MECHANIKA
TEORETYCZNA
i STOSOWANA
4, 24, (1986)

# ANALOGIA SPRĘŻYTO-LEPKOSPRĘŻYSTA W PÓŁPRZESTRZENI ZE STARZENIEM

BRONISŁAW LECHOWICZ,
ZBIGNIEW PIEKARSKI

*Politechnika Krakowska*

W pracy rozpatrzono analogię sprężysto-lepkosprężystą ze starzeniem dla zagadnień typu szczeliny i stempla w półprzestrzeni, przy różnym pełzaniu postaciowym $x$ i objętościowym. Przyjęto, że w rozważanach problemach na brzegu półprzestrzeni ($x_3 = 0$) nie działają naprężenia styczne ($\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{23} = 0$). Do rozwiązania problemu zastosowana została metoda transformacji Fouriera. W pierwszej części pracy została przedstawiona metoda stosowania operatorów całkowych uwzględniających starzenie. W trzeciej części omówiono właściwą analogię i rozpatrzono jej przypadki szczególne.

1. W zapisie tensorowym związki fizyczne dowolnego, liniowego, lepkosprężystego ośrodka mają postać [1]

$$\varepsilon_{ij} = 2\tilde{\mu}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tilde{\lambda}\sigma_{kk}, \tag{1}$$

gdzie: $i, j = 1, 2, 3$, $\delta_{ij}$ — delta Kroneckera,
$\varepsilon_{ij}$ — składowe tensora odkształceń,
$\sigma_{ij}$ — składowe tensora naprężeń,
$\sigma_{kk} = \sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$.

Występujące w (1) wielkości $2\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$ są operatorami całkowymi Volterry II-go rodzaju [2]

$$2\tilde{\mu} \equiv 2\mu_1(t)\left[1+\int_{\tau_1}^{t}(\ldots)\mu(t, \tau)d\tau\right], \tag{2}$$

$$\tilde{\lambda} \equiv \lambda_1(t)\left[1+\int_{\tau_1}^{t}(\ldots)\lambda(t, \tau)d\tau\right], \tag{3}$$

których działanie na daną funkcję określone jest ogólnie wzorem:

$$\tilde{K}y = k_1(t)\left[y(t)+\int_{\tau_1}^{t}y(\tau)K(t, \tau)d\tau\right]. \tag{4}$$

Funkcje $\mu_1(t)$, $\lambda_1(t)$ będące współczynnikami Lamego, określają odkształcenie natychmiastowe ośrodka, jądra $\mu(t,\tau)$, $\lambda(t,\tau)$ natomiast odkształcenie spowodowane pełzaniem ze starzeniem. Gdy jądra w (2), (3) zależą od różnicy ($t$-$\tau$) czasu obserwacji $t$ i czasu $\tau$ określającego historię materiału, oraz współczynniki $\mu_I(t)$, $\lambda_I(t)$ są stałe, wtedy ośrodek ma własności ustalone w czasie, czyli nie zachodzi starzenie.

Jak wiadomo, np. z [2], równanie całkowe Volterry II-go rodzaju

$$x(t) = k_1(t)\left[y(t)+\int_{\tau_1}^{t} y(\tau)K(t, \tau)d\tau\right] \tag{5}$$

ma zawsze, ze względu na $y(t)$, jednoznaczne rozwiązanie gdy znana funkcja $k_1(t)$ jest ciągła w przedziale $\tau_1 < \tau < t$ jądro $K(t, \tau)$ jest ograniczone i ciągłe w trójkącie $\tau_1 < \tau < t$, $\tau_1 < t < T$, oraz gdy funkcja $x(t)$ jest całkowalna. Rozwiązanie równania (5) można wtedy zapisać w formie

$$y(t) = \frac{x(t)}{k_1(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \frac{x(\tau)}{k_1(\tau)} R(t, \tau)d\tau. \tag{6}$$

Funkcja dwóch zmiennych $R(t, \tau)$ jest rezolwentą jądra $K(t, \tau)$, którą obliczamy np. z równania całkowego

$$K(t, \tau)-R(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} K(t, \Theta)R(\Theta, \tau)d\Theta \tag{7}$$

Wprowadzając symbolikę operatorową równania (5), (6) można przedstawić w postaci:

$$x = \tilde{K}y, \tag{8}$$

oraz

$$y = \frac{1}{\tilde{K}}x, \tag{9}$$

gdzie $\frac{1}{\tilde{K}}$ jest operatorem odwrotnym do operatora $\tilde{K}$. Działanie $\frac{1}{\tilde{K}}$ na funkcję $x(t)$ jest dane przepisem

$$\frac{1}{\tilde{K}}x = \tilde{R}\frac{x}{k_1}, \tag{10}$$

przy

$$\tilde{R} = 1-\int_{\tau_1}^{t} (\ldots)R(t, \tau)d\tau, \tag{11}$$

gdzie $R(t, \tau)$ jest rezolwentą jądra $K(t, \tau)$.

Istnienie odwrotnego operatora $\frac{1}{\tilde{K}}$ jest zapewnione przez istnienie jednoznacznego rozwiązania (6).

Można udowodnić [3], że liniowa kombinacja operatorów całkowych Volterry II-go rodzaju (np. postaci (2) lub (3)), oraz ich iloczyn da się sprowadzić do operatora tego samego rodzaju o jądrze złożonym

$$\tilde{A}\pm\tilde{B} \equiv [a_1(t)\pm b_1(t)]\left[1+\int_{\tau_1}^{t} (\ldots) \frac{a(t)A(t, \tau)\pm b(t)B(t, \tau)}{a(t)\pm b(t)} d\tau\right], \tag{12}$$

oraz

$$\tilde{A}\tilde{B} \equiv a_1(t)b_1(t)\left[1+\int_{\tau_1}^{t}(\ldots)C(t,\tau)d\tau\right], \tag{13}$$

gdzie:

$$C(t,\tau) = B(t,\tau)+\frac{b_1(\tau)}{b_1(t)}A(t,\tau)+\frac{1}{b_1(t)}\int_{\tau}^{t}b(\Theta)A(t,\Theta)B(\Theta,\tau)d\Theta. \tag{14}$$

Aby otrzymać jądro (14) należy w obliczeniach stosować przekształcenie Dirichleta [2]. W przypadku ogólnym iloczyn operatorów jest nieprzemienny. Przy wyznaczaniu operatorów odwrotnych do sumy lub iloczynu operatorów Volterry należy najpierw otrzymać wyrażenia typu (12) lub (13) a następnie obliczyć odpowiednie rezolwenty.

Uwzględniając wszystkie powyższe rozważania równania fizyczne (1) dają się zawsze przedstawić za pomocą wzorów

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2\tilde{\mu}}\varepsilon_{ij}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{1}{2\tilde{\mu}}\tilde{\lambda}\frac{1}{2\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}}\varepsilon_{kk} \tag{15}$$

w których $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$

Złożenie trzech operatorów w (15) nie jest przemienne, ponieważ jądra w tych operatorach zależą oddzielnie od $t$ i $\tau$. Przy obliczaniu wartości drugiego składnika w (15) należy korzystać z wyrażeń (12), (13), i (10).

2. N. K. Arutunian w [4] udowodnił istnienie anologii sprężysto-lepkosprężystej w trójwymiarowym ośrodku reologicznym, przy takim samym pełzaniu postaciowym i objętościowym, czyli o stałych współczynnikach Poissona. Związki fizyczne (1) dają się sprowadzić do związków stosowanych przez Arutuniana, gdy przyjęte zostaną następujące równości

$$2\tilde{\mu} \equiv \frac{1+\nu_1(t)}{E(t)}\left[1+\int_{\tau_1}^{t}(\ldots)F_1(t,\tau)d\tau\right], \tag{16}$$

oraz:

$$\tilde{\lambda} \equiv \frac{\nu_1(t)}{E(t)}\left[1+\int_{\tau_1}^{t}(\ldots)F_2(t,\tau)d\tau\right]; \tag{17}$$

gdzie jądra $F_1$, $F_2$ mają postać

$$F_1(t,\tau) = -\frac{E(t)}{1+\nu_1(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}[\delta(t,\tau)+\delta_1(t,\tau)], \tag{18}$$

$$F_2(t,\tau) = -\frac{E(t)}{\nu_1(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau), \tag{19}$$

a wielkości

$$\delta(t,\tau) = \frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau), \tag{20}$$

$$\delta_1(t,\tau) = \frac{\nu_1(\tau)}{E(\tau)}+\nu_2(t,\tau)C(t,\tau), \tag{21}$$

są funkcjami pełzania, w których moduł Younga $E(t)$, współczynniki Poissona $\nu_1(t)$, $\nu_2(t, \tau)$, oraz funkcja $C(t, \tau)$ określane są doświadczalnie.
Ośrodek, w którym zachodzą warunki

$$\nu_1(\tau) = \nu_2(t, \tau) = \nu = \text{const.}, \tag{22}$$

prowadzące do równości

$$F_1(t, \tau) = F_2(t, \tau) = -E(t)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t, \tau), \tag{23}$$

ma takie samo pełzanie postaciowe i objętościowe. Istnienie analogii sprężysto-lepkosprężystej udowodnił Arutunian dla takiego właśnie ośrodka.

G. A. Prokopowicz w pracy [5] wykazał, że omawiana analogia przy różnym pełzaniu postaciowym i objętościowym ma miejsce w przypadku ośrodka dwuwymiarowego. W rozważaniach swoich przyjął jądra typu (18), (19).

G. A. C. Graham w pracy [6] wyprowadził tzw. uogólnioną analogię dla ośrodka trójwymiarowego (półprzestrzeni), przy różnym pełzaniu postaciowym i objętościowym, ale dla własności reologicznych ustalonych w czasie, czyli bez starzenia. Graham przyjmował również, że obszar w którym zadane są warunki brzegowe (obszar kontaktu stempla lub szczeliny) jest zmienny w czasie w zadany sposób. Gdy obszar ten jest w czasie stały, ma miejsce analogia Lee-Alfreya.

3. W pracy niniejszej wykazano istnienie analogii sprężysto-lepkosprężystej w ośrodku trójwymiarowym przy różnym pełzaniu postaciowym i objętościowym, przy uwzględnieniu starzenia, dla zagadnień typu szczeliny i stempla, gdy obszar kontaktu (brzeg) jest zmienny w dowolny sposób. Rozważać będziemy półprzestrzeń, w której wprowadzono kartezjański układ współrzędnych $x_1, x_2, x_3$, tak, że zmienne $x_1, x_2$ zadane są na brzegowej półpłaszczyźnie, tzn. dla $x_3 = 0$. W tak określonej półprzestrzeni rozpatrywana analogia sprężystolepkosprężysta da się zapisać za pomocą następującego twierdzenia.

Jeżeli warunki brzegowe mają postać:
dla naprężeń stycznych

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \tag{24}$$

na całej płaszczyźnie $x_3 = 0$, oraz gdy

a) dla szczeliny

$$\sigma_{33} = \sigma_0(x_1, x_2, t) \quad \text{dla} \quad x_1, x_2 \in \Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t), \tag{25}$$

$$u_3 = \begin{cases} 0 & x_1, x_2 \notin \Omega \\ v(x_1, x_2, t) & x_1, x_2 \in \Omega \end{cases} \tag{25}$$

gdzie $\sigma_0(x_1, x_2, t)$ jest zadanym naprężeniem, natomiast $v(x_1, x_2, t)$ jest nieznanym przemieszczeniem,

b) dla stempla

$$u_3 = u_0(x_1, x_2, t) \quad \text{dla} \quad x_1, x_2 \in \Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t),$$

$$\sigma_{33} = \begin{cases} 0 & x_1, x_2 \notin \Omega \\ S(x_1, x_2, t) & x_1, x_2 \in \Omega \end{cases} \tag{26}$$

gdzie $u_0(x_1, x_2, t)$ jest zadanym przemieszczeniem, natomiast $s(x_1, x_2, t)$ nieznanym naprężeniem.

to wtedy rozwiązanie problemu zawsze da się sprowadzić do układu dwóch sprzężonych ze sobą równań całkowych postaci

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Omega(x_1^0(t_1), x_2^0(t), t)} w(\xi_1, \xi_2, t) K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= W(x_1, x_2, t), \\ \tilde{F} W(x_1, x_2, t) &= -4\pi^2 p(x_1, x_2, t), \end{aligned} \tag{27}$$

gdzie funkcje $w$ i $p$ są równe odpowiednio: dla szczeliny $v$ i $\sigma_0$, oraz dla stempla $s$ i $u_0$. Wielkość $\Omega$ $(x_1^0, (t), x_2^0(t), t)$ jest dowolnym, zmiennym obszarem na płaszczyźnie $x_3 = 0$. Funkcje $x_1^0(t)$, $x_2^0(t)$ są parametrycznym równaniem brzegu tego obszaru. $K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ jest funkcją Greena odpowiedniego problemu — dla szczeliny wynosi

$$K_{sz}[x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = -2\pi[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2]^{-3/2}, \tag{28}$$

dla stempla zaś

$$K_{st}(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = 2\pi[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2]^{-1/2}. \tag{29}$$

Operator $\tilde{F}$ jest operatorem całkowym Volterry II-go rodzaju postaci

$$\tilde{F} \equiv f(t) \left[1 + \int_{\tau_1}^{t} (\ldots) F(t, \tau) d\tau\right],$$

w którym wielkości $f(t)$ i $F(t, \tau)$ zależą od typu zagadnienia i typu materiału ośrodka. Dla problemu szczeliny, zgodnie z punktem 1., ma kształt

$$\tilde{F}_{sz} = \frac{1}{2\tilde{\mu}} \frac{1}{1+\frac{1}{\tilde{G}}}, \tag{30}$$

natomiast dla stempla

$$F_{st} \equiv \frac{1}{\tilde{F}_{sz}} = \left(1+\frac{1}{\tilde{G}}\right) 2\tilde{\mu}, \tag{31}$$

gdzie mamy

$$\tilde{G} \equiv 1 + \frac{2}{3} \tilde{\lambda} \frac{1}{2\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}}. \tag{32}$$

Jedno-jednoznaczne rozwiązanie drugiego równania układu (27) można przedstawić w postaci

$$W(x_1, x_2, t) = -4\pi^2 \frac{1}{\tilde{F}} p(x_1, x_2, t) \tag{33}$$

Po wstawieniu (33) do pierwszego równania układu (27) otrzymujemy równanie całkowe

$$\iint\limits_{\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)} w(\xi_1, \xi_2, t) K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = -4\pi^2 \frac{1}{\tilde{F}} p(x_1, x_2, t) \tag{34}$$

analogiczne do równania dla odpowiedniego problemu sprężystego, w którym czas $t$ jest parametrem. Funkcja $w$ $(\xi_1, \xi_2, t)$ zadana w obszarze $\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)$ jest podstawową wielkością w przedstawianej analogii. Po jej znalezieniu, z odpowiednich wzorów można określić naprężenia i przemieszczenia w dowolnych punktach półprzestrzeni. W rozważanych problemach przemieszczenia $u_1$, $u_2$, $u_3$ (korzystając z podwójnej transformacji Fouriera) dane są wzorami:

$$u_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \left[ -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \frac{1}{1+\tilde{G}} D + x_3 \frac{\tilde{G}}{1+\tilde{G}} D \right] e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, x_3} \times e^{i(\alpha x_1+\beta x_2)} d\alpha\, d\beta,$$

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\alpha^2}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta} \right) \frac{1}{1+\tilde{G}} D + x_3 \beta \frac{\tilde{G}}{1+\tilde{G}} D \right] \times$$

$$\times e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, x_3} \cdot e^{i(\alpha x_1+\beta x_2)} d\alpha\, d\beta, \tag{35}$$

$$u_3 = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ D + x_3 \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \frac{\tilde{G}}{1+\tilde{G}} D \right] \cdot e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, x_3} \cdot e_{i(\alpha x_1+\beta x_2)} d\alpha\, d\beta$$

Wielkość $D = D(\alpha, \beta, t)$ określona jest za pomocą uzyskanych z podstawowego układu (27) funkcji $v(\xi_1, \xi_2, t)$ i $S(\xi_1, \xi_2, t)$ następującymi wzorami:

a) dla szczeliny

$$iD = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)} v(\xi_1, \xi_2, t) e^{-i(\alpha\xi_1+\beta\xi_2)} d\xi_1\, d\xi_2 \tag{36}$$

b) dla stempla

$$iD = -\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \tilde{F}_{st} \iint\limits_{\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)} s(\xi_1, \xi_2, t) e^{-i(\alpha\xi_1+\beta\xi_2)} d\xi_1\, d\xi_2 \tag{37}$$

Wstawiając wzory (36) lub (37) do (35), po obliczeniu całek, otrzymujemy funkcje przemieszczeń $u_1$, $u_2$, $u_3$ za pomocą których ze znanych wzorów teorii sprężystości można wyznaczyć tensory odkształceń i naprężeń w całej półprzestrzeni.

Dyskusję równania (34) przeprowadzimy rozpatrując dwa przypadki:

a) Rozdzielenie zmiennych.

Gdy funkcję $p(x_1, x_2, t)$ zadaną w obszarze $\Omega = \Omega(t)$ zapisać można w postaci

$$p(x_1, x_2, t) = \sum_{k/1}^{n} p_k(x_1, x_2) A_k(t) \tag{38}$$

to ze związku (33) mamy

$$W(x_1, x_2, t) = -4\pi^2 \sum_{k/1}^{n} p_k(x_1, x_2) B_k(t), \tag{39}$$

gdzie:

$$B_k(t) = \frac{1}{\tilde{F}} A_k. \tag{40}$$

Znając następnie rozwiązania $w_k$ równań składowych problemów sprężystych

$$\iint\limits_{\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)} w_k(\xi_1, \xi_2, t) K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) d\xi_1\, d\xi_2 = p_k(x_1, x_2) \tag{41}$$

w których czas jest parametrem, szukane rozwiązanie problemu lepkosprężystego, z zasady superpozycji, otrzymujemy w formie

$$w(\xi_1, \xi_2, t) = -4\pi^2 \sum_{k/1}^{n} w_k(\xi_1, \xi_2, t) B_k(t). \tag{42}$$

W przypadku gdy jądra operatorów $2\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$ zależą od różnicy argumentów

$$\begin{aligned} \mu(t, \tau) &= \mu(t-\tau), \\ \lambda(t, \tau) &= \lambda(t-\tau), \end{aligned} \tag{43}$$

przy stałych współczynnikach Lamego natychmiastowego odkształcenia

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu(0), \\ \lambda_1 &= \lambda(0), \end{aligned} \tag{44}$$

otrzymujemy analogię rozpatrywaną przez Grahama, natomiast, gdy zachodzą równości (16), (17) przy (22), (23) dostajemy analogię omawianą przez Arutuniana.

b) Obszar całkowania stały w czasie.

Jeżeli w równaniach (27) zachodzi zależność

$$\Omega\big(x_1^0(t), x_2^0(t), t\big) = \Omega(x_1^0, x_2^0) = \text{const}. \tag{45}$$

wtedy, po jednoznacznym przedstawieniu w $(\xi_1, \xi_2\ t)$ za pomocą funkcji $v(\xi_1, \xi_2\ t)$ wzorem

$$w(\xi_1, \xi_2, t) = \frac{1}{\tilde{F}} v(\xi_1, \xi_2, t), \tag{46}$$

mamy z (34) równanie

$$\iint\limits_{\Omega(x_1^0, x_2^0)} v(\xi_1, \xi_2, t) K(x_1, x_2, \xi_1 \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = -4\pi^2 p(x_1, x_2, t), \tag{47}$$

które określa rozwiązanie problemu sprężystego z czasem jako parametrem. Po wyznaczeniu funkcji $v$ z (47) rozwiązanie zagadnienia lepkosprężystego ze starzeniem otrzymujemy ze wzoru (46). Jeżeli przyjmiemy, że zachodzą warunki (42), (43), (44) i (45), wtedy z równania (34), po zastosowaniu transformacji Laplacea względem czasu, otrzymujemy analogię Lee-Alfreya.

**Literatura**

1. Я. Н. Работнов, *Ползучесть елементов конструкции*. Изд. Наука, 1966.
2. A. Piskorek, *Równania całkowe*, WNT, Warszawa 1971.
3. Z. Piekarski, *praca doktorska*, Politechnika Krakowska, 1971.
4. N. K. Arutunian, *Some problems in Theory of Creep in Concrete Structures*, Pergamon Press, London, 1966, (przekład z rosyjskiego).
5. G. A. Prokopowicz, T.M.M, 20, 6, 1956.
6. G. A. C. Graham, Report No PSR-47, 2-1966, North Caroline State University.

Резюме

УПРУГО — УПРУГОВЯЗКАЯ АНАЛОГИЯ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ СО СТАРЕНИЕМ

В работе обслуждается упруго — упруговязкая аналогия с учётом старения для объёмной и сдвиговой ползучести. Получены решения задач типа трещины и штампа для трёхмерного полупространства при предположении, что зоны контакта изменяются любым образом.

Summary

ELASTIC — VISCOELASTIC ANALOGY FOR A SEMI-SPACE WITH AGEING.

The concept of elastic — viscoelastic analogy for non — invariant in time materials with various deviatoric creep laws has been considered. The particular solutions forrcrack and punch problems in three — dimensional half — space have been solved. It was assumed that the contact boundaries may change arbitrarily.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 kwietnia 1985 roku.*