

RUCH OŚRODKA POROWATEGO WYPEŁNIONEGO CIECZĄ. OPIS GLOBALNY

STEFAN JAN KOWALSKI

Zakład Aeroakustyki IPPT PAN Poznań

1. Wstęp

Opis ruchu ośrodków wieloskładnikowych budzi wciąż jeszcze wiele kontrowersji. Przedstawioną w pracy [11] (por. też. [13]) koncepcję opisu takich ośrodków, która pochodzi od Truesdella, nie można uznać za uniwersalną. Wykorzystuje się w niej opis względem barycentrycznego środka mas wszystkich składników. W związku z tym, równania bilansu składają się z członów będących dyskusyjnym i trudnym do zinterpretowania konglomeratem różnych wielkości. Ponadto, wątpliwym wydaje się wykorzystanie tej koncepcji do opisu takiego ośrodka, jakim jest porowate ciało stałe wypełnione płynem. Tutaj naturalnym byłoby przyjąć jako bazę odniesienia konfigurację ciała stałego, a nie barycentryczny środek masy. Wtedy, oczywiście, równania bilansu dla całej mieszaniny nie przybierają formy równania bilansu dla ośrodka jednoskładnikowego. Naruszona jest więc zasada metafizyczna Truesdella, że „ruch całej mieszaniny jest przedstawiony takim samym równaniem jak ruch jednolitego ciała”. Ponadto w równaniach ruchu dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą powinno być uwzględnione dość ewidentne zjawisko unoszenia części cieczy zawartej w porach przez porowate ciało, zwane też zjawiskiem sprzężenia ruchu przez masę. Znane w literaturze równania teorii mieszanin nie opisują niestety tego zjawiska.

Można wskazać dwa typy równań, które uwzględniają ten efekt. Są to równania zaproponowane przez BIOTA, [1], i DERSKIEGO, [2]. KOWALSKI w pracy [6] i nieco ogólniej w pracy [7] przedstawił pewien model wskazujący na tranzytywność, a tym samym na ekwiwalentność równań przedstawionych przez tych autorów. Był to jednak dowód ekwiwalentności w sensie lokalnym.

Przedmiotem niniejszej pracy są dwa zagadnienia: Po pierwsze, bazując na bilansie masy i pędu (opis globalny) wyprowadzić równania ruchu dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą z uwzględnieniem zjawiska sprzężenia ruchu przez masę i zmienności porowatości oraz gęstości składników. Po drugie, wskazać, że możliwe jest uzyskanie tą tą drogą dwóch różnych lecz tranzytywnych form równań, a mianowicie równań na wzór Derskiego i na wzór Biota.

Uzasadnieniem podjęcia postawionego zadania jest próba uporządkowania zagadnień związanych z opisem ruchu ośrodka porowatego. Równania Biota, przedstawione po raz pierwszy w 1956 r., stanowiły przez wiele lat bazę do rozwiązania szeregu technicznie ważnych zagadnień związanych np. z propagacją fal w nasyconych ośrodkach porowatych (por. np. [4]). Wiele kontrowersji budził jednakże występujący w tych równaniach współczynnik sprzężenia ruchu przez masę ρ_{12} . Nie został on przez Biota dostatecznie jasno zinterpretowany, a indywidualne jego interpretacje przez niektórych autorów prowadziły do sprzecznych wniosków. Wspomniano o tym w pracy [7], w której również, w oparciu o przyjęty tam model, podjęto próbę bliższego jego określenia.

Wyprowadzone przez Derskiego w 1978 r. równania, prostsze w swej formie i łatwiejsze w interpretacji, budziły początkowo sprzeczne opinie. Podczas dyskusji w kręgu zainteresowanych można było usłyszeć i takie, że stanowią one szczególnie przypadek równań Biota. Obecnie z kolei podaje się w wątpliwość znaczenie równań Biota. W argumentacji podkreśla się niemożność ich uzyskania z równań bilansu masy i pędu, przypisując jednocześnie ten plus równaniom Derskiego, które zostały właśnie w ten sposób wyprowadzone (Biota wyprowadził swoje równania korzystając z równań Lagrange'a). W niniejszej pracy podjęto próbę wyjaśnienia tych wątpliwości.

Konkluzją ostateczną niniejszych rozważań jest stwierdzenie, że równania Biota wynikają z bilansowania składników zdeterminowanych funkcją porowatości objętościowej (równą średniej porowatości powierzchniowej), natomiast równania Derskiego wynikają z bilansowania składników zdeterminowanych funkcją efektywnej porowatości powierzchniowej*. Możliwa jest ich wzajemna tranzytywność, a zatem i ekwiwalentność, jeśli chodzi o jednoznaczność opisu zjawisk zachodzących w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą, wywołanych oddziaływaniami zewnętrznymi.

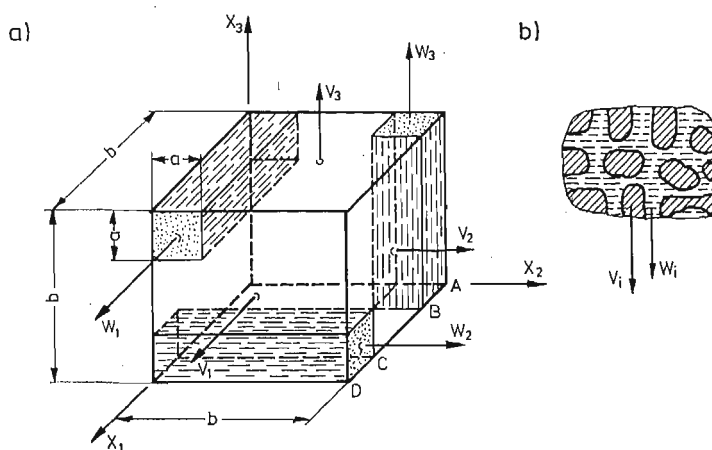
2. Założenia geometryczno-kinematyczne

Rozważać będziemy izotropowy** ośrodek porowaty wypełniony cieczą o statystycznie równomiernym rozkładzie por. Do opisu ruchu takiego ośrodka wykorzystywać będziemy metody i założenia mechaniki ośrodków ciągłych. Wymaga to zapostulowania dodatkowo istnienia ciągłych i różniczkowalnych funkcji, przyporządkowujących każdemu punktowi trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa objętościowego udziału danego składnika w rozważanym ośrodku. Nie będziemy się tu zajmować konstruowaniem takich funkcji. Wspomnimy jedynie, że w mechanice ośrodka porowatego taką funkcją jest porowatość objętościowa, którą będziemy tu oznaczać symbolem: $f_v(x, t)$. W oznaczeniu tym x jest pozytywnym wektorem punktu przestrzeni Euklidesa, a t oznacza czas. Przy założeniu obowiązującym w tej pracy, że ciecz wypełnia całkowicie pory, funkcja ta wyraża ułamek objętościowego udziału cieczy w danym punkcie przestrzeni. Objętościowy udział ciała porowatego (szkieletu) wyraża się wtedy jako: $1 - f_v(x, t)$.

* W pracy [8] autor wprowadził pojęcie podziału fizycznego i kinematycznego mieszaniny w zależności od tego czy posługiwano się funkcją porowatości objętościowej czy funkcją efektywnej porowatości powierzchniowej.

** Geometrię ośrodka porowatego o anizotropowej przepuszczalności Czytelnik znajdzie w pracy [9].

Odnosnie opisu ruchu rozważanego ośrodka przyjmujemy następującą koncepcję. Zakładamy, że pole prędkości szkieletu $v(x, t)$ jest ciągłe i różniczkowalne w całym obszarze z wyjątkiem być może powierzchni nieciągłości (w tym także powierzchni brzegowych). Pole prędkości cieczy może być natomiast nieciągłe, tzn. dwie cząsteczki cieczy znajdujące się obok siebie mogą poruszać się z prędkościami różniącymi się skończoną wartością. Nieciągłość ta wynika z unoszenia pewnej ilości cząstek cieczy przez porowate ciało stałe. Wyróżniamy więc pole prędkości cząstek cieczy mających prędkość różną niż prędkość szkieletu i pole prędkości cząstek unoszonych przez szkielet, przy czym nie interesuje nas profil prędkości, a średnia wartość wyrażająca objętościowy wydatek cieczy na jednostkę czasu. Funkcję objętościowego wydatku cieczy na jednostkę czasu i powierzchni oznaczamy przez $w(x, t)$ i zakładamy, że jest ona ciągła i różniczkowalna w całym obszarze z wyjątkiem być może powierzchni nieciągłości. Istnieje jeszcze problem określenia efektywnej powierzchni, na której wydatek ma miejsce. Na powierzchni myślowego przekroju może się bowiem znajdować powierzchnia cieczy, której cząstki mają w kierunku e_i prędkość v_i . Stwierdzamy zatem, że obserwacja pola prędkości cieczy na przekroju może stanowić podstawę do wyróżnienia powierzchni efektywnego wydatku cieczy a_e . Oznaczmy elementarną powierzchnię obserwacji przez da , a znajdującą się na niej powierzchnię efektywnego wydatku przez $da_e (= da)$. W rozważaniach będziemy się posługiwać stosunkiem tych powierzchni, tj. $f_e(x, t) = da_e(x, t)/da(x)$ i nazywać ten stosunek efektywną porowatością powierzchniową. Na rys. 1a przedstawiono element izotropowego ośrodka



Rys. 1

porowatego wypełnionego cieczą. Dla uproszczenia obliczeń przedstawiono sumę mikro-powierzchni efektywnego wydatku w formie kwadratu o boku a . Używając przyjętych tam oznaczeń określimy efektywną porowatość powierzchniową jako:

$$f_e = \frac{a^2}{b^2}. \tag{2.1}$$

Natomiast porowatość objętościowa, która stanowi stosunek objętości wszystkich porów

do całkowitej objętości, wyraża się jak następuje:

$$f_v = \frac{3a^2b}{b^3} = 3 \frac{a^2}{b^2}. \quad (2.2)$$

Posługując się naszym modelowym rysunkiem objaśnimy jeszcze dwie wielkości, a mianowicie: rzeczywistą porowatość powierzchniową i średnią porowatość powierzchniową. Pierwsza z nich jest na ogół nieregularna. Według rys. 1a porowatość ta przyjmuje wartości:

$$\begin{aligned} (a^2 + ab)/b^2 & \text{ — na odcinkach AB i CD,} \\ a^2/b^2 & \text{ — na odcinku BC.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ze względu na nieregularność, posługiwanie się tą wielkością jest kłopotliwe. Dlatego wprowadza się pojęcie średniej porowatości powierzchniowej, będącej średnią wartością z rzeczywistych porowatości powierzchniowych.

Tą średnią wartość określamy odnosząc wartości rzeczywiste na poszczególnych odcinkach do całej długości i sumując je. A więc:

$$f_p = 2 \frac{a^2 + ab}{b^2} \cdot \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b - 2a}{b}. \quad (2.4)$$

Zauważmy, że średnia porowatość powierzchniowa jest równa porowatości objętościowej tj.:

$$f_p = 3 \frac{a^2}{b^2} = f_v. \quad (2.5)$$

Ilość cieczy unoszonej przez szkielet w danym kierunku jest $2a^2b$. Różnicę średniej porowatości powierzchniowej i efektywnej porowatości powierzchniowej będziemy uważać za miarę ilości cieczy unoszonej przez szkielet i oznaczać:

$$f_u \equiv f_p - f_e = 2 \frac{a^2}{b^2}. \quad (2.6)$$

W naszych rozważaniach niezależnymi funkcjami będą więc: efektywna porowatość powierzchniowa:

$$f_e \equiv \frac{df}{da}, \quad (2.7)$$

oraz porowatość objętościowa:

$$f_v \equiv \frac{df}{dv}, \quad (2.8)$$

gdzie dv oznacza objętość całkowitą elementu porowatego, a $dv_p \subset dv$ oznacza objętość porów zawartych w tym elemencie. Będziemy ponadto zakładać, że dla ośrodka izotropowego porowatość objętościowa jest równa średniej porowatości powierzchniowej.

3. Równania ciągłości masy

Rzeczywiste obszary zajmowane w przestrzeni przez ciecz i szkielet rozważanego ośrodka mogą być spójne, jednakże na ogół nieregularne. Całkowanie po takich obszarach

mogłoby być więc bardzo kłopotliwe. Niedogodność tą eliminujemy wykorzystując właśnie określoną w poprzednim punkcie funkcję porowatości. Jeśli ϱ_s^r i ϱ_f^r oznaczają odpowiednie rzeczywiste gęstości szkieletu i cieczy, to masę szkieletu i cieczy w dowolnym obszarze B , ograniczonym gładką, zamkniętą i zorientowaną na zewnątrz jednostkowym wektorem normalnym \mathbf{n} powierzchnią ∂B , możemy określić jak następuje:

$$m_s(t) = \int_{B_s(t)} \varrho_s^r(\mathbf{x}, t) dv_s(\mathbf{x}, t) = \int_B \varrho_s(\mathbf{x}, t) dv(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

$$m_f(t) = \int_{B_p(t)} \varrho_f^r(\mathbf{x}, t) dv_p(\mathbf{x}, t) = \int_B \varrho_f(\mathbf{x}, t) dv(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

Tutaj $B_s(t)$ i $B_p(t)$ oznaczają odpowiednio obszary zajęte przez szkielet i przez ciecz w obszarze B tzn.: $B_s(t) \subset B$ i $B_p(t) \subset B$ oraz $B_s(t) \cup B_p(t) = B$.

Wielkości:

$$\varrho_s(\mathbf{x}, t) = \varrho_s^r(\mathbf{x}, t)[1 - f_v(\mathbf{x}, t)], \quad (3.4)$$

$$\varrho_f(\mathbf{x}, t) = \varrho_f^r(\mathbf{x}, t)f_v(\mathbf{x}, t), \quad (3.5)$$

przyjęto nazywać gęstościami parcjalnymi, odpowiednio szkieletu i cieczy. Wynikają one z zamiany zmiennych w całkach (3.1) i (3.2) przez podstawienie (2.8), tj.:

$$dv_s(\mathbf{x}, t) = [1 - f_v(\mathbf{x}, t)]dv(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

$$dv_p(\mathbf{x}, t) = f_v(\mathbf{x}, t)dv(\mathbf{x}). \quad (3.7)$$

Korzystając z zasady zachowania masy szkieletu i cieczy piszemy:

$$\dot{m}_s(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_s(t)} \varrho_s^r(\mathbf{x}, t) dv_s(\mathbf{x}, t) + \int_{\partial B_s(t)} [\varrho_s^r(\mathbf{x}, t) da_s(\mathbf{x}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_f(t) = & \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_p(t)} \varrho_f^r(\mathbf{x}, t) dv_p(\mathbf{x}, t) + \int_{\partial B_e(t)} [\varrho_f^r(\mathbf{x}, t) da_e(\mathbf{x}, t)] \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} + \\ & + \int_{\partial B_u(t)} [\varrho_f^r(\mathbf{x}, t) da_u(\mathbf{x}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pierwsze całki w (3.8) i (3.9) określają lokalne zmiany masy, natomiast całki powierzchniowe wyrażają strumienie mas, przy czym: $\partial B_s(t)$, $\partial B_e(t)$, $\partial B_u(t)$ oznaczają odpowiednio: powierzchnię szkieletu, powierzchnię efektywnego wydatku cieczy i powierzchnię unoszenia cieczy przez szkielet na powierzchni ∂B ; $\partial B_s(t) \cup \partial B_e(t) \cup \partial B_u(t) = \partial B$.

W poprzednim punkcie określiliśmy powierzchnię unoszenia cieczy przez szkielet jako różnicę pomiędzy uśrednioną całkowitą powierzchnią cieczy i powierzchnią efektywnego wydatku cieczy. Taka definicja implikuje aby da_s określać również jako średnią, a nie rzeczywistą, powierzchnię szkieletu. Dokonujemy więc następującej zamiany zmiennych w całkach (3.8) i (3.9):

$$\begin{aligned} da_s(\mathbf{x}, t) &= [1 - f_v(\mathbf{x}, t)] da(\mathbf{x}), \\ da_e(\mathbf{x}, t) &= f_e(\mathbf{x}, t) da(\mathbf{x}), \\ da_u(\mathbf{x}, t) &= [f_v(\mathbf{x}, t) - f_e(\mathbf{x}, t)] da(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ponadto wykorzystujemy zależności (3.6) i (3.7) oraz twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego. Po dokonaniu przepisanych operacji otrzymujemy:

$$\dot{m}_s(t) = \int_B \left[\frac{\partial \varrho_s(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_s(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] dv(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.11)$$

$$\dot{m}_f(t) = \int_B \left\{ \frac{\partial \varrho_f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} [\varrho_e(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{w}(\mathbf{x}, t) + \varrho_u(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \right\} dv(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.12)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} \varrho_e(\mathbf{x}, t) &= \varrho_f^*(\mathbf{x}, t) f_e(\mathbf{x}, t), \\ \varrho_u(\mathbf{x}, t) &= \varrho_f^*(\mathbf{x}, t) [f_u(\mathbf{x}, t) - f_e(\mathbf{x}, t)], \end{aligned} \quad (3.13)$$

nazywać będziemy odpowiednio parcjalną gęstością cieczy swobodnej oraz parcjalną gęstością cieczy unoszonej przez szkielet. Łatwo zauważyć na podstawie (3.13) i (3.5), że:

$$\varrho_f(\mathbf{x}, t) = \varrho_e(\mathbf{x}, t) + \varrho_u(\mathbf{x}, t). \quad (3.14)$$

Całkowita gęstość ośrodka jest sumą gęstości parcjalnych (3.4) i (3.5), tj.:

$$\varrho(\mathbf{x}, t) = \varrho_s(\mathbf{x}, t) + \varrho_f(\mathbf{x}, t). \quad (3.15)$$

Z równań (3.11) i (3.12) wynikają następujące równania ciągłości masy odpowiednio szkieletu i cieczy:

$$\frac{\partial \varrho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_s \mathbf{v} = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \varrho_f}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho_e \boldsymbol{w} + \varrho_u \mathbf{v}) = 0. \quad (3.17)$$

W równaniu ciągłości masy cieczy (3.17) uwzględniono konwekcję cieczy przez szkielet.

Z punktu widzenia kinematyki wydaje się słusznym dokonać takiego rozdziału składników, aby ich pola prędkości były jednorodnie. Równania (3.16) i (3.17) sugerują w tym względzie, aby szkielet i unoszoną przez niego ciecz traktować jako jeden składnik, a ciecz swobodną jako drugi składnik. Jeśli napisać równania bilansu masy dla tak wyróżnionych składników, to otrzymalibyśmy, {por. też. [7]};

$$\frac{\partial (\varrho_s + \varrho_u)}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho_s + \varrho_u) \mathbf{v} = \varrho_u^*, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_e \boldsymbol{w} = \varrho_e^*, \quad (3.19)$$

Wielkości ϱ_u^* i ϱ_e^* wyrażają fakt, że masy składników wyróżnione z punktu widzenia kinematyki nie muszą być zachowane. Musi być natomiast zachowana masa całkowita ośrodka, czyli:

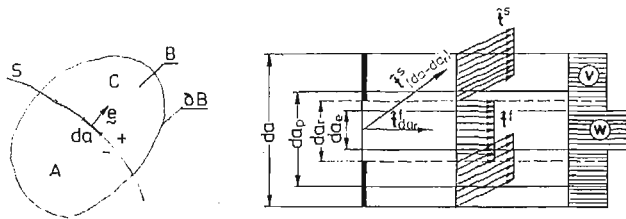
$$\varrho_u^* + \varrho_e^* = 0. \quad (3.20)$$

Fizycznie $\varrho_u^* = -\varrho_e^*$ wyraża prędkość wzajemnej wymiany masy cieczy swobodnej i cieczy unoszonej przez szkielet. Jest ona zależna od ewolucji parametrów stanu, w tym przede wszystkim na prędkości deformacji. Dlatego, zdaniem autora, wielkość $\varrho_u^* = -\varrho_e^*$ powinna być określona równaniem konstytutywnym.

4. Analiza oddziaływań mechanicznych

Problem oddziaływań mechanicznych w ośrodku wieloskładnikowym jest niezwykle złożony. Poświęcono mu kilka prac, np. [5], [10], [11], [12], mimo to trudno uznać go za definitywnie rozwiązany. Kontrowersyjna jest definicja tzw. parcjalnego naprężenia. Definicję taką podał TRUESDELL, [11], lecz została ona podważona przez GURTINA, OLIVERA i WILLIAMS, [5]. Można by się z aprobatą odnieść do propozycji przedstawionej przez tych autorów, a także niezależnie przez OLIVERA, [10], gdyby przedstawionym przez nich rozważaniom matematycznym nadano sens fizyczny. Trudno np. uwierzyć, aby część wewnętrzną parcjalnego naprężenia, zwaną też częścią źródłową, można było a priori sformułować w warunku brzegowym, jak to sugerują autorzy.

Poniżej przedstawimy własny punkt widzenia odnośnie kwestii oddziaływań w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą, nie zaniehbując przy tym sugestii przedstawionych przez wyżej wymienionych autorów. Na początku uczynimy dwa istotne założenia: zaniehbamy dewiator w cieczy jako pomijalnie mały w porównaniu z dewiatorem w szkielecie (nie oznacza to, że zaniehbujemy lepkość cieczy) oraz pomijamy ciśnienie dynamiczne w cieczy, tzn. zakładamy, że zarówno ciecz swobodna jak i ciecz unoszona przez szkielec podlegają w danym punkcie przestrzeni takiemu samemu ciśnieniu rzeczywistemu $p(x, \hat{t})$.



Rys. 2

Rozważmy dowolny obszar B przestrzeni, do której odwzorowano badany ośrodek i rozdzielmy ten obszar na części A i C za pomocą gładkiej powierzchni S , zorientowanej jednostkowym wektorem normalnym e (rys. 2a). Wydzielmy na tej powierzchni element da . Na rysunku 2b zaznaczono przez da_r rzeczywistą powierzchnię cieczy, przez da_e powierzchnię efektywnego wydatku cieczy, a przez da_p średnią powierzchnię cieczy na elemencie da . Jeśli \hat{t}^s oznacza rzeczywiste naprężenie w szkielecie, a $\hat{t}^f = -pe$ rzeczywiste naprężenie w cieczy, to oddziaływanie szkielec na szkielec A oraz cieczy w C na ciecz A możemy wyrazić następująco:

$$f_{ss}(A, C) = \int_S (1 - f_r) \hat{t}^s da, \quad (4.1)$$

$$f_{ff}(A, C) = \int_S f_r \hat{t}^f da, \quad (4.2)$$

przy czym za pracę [5] przyjęto oznaczać przez $f_{\alpha\beta}(A, C)$ oddziaływanie powierzchniowe składnika β w C na składnik α w A ; $f_r = da_r/da$ oznacza tu rzeczywistą porowatość powierzchniową w danym punkcie przestrzeni. Całkowite oddziaływanie powierzchniowe

substancji w C na substancję w A przez powierzchnię S jest sumą:

$$f_{ss}(A, C) + f_{ff}(A, C) = \int_S t da, \quad (4.3)$$

gdzie t oznacza całkowity (uśredniony) wektor naprężenia, równy sumie wektorów parcjalnych.

Jednakże już w punkcie 2 wspomnieliśmy, że korzystanie z funkcji porowatości rzeczywistej mogłoby być kłopotliwe ze względu na jej nieregularność. Po wtóre, gdyby potraktować formuły (4.1) i (4.2) jako definicje parcjalnych wektorów naprężenia, to wyłania się trudność przyporządkowania tym oddziaływaniom odpowiednich popędów zdeterminowanych kinematyką ośrodka. Parcjalny wektor naprężenia musi więc być tak skonstruowany, aby można było mu jednoznacznie przyporządkować popęd parcjalny, a jednocześnie powinien on spełniać warunki twierdzenia Cauchy o liniowej zależności wektora naprężenia od jednostkowego wektora normalnego.

Jeśli z kolei w równaniach (4.1) i (4.2) zastosujemy inną funkcję porowatości niż f_r , to nie możemy już mówić, że parcjalny wektor naprężenia wyraża tylko wzajemne oddziaływanie tego samego składnika przez powierzchnię S . W ślad za definicją podaną przez TRUESDELLA, [11], mówi się, że dany składnik podlega parcjalnemu na prężeniu, jeśli jego działanie na dowolnie pomyślaną diafragmę jest równoważne działaniu wszystkich składników na zewnątrz diafragmy na materiał tego składnika wewnątrz diafragmy. Według tej definicji zamiast (4.1) i (4.2) powinniśmy napisać:

$$f_{ss}(A, C) + f_{sf}(A, C) = \int_S s^s(e) da, \quad (4.4)$$

$$f_{ff}(A, C) + f_{fs}(A, C) = \int_S s^f(e) da, \quad (4.5)$$

przy czym tutaj $f_{sf}(A, C)$ wyraża oddziaływanie cieczy w C na szkielet w A , natomiast $f_{fs}(A, C)$ wyraża oddziaływanie szkieletu w C na ciecz w A .

Jeśli zamienimy obszary A i C wzajemnie ze sobą, pozostawiając niezmienną orientację powierzchni S , to zamiast (4.4) i (4.5) otrzymamy:

$$f_{ss}(C, A) + f_{sf}(C, A) = \int_S s^s(-e) da, \quad (4.6)$$

$$f_{ff}(C, A) + f_{fs}(C, A) = \int_S s^f(-e) da. \quad (4.7)$$

Z zasady akcji i reakcji mamy: $f_{ss}(C, A) = -f_{ss}(A, C)$, $f_{ff}(C, A) = -f_{ff}(A, C)$, $f_{sf}(C, A) = -f_{fs}(A, C)$, $f_{fs}(C, A) = -f_{sf}(A, C)$. Wykorzystując liniową zależność wektora naprężenia od wektora normalnego, tj.: $s^\alpha(e) = -s^\alpha(-e)$; $\alpha = s, f$, otrzymujemy, na podstawie (4.4) ÷ (4.7), relację:

$$f_{sf}(A, C) = f_{fs}(A, C), \quad (4.8)$$

wyrażającą pewną symetrię oddziaływań, a mianowicie, że ciecz w C działa na szkielet w A z taką samą siłą jak szkielet w C na ciecz w A . GURTIN, OLIVER i WILLIAMS, [5], nazwali taką symetrię oddziaływań paradoksem. Proponują oni następującą korektę definicji Truesdella. Postulują, aby we wzorach (4.4) i (4.5) przyjąć $s^\alpha(n) \neq s^\alpha(-n)$;

$\alpha = s, f$ i uzupełnić te formuły o powierzchniowe oddziaływania wewnętrzne $\bar{f}_{sf}(A, A)$ i $\bar{f}_{fs}(A, A)$. Wtedy wektory główne sił powierzchniowych mają postać:

$$f_{ss}(A, C) + f_{sf}(A, C) + \bar{f}_{sf}(A, A) = \int_S \mathbf{t}^s(e) da, \quad (4.9)$$

$$f_{ff}(A, C) + f_{fs}(A, C) + \bar{f}_{fs}(A, A) = \int_S \mathbf{t}^f(e) da, \quad (4.10)$$

przy czym

$$\mathbf{t}^\alpha(e) = s^\alpha(e) + k^\alpha(e) = -\mathbf{t}^\alpha(-e). \quad (4.11)$$

W pracy [5] nazwano $s^\alpha(e)$ zewnętrznym a $k^\alpha(e)$ wewnętrznym wektorem naprężenia.

Korzystając z liniowej zależności parcjalnych wektorów naprężenia $\mathbf{t}^s(e)$ i $\mathbf{t}^f(e)$ od wektora normalnego oraz ze wzoru (4.3) znajdujemy następujące relacje:

$$f_{sf}(A, C) = -\frac{1}{2} [\bar{f}_{sf}(A, A) + \bar{f}_{sf}(C, C)], \quad (4.12)$$

$$f_{fs}(A, C) = -\frac{1}{2} [\bar{f}_{fs}(A, A) + \bar{f}_{fs}(C, C)].$$

Wykorzystując te relacje we wzorach (4.9) i (4.10) otrzymujemy:

$$f_{ss}(A, C) + \frac{\bar{f}_{sf}(A, A) - \bar{f}_{sf}(C, C)}{2} = \int_S \mathbf{t}^s(e) da, \quad (4.13)$$

$$f_{ff}(A, C) - \frac{\bar{f}_{sf}(A, A) - \bar{f}_{sf}(C, C)}{2} = \int_S \mathbf{t}^f(e) da.$$

Wyrażenie $[\bar{f}_{sf}(A, A) - \bar{f}_{sf}(C, C)]$ będzie różne od zera na powierzchni S przy założeniu $f_{sf}(A, C) \neq 0$ lub $f_{fs}(A, C) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, jeśli na tej powierzchni będą istnieć źródła sił powierzchniowych, co naszym zdaniem jest możliwe tylko, jeśli S będzie powierzchnią osobliwą.

Konkludując stwierdzamy że założenie a priori $f_{\alpha\beta}(A, C) \neq 0$, $\alpha \neq \beta$ prowadzi do kontrowersyjnego wyniku występowania źródeł sił powierzchniowych na dowolnej powierzchni S , poprowadzonej myślowo przez ośrodek.

Naszym zdaniem, oddziaływania krzyżowe składników wewnątrz obszaru ze składnikami na zewnątrz obszaru nie istnieją, z wyjątkiem być może powierzchni osobliwych lub dalekich oddziaływań. Mogą istnieć natomiast oddziaływania krzyżowe pomiędzy składnikami wewnątrz samego obszaru. Mamy tu oczywiście na myśli oddziaływania inne niż te, które występują w związkach fizycznych (por. np. [1], [3]). W związkach tych parcjalne naprężenie w danym składniku zależy od deformacji wszystkich składników, lecz są to oddziaływania dylatacyjne.

Nie jest naszym celem formułowanie ogólnej definicji parcjalnego naprężenia. Wydaje się jednak, że definicja taka powinna określać izomorfizm parcjalnego pędu i cząstkowych sił powierzchniowych. Jeśli mieszanina znajduje się w równowadze wewnętrznej, tj. gdy nie występuje ruch względny składników, brak jest wtedy parcjalnych pędów i nie zachodzi potrzeba posługiwania się pojęciem parcjalnego naprężenia.

W tej pracy przyjmiemy zatem $f_{\alpha\beta}(A, C) = 0$, $\alpha \neq \beta$. Oddziaływania wewnętrzne będą wtedy samozrównoważone na powierzchni myślowego rozdziału, tj.:

$$\bar{f}_{\alpha\beta}(A, A) + \bar{f}_{\alpha\beta}(C, C) = 0 \text{ na } S. \quad (4.14)$$

Można im nadać określony sens fizyczny. Wielkość $\bar{f}_{sf}(A, A)$ może np. wyrażać oddziaływanie na szkielet cieczy przez niego unoszonej itp.

Z powyższych konkluzji wynika, że na parcjalny wektor naprężenia składają się oddziaływania zewnętrzne z tym samym składnikiem oraz oddziaływania wewnętrzne z pozostałymi składnikami, czyli:

$$\begin{aligned} f_{ss}(A, C) + \bar{f}_{sf}(A, A) &= \int_S \mathbf{t}^s(e) da, \\ f_{rf}(A, C) + \bar{f}_{rs}(A, A) &= \int_S \mathbf{t}^f(e) da. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Formuły (4.15) sugerują pewną dowolność w konstruowaniu parcjalnego wektora naprężenia. Możemy np. skonstruować wektory parcjalne odniesione do efektywnej porowatości powierzchniowej, bądź też średniej porowatości powierzchniowej. W pierwszym przypadku oddziaływania wewnętrzne wynikają z różnicy rzeczywistej i efektywnej porowatości powierzchniowej, a w drugim przypadku z różnicy rzeczywistej i średniej porowatości powierzchniowej. Przyjmiemy, że iloczyn rzeczywistego naprężenia działającego w danym składniku przez odpowiadającą mu powierzchnię działania jest funkcją regularną. Przy żądanej gładkości obszarów i funkcji możemy naprężenia parcjalne \mathbf{t}^1 , działające na szkielet wraz z unoszoną cieczą oraz naprężenie parcjalne \mathbf{t}^2 , działające na ciecz swobodną wyrazić jak następuje:

$$\mathbf{t}^1 = (1 - f_r) \hat{\mathbf{t}}^s - (f_r - f_e) p \mathbf{e}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{t}^2 = -p f_e \mathbf{e}. \quad (4.17)$$

Dla tego przypadku:

$$s^s = (1 - f_r) \hat{\mathbf{t}}^s, \quad s^f = -p f_e \mathbf{e}, \quad k^s = -k^f = -(f_r - f_e) p \mathbf{e}.$$

Są to naprężenia parcjalne, skonstruowane w oparciu o rzeczywistą i efektywną porowatość powierzchniową. Natomiast naprężenia parcjalne, skonstruowane w oparciu o rzeczywistą i średnią porowatość powierzchniową przyjmują postać:

$$\mathbf{t}^s = (1 - f_r) \hat{\mathbf{t}}^s - (f_r - f_p) p \mathbf{e}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{t}^f = -p f_p \mathbf{e}. \quad (4.19)$$

Tutaj:

$$s^s = (1 - f_r) \hat{\mathbf{t}}^s, \quad s^f = -f_p p \mathbf{e}, \quad k^s = -k^f = -(f_r - f_p) p \mathbf{e}.$$

Jak łatwo zauważyć, wektory \mathbf{t}^1 i \mathbf{t}^s oraz \mathbf{t}^2 i \mathbf{t}^f różnią się między sobą wartością ciśnienia wynikającą z różnicy średniej i efektywnej porowatości:

$$\mathbf{t}^1 = \mathbf{t}^s - (f_p - f_e) p \mathbf{e}, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{t}^2 = \mathbf{t}^f + (f_p - f_e) p \mathbf{e}. \quad (4.21)$$

Wzory (4.16) - (4.21) są istotne przy formułowaniu warunków brzegowych.

5. Równania bilansu pędu

Rozważmy ponownie pewien obszar B ograniczony gładką i zamkniętą powierzchnią ∂B , zorientowaną na zewnątrz jednostkowym wektorem normalnym \mathbf{n} . Bilans pędu cieczy swobodnej zawartej w tym obszarze wyraża się następująco:

$$\int_{\partial B} (-pf_e \mathbf{n}) da + \int_B (\varrho_f^r f_e \mathbf{X} + \mathbf{F}^{21}) dv = \left(\int_B \varrho_f^r f_e \mathbf{w} dv \right)'. \quad (5.1)$$

Tutaj \mathbf{X} oznacza siły masowe, a \mathbf{F}^{12} siłę oddziaływania pomiędzy składnikami (siłę dyfuzji). Zastąpmy funkcję porowatości f_e w równaniu (5.1) funkcją średniej porowatości f_p . Mamy więc:

$$\int_{\partial B} (-pf_p \mathbf{n}) da + \int_B (\varrho_f^r f_p \mathbf{X} + \mathbf{F}^{fs}) dv = \left(\int_B \varrho_f^r f_p \mathbf{w} dv \right)'. \quad (5.2)$$

W powyższych równaniach przyjęliśmy następujące przyporządkowania sił powierzchniowych i pędów:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^2 &= -pf_e \mathbf{n} \leftrightarrow \varrho_f^r f_e \mathbf{w}, \\ \mathbf{t}^f &= -pf_p \mathbf{n} \leftrightarrow \varrho_f^r f_p \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

tzn. określonej porowatości przy niezmiennym p , przyporządkowana jest określona ilość masy biorącej udział w ruchu przy niezminionej prędkości ruchu \mathbf{w} . Oczywiście, całkowite zmiany czasowe prawych stron równań (5.1) i (5.2) będą się różnić prędkościami konwekcji. W pierwszym przypadku rozważamy bowiem tylko ciecz swobodną, która może mieć jedynie prędkość konwekcji \mathbf{w} , a w drugim przypadku całą ciecz, która charakteryzuje się prędkością konwekcji zarówno \mathbf{w} jak i \mathbf{v} (por. punkt 3).

Równania (5.1) i (5.2), po rozpisaniu prawych stron i zamianie całek powierzchniowych na objętościowe, przyjmują postać:

$$\int_B (\text{grad } \sigma^2 + \varrho_e \mathbf{X} + \mathbf{F}^{21}) dv = \int_B \left(\frac{\partial \varrho_e \mathbf{w}}{\partial t} + \text{div } \varrho_e \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \right) dv, \quad (5.4)$$

$$\int_B (\text{grad } \sigma^f + \varrho_f \mathbf{X} + \mathbf{F}^{fs}) dv = \int_B \left(\frac{\partial \varrho_f \mathbf{w}}{\partial t} + \text{div} [\varrho_e \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} + \varrho_u \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}] \right) dv, \quad (5.5)$$

gdzie oznaczono:

$$\sigma^2 = -pf_e, \quad \sigma^f = -pf_p. \quad (5.6)$$

Bilans pędu szkieletu i unoszonej przez niego cieczy (traktowanych jako jeden składnik) opisuje równanie:

$$\int_{\partial B} \mathbf{t}^1 da + \int_B [(\varrho_s + \varrho_u) \mathbf{X} + \mathbf{F}^{12}] dv = \left(\int_B (\varrho_s + \varrho_u) \mathbf{v} dv \right)'. \quad (5.7)$$

Jeśli wykorzystamy wzór Cauchy dla naprężeń ($\mathbf{t}^1(\mathbf{n})$ jest liniową funkcją wektora normalnego):

$$\mathbf{t}^1 = \sigma^1 \mathbf{n}, \quad (5.8)$$

oraz uwzględnimy fakt, że masa $(\varrho_s + \varrho_u)$ posiada prędkość konwekcji \mathbf{v} , to równanie

(5.7) możemy przepisać w postaci:

$$\int_B (\operatorname{div} \sigma^1 + (\varrho_s + \varrho_u) X + F^{12}) dv = \int_B \left[\frac{\partial(\varrho_s + \varrho_u) v}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_s + \varrho_u) v \otimes v \right] dv. \quad (5.9)$$

Równania (5.4) i (5.9) opisują ruch składników zdeterminowanych efektywną porowatością powierzchniową (składniki kinematyczne). Wobec dowolności wyboru obszaru B , możemy je napisać w postaci lokalnej:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma^1 + (\varrho_s + \varrho_u) X + F^{12} &= \varrho_u^* v + (\varrho_s + \varrho_u) \frac{dv}{dt}, \\ \operatorname{grad} \sigma^2 + \varrho_e X + F^{21} &= \varrho_e^* w + \varrho_e \frac{Dw}{Dt}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

przy czym, przy przekształceniach prawych stron wykorzystano równania ciągłości (3.18) i (3.19), oraz oznaczono $d(\cdot)/dt = \partial(\cdot)/\partial t + v \operatorname{grad}(\cdot)$, $D(\cdot)/Dt = \partial(\cdot)/\partial t + w \operatorname{grad}(\cdot)$.

Siły dyfuzji spełniają warunek:

$$F^{12} + F^{21} = 0. \quad (5.11)$$

Obecnie łatwo zauważyć, że równanie komplementarne do (5.2) powinno mieć postać:

$$\int_{\partial B} t^s da + \int_B (\varrho_s X + F^{sf}) dv = \left(\int_B [(\varrho_s + \varrho_u) v - \varrho_u w] dv \right)'. \quad (5.12)$$

Masa szkieletu i cieczy unoszonej przez szkielet mają prędkość konwekcji v . Dla wektora naprężenia $t^s(n)$ wykorzystamy formułę Cauchy:

$$t^s = \sigma^s n \quad (5.13)$$

i przekształcimy równanie (5.12) jak następuje:

$$\int_B (\operatorname{div} \sigma^s + \varrho_s X + F^{sf}) dv = \int_B \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [(\varrho_s + \varrho_u) v - \varrho_u w] + \operatorname{div} [(\varrho_s + \varrho_u) v - \varrho_u w] \otimes v \right\} dv. \quad (5.14)$$

Równania (5.5) i (5.14) stanowią drugą alternatywną parę równań opisujących ruch ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Dotyczą one składników zdeterminowanych porowatością objętościową. Wprowadzimy średnią prędkość ruchu cieczy V zdefiniowaną:

$$\varrho_f V \stackrel{\text{df}}{=} \varrho_u v + \varrho_e w, \quad (5.15)$$

i wyrazimy równania (5.5) i (5.14) za pomocą tej prędkości. Ich forma lokalna ma postać:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma^s + \varrho_s X + F^{sf} &= \frac{\partial}{\partial t} (\varrho_{11} v + \varrho_{12} V) + \operatorname{div} [(\varrho_{11} v + \varrho_{12} V) \otimes v], \\ \operatorname{grad} \sigma^f + \varrho_f X + F^{fs} &= \frac{\partial}{\partial t} (\varrho_{12} v + \varrho_{22} V) + \operatorname{div} [(\varrho_{12} v + \varrho_{22} V) \otimes V], \end{aligned} \quad (5.16)$$

gdzie oznaczono:

$$\varrho_{11} = \varrho_s - \varrho_{12}, \quad \varrho_{12} = -\frac{\varrho_u \varrho_f}{\varrho_e}, \quad \varrho_{22} = \varrho_f - \varrho_{12}. \quad (5.17)$$

Zróżniczkujemy prawe strony równań (5.16) wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho_{11}}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_{11} \mathbf{v} &= \varrho_{11}^*, & \frac{\partial \varrho_{12}}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_{12} \mathbf{v} &= \varrho_{12}^*, & \varrho_{11}^* + \varrho_{12}^* &= 0, \\ \frac{\partial \varrho_{12}}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_{12} \mathbf{V} &= \varrho_{12}^{**}, & \frac{\partial \varrho_{22}}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_{22} \mathbf{V} &= \varrho_{22}^{**}, & \varrho_{12}^{**} + \varrho_{22}^{**} &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma^s + \varrho_s \mathbf{X} + \mathbf{F}^{sf} &= \varrho_{11}^* \mathbf{v} + \varrho_{12}^* \mathbf{V} + \varrho_{11} \dot{\mathbf{v}} + \varrho_{12} \dot{\mathbf{V}}, \\ \operatorname{grad} \sigma^f + \varrho_f \mathbf{X} + \mathbf{F}^{fs} &= \varrho_{12}^{**} \mathbf{v} + \varrho_{22}^{**} \mathbf{V} + \varrho_{12} \dot{\mathbf{v}} + \varrho_{22} \dot{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

przy czym „kropka” nad symbolem oznacza pochodną materialną z prędkością konwekcji \mathbf{v} , a „prim” pochodną materialną z prędkością konwekcji \mathbf{V} . Wielkości $\varrho_{12}^* = -\varrho_{11}^*$ i $\varrho_{12}^{**} = -\varrho_{22}^{**}$, podobnie jak $\varrho_u^* = -\varrho_e^*$ powinny być określone równaniem konstytutywnym.

Równania (5.10) i (5.19), jeśli pominąć w nich człony źródłowe, są analogiczne odpowiednio jak równania DERSKIEGO, [2], i BIOTA, [1].

6. Uwagi końcowe

Przedstawimy jeszcze kilka uwag uzupełniających dotychczasowe rozważania. Bez dowodu, gdyż łatwo to sprawdzić, podamy, że pominięcie dewiatora naprężeń w cieczy implikuje automatycznie symetrię rozważanych przez nas parcjalnych tensorów naprężenia, tj.:

$$\sigma^1 = (\sigma^1)^T \quad \text{i} \quad \sigma^s = (\sigma^s)^T. \quad (6.1)$$

Aby określić wartości brzegowe parcjalnych tensorów naprężenia, należy znać na brzegu: rzeczywistą wartość wektora naprężenia w szkielecie $\hat{\mathbf{t}}^s$, rzeczywiste ciśnienie cieczy p , rzeczywistą porowatość powierzchniową f_r oraz efektywną, jeśli korzystamy z równań (5.10), lub średnią, jeśli korzystamy z równań (5.19), porowatość powierzchniową. Wtedy:

$$\begin{aligned} \sigma^1 \mathbf{n} &= (1 - f_r) \hat{\mathbf{t}}^s - (f_r - f_e) p \mathbf{n} = \text{funkcja dana}, \\ \sigma^2 \mathbf{n} &= -p f_e \mathbf{n} = \text{funkcja dana}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

lub:

$$\begin{aligned} \sigma^s \mathbf{n} &= (1 - f_r) \hat{\mathbf{t}}^s - (f_r - f_p) p \mathbf{n} = \text{funkcja dana}, \\ \sigma^f &= -p f_p = \text{funkcja dana}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Jeśli w obszarze B przemieszcza się z prędkością \mathbf{c} powierzchnia nieciągłości S , zorientowana jednostkowym wektorem normalnym \mathbf{e} (rys. 2a), to na tej powierzchni zachodzą

dążą następujące warunki ciągłości kinematycznej i dynamicznej:

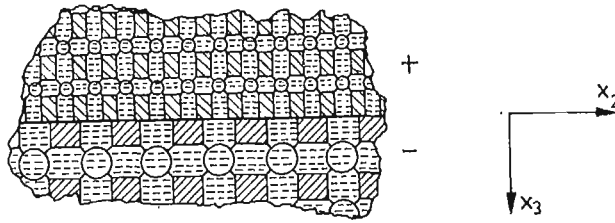
— dla składników kinematycznych

$$\begin{aligned} [[\varrho_s + \varrho_u](\mathbf{v} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}] &= 0, & [[\varrho_e(\mathbf{w} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}]] &= 0, \\ [[\mathbf{t}^1]] &= [[\varrho_s + \varrho_u]\mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}], & [[\mathbf{t}^2]] &= [[\varrho_e \mathbf{w}(\mathbf{w} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}]], \end{aligned} \quad (6.4)$$

— dla składników fizycznych

$$\begin{aligned} [[\varrho_s(\mathbf{v} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}]] &= 0, & [[\varrho_f(\mathbf{V} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}]] &= 0, \\ [[\mathbf{t}^s]] &= [[(\varrho_{11}\mathbf{v} + \varrho_{12}\mathbf{V})(\mathbf{v} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}]], & [[\mathbf{t}^f]] &= [[(\varrho_{12}\mathbf{v} + \varrho_{22}\mathbf{V})(\mathbf{V} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}]], \end{aligned} \quad (6.5)$$

przy czym $[[\varphi]] = \varphi^+ - \varphi^-$, jest oznaczeniem nieciągłości funkcji na S . Jeśli powierzchnia S byłaby powierzchnią materialną, np. powierzchnią kontaktu dwóch ośrodków porowa-



Rys. 3

tych (lub powierzchnią brzegową związaną ze szkieletem) (rys. 3), wtedy $\mathbf{v} = \mathbf{c}$ i związki (6.4) i (6.5) przyjmują prostszą postać:

$$[[\varrho_e(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}]] = 0, \quad [[\mathbf{t}^1]] = 0, \quad [[\mathbf{t}^2]] = \varrho_e(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}[[\mathbf{w}]], \quad (6.4a)$$

oraz

$$[[\varrho_f(\mathbf{V} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}]] = 0, \quad [[\mathbf{t}^s]] = 0, \quad [[\mathbf{t}^f]] = [[(\varrho_{12}\mathbf{v} + \varrho_{22}\mathbf{V})(\mathbf{V} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}]]. \quad (6.5a)$$

Zależności (6.4a) i (6.5a) mogą być pomocne przy formułowaniu warunków brzegowych.

Przez ekwiwalentność równań (5.10) i (5.19) rozumiemy ich potencjalną możliwość opisu tych samych zjawisk. Tak np. oba typy równań ujmują zjawisko sprzężenia ruchu przez masę. Moc mechaniczna przekazywana do dowolnie zdefiniowanego układu termodynamicznego musi być taka sama, niezależnie od tego czy użyjemy do opisu tensorów parcjalnych σ^1 i $\sigma^2 \mathbf{I}$ (\mathbf{I} = jednostkowy tensor) i odpowiednio prędkości przemieszczeń \mathbf{v} i \mathbf{w} , czy też tensorów σ^s i $\sigma^f \mathbf{I}$ i prędkości \mathbf{v} i \mathbf{V} . Analogicznie, moc sił dyfuzji, energia kinetyczna, energia wewnętrzna itp. muszą być takie same, niezależnie od tego czy dokonamy podziału na składniki kinematyczne czy też fizyczne. Żądanie spełnienia wyżej wymienionych warunków prowadzi do określonych relacji pomiędzy parametrami obu typów równań. Znamy już relacje pomiędzy parcjalnymi naprężeniami, parcjalnymi gęstościami, pomiędzy prędkościami, itp. Z równości mocy sił dyfuzji otrzymujemy dodatkowo relację:

$$\mathbf{F}^{12} = \mathbf{F}^{sf} \frac{f_c}{f_p}. \quad (6.6)$$

Wybiegając nieco poza zakres tej pracy, podamy relację:

$$\sigma^2 \text{grad} \left(\frac{f_v}{f_e} \right) = \frac{f_v}{f_e} \varrho_u^* \mathbf{w} - \varrho_u(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \text{grad} \mathbf{w}, \quad (6.7)$$

która wynika z przyrównania energii wewnętrznej w obu opisach. Wszystkie te relacje pozwalają przetransformować układ równań (5.10) w (5.19) i na odwrót. Na zakończenie wspomnimy jeszcze, że ponieważ energia kinetyczna przy podziale kinematycznym ma postać kanoniczną formy kwadratowej, tj.:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} [(\varrho_s + \varrho_u) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \varrho_e \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}], \quad (6.8)$$

natomiast przy podziale fizycznym pełną postać formy kwadratowej, tj.:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} (\varrho_{11} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\varrho_{12} \mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + \varrho_{22} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}), \quad (6.9)$$

przyjęto mówić (por. [8]), że ruch składników kinematycznych opisany jest we współrzędnych normalnych.

Literatura

1. M. A. BIOT, *Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid Saturated Porous Solid, I. Low-Frequency Range*, J. Acoust. Soc. of Amer., Vol. 28, 2, 1956.
2. W. DERSKI, *Equations of Motion for a Fluid-Saturated Porous Solids*, Bull. Acad. Pol. Sc., Vol. XXVI, No 1, 1978.
3. W. DERSKI, S. J. KOWALSKI, *Equations of Linear Thermoconsolidation*, Arch. Mech. Stos. 31, 3, 1979.
4. R. DZIĘCIELAK, *Propagacja fal nieciągłości w ośrodku porowatym nasyconym cieczą*, Politechnika Poznańska, Rozprawy Nr 118, 1980.
5. M. E. GURTIN, M. L. OLIVER, W. O. WILLIAMS, *On Balance of Forces for Mixtures*, Quart. App. Math., January, 1973.
6. S. J. KOWALSKI, *Comparison of the Biot Equations of Motion for a Fluid-Saturated Porous Solid with Those of Derski*, Bull. Acad. Pol. Sci., Vol. XVII, No. 10 - 11, 1979.
7. S. J. KOWALSKI, *Identification of the Coefficients in the Equations of Motions for a Fluid-Saturated Porous Medium*, Acta Mechanica 47, 263 - 276, 1983.
8. S. J. KOWALSKI, *Współrzędne normalne i warunki brzegowe w teorii mieszanin*, Prace IPPT, nr 5/1980.
9. J. KUBIK, *Mechanika silnie odkształcalnych ośrodków o anizotropowej przepuszczalności*, Prace IPPT, nr 29/1981.
10. M. L. OLIVER, *On Balanced Interactions in Mixtures*, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 49, 28, 1972.
11. C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, In Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer-Verlag, Berlin—Göttigen—Heidelberg, 1960.
12. B. UZIEMBŁO, *Podstawy termodynamiki aksjomatycznej wieloskładnikowych ośrodków ciągłych*, Praca doktorska (IPPT), 28, 1974.
13. K. WILMAŃSKI, *Zarys termodynamiki i ośrodków ciągłych*, Prace IPPT, nr 6/1975.

Резюме

ДВИЖЕНИЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ВЫПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ. ОБЩИЙ ОПИСЬ

Целью работы является выведение из баланса массы и количества движения уравнений движения для пористой среды заполненной жидкостью. Учитывается при этом сопряжение движения компонентов через массу, изменение пористости и плотности компонентов. Показывается, что на этой пути возможно получить две отличные но эквивалентные формы уравнений похожих на известные уравнения Биота и Дерского. Вокруг этих уравнений существует много сомнений. Эти сомнения а также определение парциального напряжения обсуждается в работе.

S u m m a r y

MOTION OF A FLUID-SATURATED POROUS MEDIUM
GLOBAL DESCRIPTION

Main purpose of the paper is to show the way of derivation of two different forms of equations of motion for a fluid-saturate porous solid i.e. the equations similar to those presented earlier by Biot (1956) and by Derski (1978). However these equations and their interpretation are sometimes questionable. Departing from the mass and momentum balance equations we discuss the pertinent motions taking into account the effect of couplings through the mass, variation of porosity and the components density. A controversial definition of the partial stress is also discussed in the paper.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 lipca 1985 roku
