - a_{43}^* - a_{42}a_{24} - a_{22}) + \\
&\quad + \sigma(a_{22}a_{43}^* - a_{42}a_{23} + a_{21}a_{41}^* - a_{24}a_{41}) + (a_{23}a_{41} - a_{21}a_{43}^*) > 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Najszybsze tłumienie wymaga aby współczynnik  $a_{44}^*$  był co do bezwzględnej wartości jak największy. Zatem jego wartość należy dobrać pod tym kątem widzenia, uwzględniając możliwości konstrukcyjne.

Ponieważ

$$a_{44}^* = - \left[ \frac{\bar{C}_H}{I_H} + \left( 1 + \frac{m_H e_H \cdot S_H}{I_H} \right) \frac{M^\delta}{I_y} \right],$$

zaś  $\bar{C}_H$  — jest współczynnikiem tłumienia w układzie wychylenia steru wysokości,

więc można dobrać współczynnik  $a_{44}^*$  drogą zwiększania  $\frac{m_H e_H \cdot S_H}{I_H}$  oraz  $M^\delta$ . Wartość  $\frac{\bar{C}_H}{I_H}$  można wstępnie dobrać dla izolowanego napędu sterów. Z relacji najszybszego tłumienia dla układu oscylacyjnego wynika

$$\frac{\bar{C}_H}{I_H} = \sqrt{2 \frac{\kappa_H}{I_H}}. \tag{2.7}$$

Pozostaje więc dobranie odpowiedniej wartości współczynnika  $a_{43}^*$ . Wykorzystuje się do tego celu warunek na  $p_3 = 0$ , z którego wynika, że  $a_{43}^*$  winna mieć wartość:

$$a_{43}^* = \frac{\sigma^3 + [a_{21} - a_{22}(1 + a_{41}) + a_{42}a_{21}]\sigma + a_{42}a_{23}}{\sigma - a_{22}}. \tag{2.8}$$

Wartość ta musi ponadto spełniać warunki

$$p_2 > 0 \quad \text{i} \quad p_4 > 0,$$

czyli  $\det \tilde{\mathbf{A}} > 0$  dla  $n$  — parzystego.

Zresztą ten ostatni warunek jest warunkiem koniecznym stateczności układu w ogóle.

Istotne znaczenie mają tu relacje między współczynnikami wiersza drugiego i czwartego macierzy  $\mathbf{A}$ . Szczególnie istotną rolę odgrywa ich zależność od prędkości i wysokości lotu jak i stosunek pochodnych współczynników aerodynamicznych samolotu i sterów. Szczegółowe omówienie ich wpływu na strukturę układu sterowania i na optymalne wartości odpowiednich współczynników wymaga oddzielnego opracowania.

### Wnioski

Zastosowanie nowej metody syntezy liniowego układu dynamicznego przedstawiono na uproszczonym modelu mechanicznym. Uproszczenia idą tak daleko aby z jednej strony dać jak najbardziej przejrzysty obraz stosowania metody i wynikających z tego korzyści, z drugiej zaś strony aby model nie zniekształcał nadmiernie sensu fizycznego procesu. Za taki model uznano sterowanie podłużnym ruchem samolotu, przy założeniu, że małe perturbacje

bacje prędkości nie wpływają w sposób istotny na wzajemne sprzężenie dynamiki lotu samolotu i dynamiki układu sterowania. Potwierdzenie słuszności takiego założenia wymaga porównania wyników układu uproszczonego i układu pomijającego te uproszczenia. Zagadnieniu temu poświęcona będzie oddzielna praca.

Korzyścią uproszczonego modelu jest przejrzystość uzyskanego wyniku w postaci zależności (2.8). Pokazano w nim sprzężenie charakterystyki dynamicznej samolotu i odkształcalnego układu sterowania. Znaczenie tej zależności jest szczególnie istotne dla procesu projektowania.

Dodatkową korzyścią jaką daje zastosowanie proponowanej metody syntezy jest prostota w uzyskaniu odpowiednich częstości wahań układu. Ułatwia to rozwiązywanie równania dla układu przekształconego. Wyznaczenie pierwiastków czysto urojonych dla wyjściowego układu 4-go rzędu sprowadza się do rozwiązania równania bikwadratowego. Daje to możliwość uniknięcia stanów krytycznych [2] dla przypadku kiedy częstości zbliżają się do siebie. Z punktu widzenia praktycznego posiada to niebagatelne znaczenie.

#### Literatura

1. S. DUBIEL, *Liniowy układ dynamiczny o najszybszym tłumieniu*. Mech. Teoret. i Stosow. III/1986.
2. S. DUBIEL, M. PURWIN, *Stan krytyczny w układzie sterowania rakiety w wiązce prowadzącej*. Biul. WAT nr 10 (326) 1979 r.
3. А. Н. ГОЛУБЕНЦЕВ; *Интегральные методы в динамике*. Киев 1967 г.
4. A. KRZYŻANOWSKI, *Динамика неавтономичного руху самолоту з одkształчальними układami sterowania* — rozprawa doktorska WAT. Warszawa 1982 r.

#### Резюме

#### ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА К ОПТИМИЗАЦИИ НЕЖЕСТКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Концепция оптимизации системы, обеспечивающая самое быстрое затухание переходного процесса для линейной системы описанной матрично-векторными уравнениями.

Условия в матричной форме дают возможность быстрого установления соответствующих коэффициентов для линейных систем, а в большинстве случаев уравнения управляемых динамических объектов приведены в форме матричной системы уравнений.

Для иллюстрации метода приведен пример динамики продольного движения самолета с тяжелыми рулями высоты и нежесткой системой управления.

#### Summary

#### MATRIX METHOD APPLIED TO OPTIMIZATION OF THE DEFORMABLE CONTROL SYSTEM CHARACTERISTICS

In most of the cases the dynamical control systems are presented in terms of the system of differential equations in the matrix form. Then the coefficients of linear systems of the strongest damping can be determined directly from the optimization conditions. The application of the matrix method has been illustrated by optimization characteristics of the deformable control system for the longitudinal motion of an airplane.

*Praca plynęła do Redakcji dnia 14 lutego 1986 roku.*