

## NIELINIOWE WARUNKI BRZEGOWE W PROBLEMACH FILTRACJI USTALONEJ

BOGDAN WOSIEWICZ

*Akademia Rolnicza. Poznań*

### 1. Wstęp

W ciągu ostatnich kilku lat ukazało się kilka obszernych monografii, kompleksowo omawiających zjawiska filtracji przez ośrodki porowate i metody ich modelowania ([1], [2], [3], [4]). Przy matematycznym opisie zjawisk filtracji ustalonej pojawiać się musi problem sformułowania warunków brzegowych. Każda z cytowanych powyżej monografii poświęca temu zagadnieniu sporo uwagi.

W zagadnieniach filtracji pod ciśnieniem wyróżnia się: a) warunki na granicy kontaktu z zadaniem zwierciadłem wody (ciśnieniem), b) brzeg z zadaniem przepływu (w szczególności brzeg nieprzepuszczalny) oraz c) warunki na brzegu półprzepuszczalnym [1]. W sensie matematycznym odpowiadają one warunkom brzegowym Dirichleta, Neumanna i Cauchy'ego. W problemach filtracji swobodnej wyróżnia się nadto warunki brzegowe na powierzchni swobodnej oraz na powierzchni wysączenia. W ośrodkach ze skokowo zmienną przepuszczalnością wyróżnia się jeszcze warunki ciągłości (ciśnienia i przepływu) na granicach warstw.

Wszystkie analizowane w pracach [1], [2], [3], [4] i wymienione tu warunki brzegowe są warunkami liniowymi.

Okazuje się jednakże, że przy rozwiązywaniu problemów praktycznych mogą się pojawiać nieliniowe warunki brzegowe. Otrzymać je można przy linearyzacji nieliniowych równań filtracji pojawiających się w zagadnieniach opisanych nieliniowymi równaniami konstytutywnymi, a także przy obliczeniowej idealizacji niektórych złożonych zadań filtracji.

Celem pracy jest zwrócenie uwagi na możliwość pojawienia się nieliniowych warunków brzegowych w rzeczywistych problemach filtracji, podanie charakterystycznych przykładów oraz adaptacja znanych metod numerycznych do iteracyjnego rozwiązywania takich problemów. Tematyka nieliniowych warunków brzegowych nie była dotąd dyskutowana w odniesieniu do praktycznych, inżynierskich problemów filtracji przez ośrodki porowate (por. np. brak wzmianek na ten temat w monografiach [1], [2], [3], [4]).

## 2. Linearyzacja nieliniowych równań filtracji

W wielu ważnych problemach technicznych rozwiązania oparte o liniową zależność pomiędzy prędkością filtracji o gradientem ciśnienia (prawo Darcy'ego) można traktować wyłącznie jako pierwsze przybliżenie. Dotyczy to zarówno przepływu wody przez ośrodki gruboziarniste [5] jak i filtracji przez gliny i ropy [6]. Nieliniowe efekty pojawiają się przy przepływach roztworów wodnych soli mineralnych [7] jak również przy filtracji cieczy wykazujących tzw. pseudoplastyczne efekty (np. ropa naftowa) [8]. Jednakże przyjęcie nieliniowego prawa filtracji prowadzi do modelu opisanego nieliniowym równaniem różniczkowym rzędu drugiego, którego analityczne rozwiązanie napotyka na poważne trudności rachunkowe. Do nieliniowego równania filtracji prowadzą także problemy z uwzględnieniem ściśliwości cieczy. Nieliniowe dwuwymiarowe równania filtracji otrzymuje się również przy rozpatrywaniu przestrzennych problemów filtracji analizowanych przy założeniu Dupuit.

Niektóre z tak otrzymanych równań nieliniowych można zlinearyzować wprowadzając odpowiednio dobrany potencjał. Przy takiej linearyzacji pojawiać się mogą nieliniowe warunki brzegowe. Linearyzacja równania kosztem warunków brzegowych umożliwia często uzyskanie rozwiązania łatwiej i mniejszym kosztem niż rozwiązania problemu wyjściowego (por. np. p. 4).

Rozpatrzmy trzy charakterystyczne przykłady:

1. Najczęstszy przypadek linearyzacji, wykonywanej zresztą standardowo, pojawia się w problemach filtracji opisanych równaniem Boussinesq'a. W przypadku stacjonarnym konieczne jest wówczas rozwiązanie równania różniczkowego

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y h \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0, \quad (1)$$

gdzie  $h$  jest wysokością położenia powierzchni swobodnej nad poziom warstwy nieprzepuszczalnej,  $k_x$  i  $k_y$  są współczynnikami filtracji odpowiednio w kierunku osi  $x$  i  $y$ . Zakładając dla uproszczenia, że  $k_x = k_y = k$  i wprowadzając potencjał zdefiniowany następująco:

$$H = \int_0^h kh dh = \frac{kh^2}{2}, \quad (2)$$

otrzymujemy, że funkcje  $H(x, y)$  w obszarze filtracji  $\Omega$  spełniać winna równanie różniczkowe Laplace'a:

$$\nabla^2 H = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (3)$$

Typowe warunki brzegowe

$$h = g, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (4)$$

$$v_n = q, \quad (x, y) \in \Gamma_2, \quad (5)$$

gdzie  $v_n$  jest prędkością normalną do brzegu, a  $g$  i  $q$  są zadanymi funkcjami odpowiednio

na częściach  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  brzegu, są dla funkcji  $H$  także liniowe. Mają one postać:

$$H = \frac{k}{2} g^2, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial n} = -q, \quad (x, y) \in \Gamma_2, \quad (7)$$

Jeżeli jednak uwzględnić uogólniony problem brzegowy [1] z warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju na części  $\Gamma_2$  brzegu

$$v_n + ah = g, \quad (8)$$

gdzie  $a$  jest zadaną funkcją, to dla funkcji  $H$  otrzymujemy nieliniowy warunek brzegowy

$$\frac{\partial H}{\partial n} - a \sqrt{\frac{2H}{k}} = -g \quad (9)$$

2. Rozpatrzmy płaską nieliniową filtrację w ośrodku uwarstwowionym. Dla uproszczenia założymy istnienie tylko dwóch warstw oraz, że granica warstw jest prostą o równaniu  $y = y_1$ . Prawo filtracji dla obu warstw przyjmijmy w postaci:

$$v_i = -k_i(p_i) \text{grad} p_i, \quad (x, y) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

gdzie  $v_i$ ,  $p_i$  są odpowiednio wektorem prędkości oraz rozkładem ciśnienia w  $i$ -tej warstwie.

Wykorzystując równanie ciągłości otrzymamy dla każdej z warstw następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_i(p_i) \frac{\partial p_i}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_i(p_i) \frac{\partial p_i}{\partial y} \right] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Warunki ciągłości przepływu i ciśnienia wzdłuż granicy warstw mają postać:

$$k_1(p_1) \frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{y=y_1} = k_2(p_2) \frac{\partial p_2}{\partial y} \Big|_{y=y_1}, \quad (12)$$

oraz

$$p_1(x, y_1) = p_2(x, y_1). \quad (13)$$

Wprowadzając dla każdej z warstw potencjały prędkości według następujących formuł:

$$P_i = \int_0^{p_i} k_i(p_i) dp_i, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

równania różniczkowe (11) przekształcają się w równania Laplace'a

$$\nabla^2 P_i = 0, \quad (x, y) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

a warunki brzegowe (12) i (13) przechodzą odpowiednio w równania

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=y_1} = \frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{y=y_1}, \quad (16)$$

oraz

$$f_1[P_1(x, y_1)] = f_2[P_2(x, y_1)], \quad (17)$$

gdzie  $f_i(P_i)$  jest funkcją odwrotną do  $P_i(p_i)$ , wyznaczoną na podstawie równania (14).

Równanie (17) jest w ogólności także równaniem nieliniowym. Przykładowo, jeżeli przyjąć za pracę [9] dla przepuszczalności ośrodka następujące funkcje:

$$k_i(p_i) = k_{0i} \exp(\alpha_i p_i), \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

gdzie  $k_{0i}$  oraz  $\alpha_i$  są stałymi, wówczas na podstawie (14) uzyskujemy:

$$P_i = \frac{1}{\alpha_i} k_{0i} \exp(\alpha_i p_i), \quad (19)$$

skąd

$$f_i(P_i) = \frac{1}{\alpha_i} \ln \frac{\alpha_i P_i}{k_{0i}}. \quad (20)$$

3. Rozpatrzmy nieliniową filtrację ustaloną ściśliwej cieczy barotropowej w anizotropowym ośrodku porowatym [10]. Na części  $\Gamma_1$  zadane jest ciśnienie  $p_0$ , a na pozostałej części  $\Gamma_2$  brzegu przepływ  $q$ . Równaniami podstawowymi problemu są:

— prawo Darcy'ego (bez udziału sił masowych)

$$\mathbf{v} = -\mathbf{k} \text{grad} p, \quad (21)$$

w którym tensor współczynników filtracji  $\mathbf{k}$  jest znaną funkcją współrzędnych ( $\mathbf{v}$  i  $p$  jak poprzednio),

— równanie stanu ( $\varrho$ -gęstość):

$$\varrho = \varrho(p), \quad (22)$$

oraz równanie ciągłości przepływu

$$\text{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0. \quad (23)$$

Warunki brzegowe są następujące:

$$p = p_0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_1, \quad (24)$$

$$v_n = q, \quad (x, y, z) \in \Gamma_2, \quad (25)$$

gdzie  $p_0$  i  $q$  są zadanymi funkcjami.

Podstawiając zależności (21) i (22) do równania ciągłości (23) uzyskamy nieliniowe równanie różniczkowe rzędu drugiego

$$\text{div}[\varrho(p) \mathbf{k} \text{grad} p] = 0, \quad (26)$$

pozwalające wraz z warunkami brzegowymi (24) i (25) na wyznaczenie funkcji  $p(x, y, z)$ . Wprowadźmy jak poprzednio w miejsce  $p$  nową zmienną  $P$  według zależności

$$P = \int_0^p \varrho(p) dp. \quad (27)$$

Na podstawie zależności (27) można napisać

$$\varrho \mathbf{v} = -\varrho(p) \mathbf{k} \text{grad} p = -\mathbf{k} \text{grad} P, \quad (28)$$

skąd równanie (26) przechodzi w liniowe równanie różniczkowe

$$\text{div}(\mathbf{k} \text{grad} P) = 0, \quad (29)$$

Warunek brzegowy dla  $P$  na brzegu  $\Gamma_1$  otrzymuje się z (24) następująco:

$$P = \int_0^{p_0} \varrho(p) dp = P_0. \quad (30)$$

Warunek brzegowy na brzegu  $\Gamma_2$  na podstawie zależności (25) i (28) można napisać następująco:

$$-k \text{grad } P \cdot \mathbf{n} = q\varrho[f(P)], \quad (31)$$

gdzie  $f(P)$  jest funkcją odwrotną do funkcji  $P(p)$  określonej równością (27), a  $\mathbf{n}$  jest jednostkowym wektorem w kierunku normalnej do brzegu.

Równanie (31) jest znowu nieliniowym warunkiem brzegowym.

Dla cieczy słabościśliwych można na przykład przyjąć równanie stanu w postaci następującej [3]

$$\varrho = \varrho_0 [1 + \alpha(p - p_0)], \quad (32)$$

gdzie  $\varrho_0$  jest gęstością przy ciśnieniu  $p_0$ , a  $\alpha$  jest współczynnikiem liczbowym. Na podstawie zależności (27) uzyskamy

$$P = \varrho_0 \left[ (1 - \alpha p_0)p + \frac{\alpha p^2}{2} \right], \quad (33)$$

skąd

$$f(P) = \frac{1}{\alpha} \left[ \sqrt{(1 - p_0)^2 + \frac{2\alpha}{\varrho_0} P} - (1 + \alpha p_0) \right]. \quad (34)$$

### 3. Obliczeniowa idealizacja złożonych problemów filtracji

Rozwiązanie wielu praktycznych problemów filtracji wymaga pewnej idealizacji w stosunku do geometrii obszaru filtracji, warunków, brzegowych jak i rzeczywistego prawa filtracji rządzącego przepływem i to zarówno przy analitycznych jak i numerycznych metodach rozwiązywania.

Można pokazać, że w pewnych problemach idealizacja taka może prowadzić do nieliniowych warunków brzegowych. Dotyczy to zagadnień, gdzie pojawiają się cienkie przewarstwienia gruntu z nieliniowym prawem filtracji, problemów z przegrodami częściowo przepuszczalnymi, niektórych zadań z drenażami, pompowań z nieliniowymi charakterystykami pomp, niektórych zadań dotyczących przemysłowych urządzeń filtracyjnych itp.

Rozważmy kilka charakterystycznych przykładów.

1. Rozpatrzmy problem filtracji pod fundamentem w warstwie o ograniczonej miąższości w przypadku występowania podłoża częściowo drenującego. Załóżmy, że pomiędzy warstwą drenującą a pokładem przepuszczalnym znajduje się cienka w stosunku do miąższości pokładu warstwa gruntu o nieliniowych właściwościach filtracyjnych (rys. 1a). Niech to będzie na przykład grunt opisany prawem filtracji z gradientem początkowym [11]

$$\mathbf{v} = \begin{cases} -k_1 \frac{v}{v + \lambda} \text{grad } h, & |\text{grad } h| > \lambda, \\ 0, & |\text{grad } h| \leq \lambda, \end{cases} \quad (35)$$

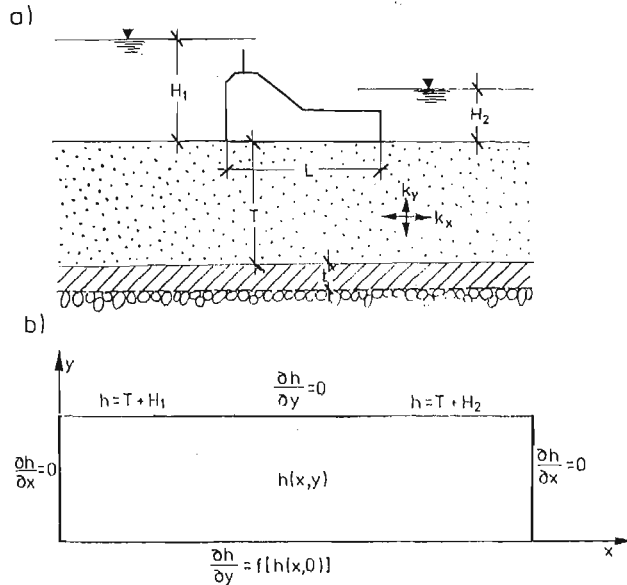
w którym  $h$  jest wysokością piezometryczną  $v = |v|$ ,  $\lambda = k_1 G$ , gdzie  $k_1$  jest współczynnikiem filtracji, a  $G$  progową wartością gradientu.

Ponieważ  $t \ll T$  można dla uproszczenia przyjąć, że ruch wody w tej warstwie będzie się odbywał wzdłuż prostych pionowych, a gradient ciśnienia wzdłuż grubości warstwy będzie stały. Przyjmując idealizację problemu jak na rys. 1b i zakładając w warstwie drenującej wysokość piezometryczną równą  $h = H$  możemy napisać, że w przewarstwie

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{h(x, 0) - H}{t}, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (36)$$

Warunek brzegowy wzdłuż prostej  $y = 0$  będzie miał teraz postać

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \begin{cases} \frac{k_1}{k_y} \left[ \frac{h(x, 0) - H}{t} - G \right], & [h(x, 0) - H] > Gt, \\ 0, & [h(x, 0) - H] \leq Gt. \end{cases} \quad (37)$$



1. Filtracja pod fundamentem: a) ogólny schemat zadania, b) obliczeniowa idealizacja problemu

W zależności od wartości  $\lambda$  większa lub mniejsza część brzegu  $y = 0$  będzie praktycznie nieprzepuszczalna. Przy określonej wartości  $\lambda$  długość strefy, przez którą woda nie będzie się przesączać do warstwy drenującej zależeć będzie od proporcji pomiędzy  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $T$ ,  $t$  oraz  $k_1$ ,  $k_x$  i  $k_y$ .

Jeżeli warstwa słabiej przepuszczalna opisana jest nieliniowym równaniem filtracji, np. w postaci [12]

$$v = -k(1 + c|\text{grad } h|)\text{grad } h, \quad (38)$$

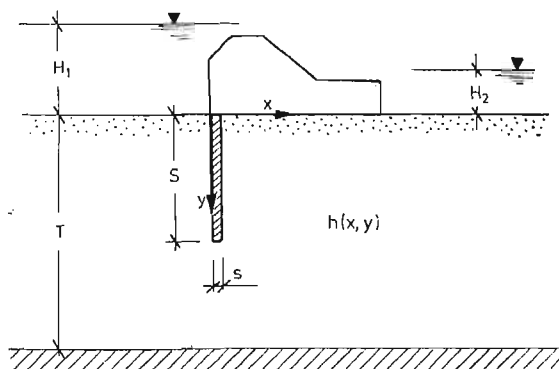
gdzie  $k$  i  $c$  to współczynniki określone przez wyniki eksperymentu, wówczas warunek

brzegowy wzdłuż prostej  $y = 0$  będzie miał postać:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{k}{k_y} \left[ 1 + \frac{c}{t} |h(x, 0) - H| \right] \frac{h(x, 0) - H}{t}. \quad (39)$$

Podobnie będzie dla innych typów nieliniowości.

2. Rozpatrzmy filtrację wokół i przez przegrodę częściowo przepuszczalną (ścianka szczelna, ekran itp.), jak na rys. 2. Dla uproszczenia założmy, że w ekranie o grubości  $s$  linie prądu układają się poziomo [13]. Niech prawo filtracji dla materiału ekranu ma postać (35), tj. prawo filtracji z gradientem początkowym. Ekran wyłączymy z obszaru filtracji.



2. Filtracja wokół i przez przegrodę częściowo przepuszczalną

W takim przypadku wzdłuż prostej  $x = 0$  następować będzie wypływ, a wzdłuż prostej  $x = s$  zasilanie obszaru filtracji tym samym wydatkiem. Przepływ przez ekran na głębokości  $y (0 \leq y \leq s)$  zależy będzie od jego grubości, gradientu progowego  $G$  i różnicy naporów;  $h(0, y) - h(s, y) > 0$ . W prezentowanym tu przypadku wypływ na jednostkę długości wzdłuż prostej  $x = 0$  i zasilanie wzdłuż prostej  $x = s$  będzie równe:

$$q = \begin{cases} k_1(i - G), & i > G, \\ 0, & i \leq G, \end{cases} \quad (40)$$

gdzie:

$$i = \frac{h(0, y) - h(s, y)}{s}.$$

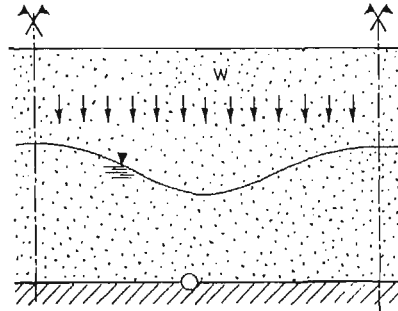
Równanie (40) jest nieliniowym warunkiem brzegowym, wiążącym ciśnienia piezometryczne wzdłuż punktów leżących po obu stronach ekranu. W zależności od geometrii obszaru filtracji oraz wartości  $H_1$ ,  $H_2$ , i  $G$  większa lub mniejsza część ekranu może być praktycznie nieprzepuszczalna.

3. Weźmy pod uwagę problem płaskiej filtracji stacjonarnej do układu drenów, umieszczonych na warstwie nieprzepuszczalnej, zasilanych przez infiltrację  $w$ . Z uwagi na symetrię wystarczy rozpatrzeć tylko obszar filtracji jak rys. 3. Jeżeli infiltracja jest mała i całą dopływającą wodę może drenaż przejąć, wówczas na granicy drenu można przyjąć  $p = 0$ . Dla pewnej wartości  $w$  drenaż zaczyna pracować pod ciśnieniem, a ciśnienie w drenażu jest, generalnie mówiąc, funkcją zasilania drenażu  $Q$  czyli  $p = f(Q)$ . Przed rozpoczęciem

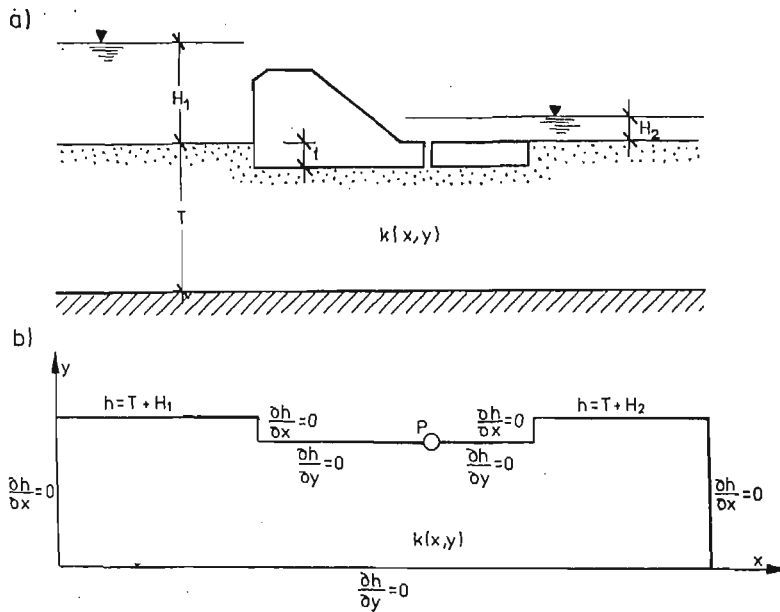
obliczeń nie można na ogół rozstrzygnąć, z którym przypadkiem mamy do czynienia. Realniejsze modelowanie pracy drenażu, traktowanego jako upust punktowy, polegać będzie na przyjęciu nieliniowego warunku brzegowego:

$$p = \begin{cases} 0, & Q < Q_0, \\ f(Q), & Q \geq Q_0, \end{cases} \quad (41)$$

gdzie  $Q_0$  jest graniczną wartością, przy której dren zaczyna pracować jako przewód pod ciśnieniem.



3. Dopływ filtracyjny do systemu drenów



4. Filtracja pod jazem z drenażem: a) schemat problemu, b) obliczeniowa idealizacja zadania

Bardziej złożone warunki pojawią się w przypadku, gdy interesuje nas głównie rozkład ciśnienia i prędkości w bezpośrednim sąsiedztwie drenażu. Należy wówczas rozpatrzyć rzeczywiste położenie zwierciadła wody w drenie.

4. Przeanalizujemy na koniec problem filtracji pod jazem z drenażem przy ograniczonej miąższości warstwy przepuszczalnego gruntu niejednorodnego (rys. 4a). Obliczenia



(zwykle numeryczne) prowadzi się przyjmując obszar filtracji i warunki brzegowe jak na rys. 4b, zakładając w punkcie  $P$  (drenaż) ciśnienie  $p = 0$  [14] lub lepiej wysokość piezometryczną  $h = T + H_2$ . W przyjęciu takim tkwi założenie, że cała dopływająca do drenażu woda jest przez drenaż odprowadzana bez zakłóceń.

Alternatywnie punkt  $P$  można traktować jako ujemne źródło punktowe (upust) o wydatku, który generalnie mówiąc, jest funkcją różnicy ciśnień na wlocie i wylocie drenażu

$$q = f(\Delta H), \quad (42)$$

gdzie

$$\Delta H = h(P) - (T + H_2),$$

oraz strat miejscowych na wlocie i wylocie oraz wzdłuż długości drenażu. W ten sposób możemy uwzględnić rzeczywistą możliwość przeprowadzenia wody przez drenaż.

Funkcja  $f(\Delta H)$  jest jednak nieliniową funkcją  $\Delta H$ , a zatem warunek (42) w punkcie  $P$  będzie nieliniowym warunkiem brzegowym.

Taki sposób potraktowania drenażu wydaje się właściwy wówczas, gdy interesuje nas głównie rozkład ciśnień i prędkości w pobliżu drenażu, a także wtedy, gdy zamierzamy sprawdzić warunki filtracji dla piętrzenia  $H_1$  większego niż to, dla którego drenaż zaprojektowano.

Problemy podobnego typu mogą się również pojawiać w zadaniach filtracji dla zapór posadowionych na powierzchniowej warstwie nieprzepuszczalnej [15] przy kontrolowanym odprowadzeniu wody z warstwy przepuszczalnej.

#### 4. Numeryczne całkowanie problemów filtracji z nieliniowymi warunkami brzegowymi

Efektywne rozwiązanie naszkicowanych wyżej problemów dla realnych warunków filtracji będzie możliwe jedynie na drodze numerycznej. Wśród numerycznych metod całkowania równań filtracji największe uznanie zdobyły: metoda różnic skończonych (MRS) [16], metoda elementów skończonych (MES) [17] oraz rozwijana w ostatnich latach metoda elementów brzegowych (MEB) [18], [19].

Numeryczne całkowanie liniowych problemów filtracji wymienionymi wyżej metodami sprowadza zagadnienie do rozwiązywania układu algebraicznych równań liniowych.

W przypadku nieliniowych warunków brzegowych MRS, MES i MEB prowadzą do rozwiązywania nieliniowego układu równań algebraicznych postaci:

$$\mathbf{A}X = \mathbf{B}(X), \quad (43)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest nieosobliwą macierzą współczynników liczbowych,  $X$  wektorem wartości poszukiwanej funkcji w wyróżnionych  $N$  punktach obszaru filtracji i/lub brzegu a  $\mathbf{B}(X)$  wektorem, którego każdy wyraz jest w ogólnym przypadku funkcją wszystkich  $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ .

Układ równań (43) można zapisać inaczej w postaci

$$X = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(X), \quad (44)$$

z której w sposób naturalny wynika ogólny wzór rekurencyjny metody iteracji bezpośred-

nich

$$X^{n+1} = \mathbf{A}^{-1}B(X^n). \quad (45)$$

Znając (szacując lub zakładając)  $X^0$  otrzymamy jednoznacznie określony ciąg przybliżeń  $X^1, X^2, X^3, \dots$ . Jeżeli tak otrzymany ciąg  $X^n$  przy  $n \rightarrow \infty$  zmierza do pewnej granicy  $X^*$ , to  $X^*$  jest rozwiązaniem równania (43) [20].

Metoda iteracji bezpośrednich wymaga jednokrotnego zbudowania macierzy  $\mathbf{A}$  i obliczenia jej macierzy odwrotnej  $\mathbf{A}^{-1}$ , którą z reguły można zapamiętać w miejsce zwolnione przez  $\mathbf{A}$ . Na każdym kroku iteracji wystarczy zatem wyliczyć wektor  $B(X^n)$  i wykonać mnożenie opisane zależnością (45). Metoda obliczeń jest efektywna, jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  jest dobrze uwarunkowana.

Taki sposób prowadzenia obliczeń pozwala na istotne oszczędności czasu pracy EMC w stosunku do bezpośredniego całkowania numerycznego problemów filtracji prowadzących do nieliniowego równania różniczkowego. W takim przypadku zagadnienie sprowadza się bowiem do nieliniowego układu równań algebraicznych, w którym współczynniki macierzy układu równań są funkcjami rozwiązania. Na każdym kroku iteracyjnym musimy wówczas budować macierzy  $\mathbf{A}(X)$  i znajdować jej macierz odwrotną [21]. W zagadnieniach nieliniowych z powierzchnią swobodną powstaje problem wyznaczenia nieznanego brzegu obszaru filtracji. Rozwiązanie można uzyskać poprawiając jednocześnie wektor  $X^n$  i położenie powierzchni swobodnej [22] lub formułując problem z wykorzystaniem teorii nierówności wariacyjnych [23].

Metoda iteracji bezpośrednich jest wygodną metodą rozwiązania równań (43) o ile proces iteracyjny jest zbieżny. Zbieżność metody można oszacować wykorzystując wyniki pracy [20]. Oznaczamy przez  $a_{ij}$  elementy macierzy  $\mathbf{A}^{-1}$  i wprowadźmy funkcje

$$g_i(X) = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j(X). \quad (46)$$

Załóżmy, że gdy  $X$  i  $X'$  należą do obszaru  $D$  zawierającego wszystkie wektory  $X^n$  to istnieją liczby dodatnie  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ ) takie, że

$$|g_i(X) - g_i(X')| \leq \sum_{j=1}^N c_{ij} |x_j - x'_j|. \quad (47)$$

Proces iteracyjny opisany formułą (44) jest zbieżny o ile norma  $K$  macierzy  $\mathbf{C}$  spełnia warunek [20]

$$K = \|\mathbf{C}\| = \max_i \left( \sum_{j=1}^N |c_{ij}| \right) < 1. \quad (48)$$

Jeżeli funkcje  $g_i(X)$  są różniczkowalne, a ich pochodne ograniczone w obszarze  $D$ , to

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq c_{ij}, \quad (49)$$

czyli liczby  $c_{ij}$  ograniczają z góry pochodne  $\partial g_i / \partial x_j$ .

Im norma  $K$  jest mniejsza (wyrazy  $c_{ij}$  bliższe zera), tym zbieżność szybsza.

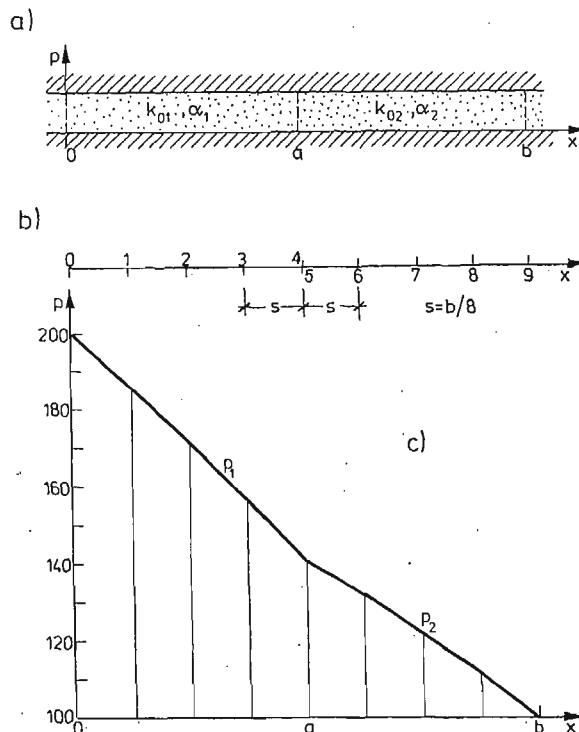
Zwrócić należy uwagę, że w problemach praktycznych z nieliniowymi warunkami brzegowymi tylko część wyrazów wolnych  $b_i$  jest funkcją i to ograniczonej liczby niewiadomych  $x_j$ , pozostałe wyrazy wolne są stałymi. Wówczas na podstawie (48) zdecydowana większość wyrazów  $c_{ij}$  może być wprost równa zeru.

W zreferowanych w niniejszej pracy przykładach posłużono się konsekwentnie metodą iteracji bezpośrednich.

### 5. Przykłady obliczeń

Rozpatrzmy dwa proste przykłady numerycznego całkowania problemów opisanych w p. 2 i 3 (porównaj również przykład analizowany w [24] za pomocą MEB).

1. Pierwszy przykład dotyczy jednowymiarowej filtracji w warstwie wodonośnej o jednostkowej miąższości z odcinkowo zmiennymi właściwościami ośrodka (rys. 5a).



5. Nieliniowa filtracja w warstwie wodonośnej z odcinkowo zmienną przepuszczalnością: a) ogólne warunki zadania, b) siatka różnicowa, c) rozkład ciśnień wzdłuż długości warstwy

Przepuszczalności określone są formułami (18). Przyjęto następujące wartości współczynników  $k_{0i} = k_{02} = 1$ ,  $\alpha_1 = 0,005$  i  $\alpha_2 = 0,01$ . Warunki brzegowe dla funkcji  $p_1(x)$  dla  $0 \leq x \leq a$  i  $p_2(x)$  dla  $a \leq x \leq b$  są następujące

$$p_1(0) = 200, \quad p_2(b) = 100, \quad p_1(a) = p_2(a),$$

$$\left[ e^{0,005 p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \right]_{x=a} = \left[ e^{0,01 p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} \right]_{x=a} \quad (50)$$

Równania różniczkowe problemu mają postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{0,005 p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) &= 0, & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{0,01 p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) &= 0, & a \leq x \leq b. \end{aligned} \quad (51)$$

Jest rzeczą oczywistą, że w analizowanym tu elementarnym przykładzie równania (51) można scałkować bezpośrednio. Dla ilustracji zastosujemy jednak opisane poprzednio przekształcenia linearyzujące. Wprowadzając nowe zmienne  $P_1$  i  $P_2$  według formuły (14) uzyskujemy równania różniczkowe

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = 0, \quad (0 \leq x \leq a) \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} = 0, \quad (a \leq x \leq b). \quad (52)$$

Warunki brzegowe dla funkcji  $P_1$  i  $P_2$  będą miały postać następującą:

$$\begin{aligned} P_1(0) &= 200e, & P_2(b) &= 100e, \\ P_1^2(a) &= 400P_2(a), & \frac{\partial P_1(a)}{\partial x} &= \frac{\partial P_2(a)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (53)$$

Do rozwiązywania problemu zastosowano metodę różnic skończonych. Rozmieszczenie węzłów i ich numerację pokazano na rys. 5b. Zastosowano klasyczne operatory różnicowe oparte na różnicach centralnych. Układ równań różnicowych ma postać:

$$-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 6, 7, 8; \quad (54)$$

gdzie:

$$x_i = P_1(is) \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

oraz

$$X_i = P_2[(i-1)s] \quad \text{dla} \quad i = 5, 6, 7, 8, 9.$$

Warunki brzegowe (53) w postaci różnicowej mają postać następującą:

$$\begin{aligned} X_0 &= 200e, & X_9 &= 100e, \\ X_4 &= 20\sqrt{X_5}, & X_4 - X_3 &= X_6 - X_5. \end{aligned} \quad (55)$$

Wprowadzając warunki brzegowe (55) do układu równań (54) otrzymujemy dogodny do iteracji układ równań algebraicznych (43) z nieliniowością w wektorze wyrazów wolnych. Układ można prosto rozwiązać korzystając z formuły (45) po przyjęciu startowej wartości  $p_1(a) = p_2(a) = 0,5$   $[p_1(0) + p_2(b)] = 150$ , skąd  $x = 448,6$ . Po ośmiu iteracjach uzyskano rezultaty, w których  $x_i^8 - x_i^7 < [p_1(a) - p_2(b)]/100$ . Uznano je za rozwiązanie analizowanego problemu nieliniowego i pokazano na rys. 5c (w ciśnieniach rzeczywistych). W tabeli 1 zestawiono wartości  $P_1$  i  $P_2$  otrzymane metodą różnic skończonych oraz wartości ściśle otrzymane przez scałkowanie równań (51) z warunkami (50), a także rzeczywiste ciśnienia  $p_1$  i  $p_2$ .

Zwrócić należy uwagę, że w analizowanym problemie otrzymane za pomocą MRS wartości ciśnień  $P_1$  i  $P_2$  zbiegają do wartości rzeczywistych, gdyż funkcje  $P_1$  i  $P_2$  są funkcjami liniowymi, a równania (54) odzwierciedlają ten fakt w sposób dokładny.

Druga uwaga dotyczy zbieżności. Oszacowana na podstawie (48) norma macierzy  $\mathbf{C}$  wynosi w tym problemie  $K = 0,76$ , stąd stosunkowo wolna zbieżność metody.

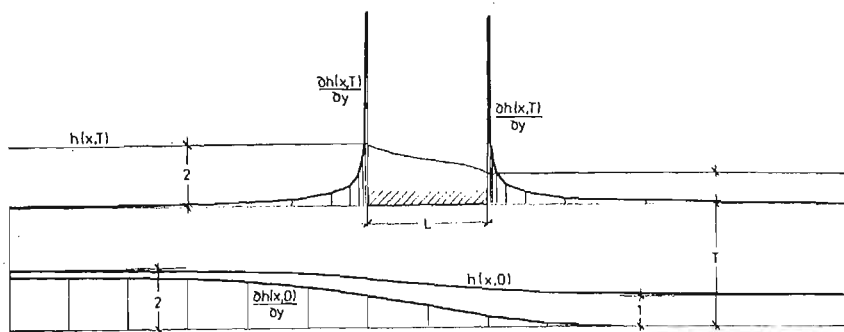
Tabela 1

Nr węzła	$x/b$	Wartości $P_1$ i $P_2$		Wartości ciśnieni rzeczywistych
		Metoda różnic skończonych	Wartości ścisłe	
1	0,125	509	509,03	186,84
2	0,250	474	474,39	172,74
3	0,375	440	439,76	157,58
4	0,500	405	405,14	141,18
5	0,500	410	410,35	141,18
6	0,625	376	375,72	132,37
7	0,750	341	341,09	122,70
8	0,875	306	306,46	111,99

2. Przykład drugi dotyczy problemu filtracji analizowanego jako pierwszy w p. 3.

Konkretne obliczenia wykonano przyjmując następujące proporcje dla obszaru filtracji  $T/L = 1$ ,  $H_1/L = 1$ ,  $H_2/L = 0$ ,  $H/L = 1/2$ ,  $t/L = 1/20$  i ograniczając obszar filtracji z lewej i prawej strony fundamentu na odległość  $3L$ . Dla cienkiej warstwy ograniczającej od dołu obszar filtracji przyjęto  $k_1 = 0,001k$ , gdzie  $k$  jest współczynnikiem filtracji w obszarze oraz  $G = 12$  jak dla łąk [25].

Do obliczeń zastosowano metodę elementów brzegowych [18], przyjmując elementy dwuwęzłowe o liniowej zmienności  $h$  i  $\frac{\partial h}{\partial n}$  wzdłuż brzegów. Wzdłuż dolnej granicy obszaru filtracji przyjęto 15 węzłów rozmieszczonych równomiernie co  $0,5 L$ . Wzdłuż dolnej i górnej wody węzły zagęszczono zdecydowanie w pobliżu fundamentu (najmniejsza odległość  $0,01 L$ , a największa  $L$ ), aby uzyskać poprawny rozkład  $\frac{\partial h}{\partial n}$ . Całkowita liczba węzłów wynosiła 46. W rozwiązaniu startowym przyjęto, że dolna granica obszaru filtracji jest całkowicie nieprzepuszczalna. W dalszych iteracjach poprawiono rozkład  $\frac{\partial h}{\partial y}$  w poszczególnych węzłach podziału na elementy korzystając z formuły (37). Po pięciu iteracjach wartości  $\frac{\partial h}{\partial y}$  ustaliły się we wszystkich węzłach z dokładnością do pięciu cyfr znaczących. Wartości wysokości piezometrycznych ustaliły się z dokładnością do pięciu cyfr znaczących już po trzech iteracjach. Na rys. 6 pokazano ostateczny rozkład wysokości piezometrycznych i funkcji  $\frac{\partial h}{\partial y}$  wzdłuż prostych  $y = 0$  i  $y = T$ . Obliczenia wykazały, że w odległości większych niż  $l = 0,75 L$  od fundamentu od strony wody dolnej cienka warstwa łąk jest praktycznie nieprzepuszczalna przy powyżej przyjętych parametrach filtracyjnych i geometrycznych. Obliczone całkowite zasilanie obszaru wynosiło  $0,556k$ , wpływ poniżej



6. Rozkład wysokości piezometrycznych i funkcji  $\partial h/\partial y$  wzdłuż prostych  $y = 0$  i  $y = T$  dla problemu filtracji pod fundamentem przedstawionego na rys. 1

fundamentu  $0,499k$ , a pozostały przez warstwę iłu ograniczającą obszar filtracji od warstwy drenującej ( $q = 0,058k$ ).

Obliczenia porównawcze wykonane metodą elementów [22] prowadziły do prawie identycznych rezultatów ( $l = 0,73L$ ,  $q = 0,058k$ ).

W przeliczonych zadaniach tego typu (por. [22]) ciąg przybliżeń  $X^0$ ,  $X^1$ ,  $X^2$ , ... miał charakter oscylacyjny, zarówno dla MES jak i MEB a rozwiązania uznane za poprawne uzyskiwano po 3-8 iteracjach.

## 6. Podsumowanie

Przeprowadzona dyskusja i przytoczone przykłady wykazały, że przy rozwiązywaniu problemów filtracji ustalonej pojawiać się mogą zadania z nieliniowymi warunkami brzegowymi. Ma to miejsce przy linearyzacji problemów z nieliniowymi równaniami konstytutywnymi oraz przy obliczeniowej idealizacji złożonych zadań filtracji.

Linearyzację opisaną w p. 2 można wykonać, jeżeli przepuszczalność ośrodka (rozumiana szeroko) zależy wyłącznie od poszukiwanej funkcji. Postępowanie linearyzujące jest celowe i z reguły korzystne, a standardowe metody linearyzacji sprowadzają się do wprowadzenia odpowiednio dobranego potencjału. W takim przypadku nieliniowości pojawiają się w warunkach brzegowych zawierających pochodne poszukiwanej funkcji, tj. warunku drugiego i trzeciego rodzaju na brzegach zewnętrznych i warunek ciągłości przepływu na granicach warstw o różnej przepuszczalności. Zwrócić należy uwagę, że dla innych typów nieliniowości (np. przepuszczalność zależna od gradientu funkcji poszukiwanej) znalezienie podobnego przekształcenia nie wydaje się w ogólności możliwe.

Obliczeniowa idealizacja złożonych problemów filtracji może prowadzić do nieliniowych warunków brzegowych, w których ciśnienie jest jawną funkcją przepływu, pochodna normalna do brzegu (przepływ) jest funkcją ciśnienia bądź do nieliniowych związków pomiędzy ciśnieniami w pewnych punktach obszaru filtracji.

Rozwiązanie realnych problemów filtracji z nieliniowymi warunkami brzegowymi wymagać będzie prawie zawsze zastosowania metod numerycznych. Można je wykonać wykorzystując powszechnie znane metody numeryczne. Przeprowadzone obliczenia

przykładowe wykazały pełną przydatność MRS, MES i MEB do rozwiązywania analizowanych problemów.

Algebraiczny układ równań nieliniowych otrzymany w tych metodach ma w przypadku nieliniowych warunków brzegowych postać (43), z której w sposób naturalny wynika formuła iteracyjna (45). W kolejnych iteracjach macierz układu równań pozostaje stała, a zmienia się wyłącznie prawa strona. Jest to bardzo korzystne z punktu widzenia kosztów prowadzenia obliczeń numerycznych.

Zagadnienia zbieżności MRS, MES i MEB, ich dokładności oraz efektywności w poszczególnych typach zadań filtracji z nieliniowymi warunkami brzegowymi wymagają dalszych badań i wielu obliczeń porównawczych.

#### Literatura

1. J. BEAR, *Hydraulics of groundwater*, Mc Graw-Hill, New York, 1979.
2. G. KOVÁCS; *Seepage Hydraulics*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1981.
3. П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА; *Теория движения грунтовых вод*, Наука, Москва, 1977
4. A. WIECZYSTY, *Hydrologia inżynierska*, PWN, Warszawa, 1982.
5. D. H. TROLLOPE, K. P. STARKE, R. E. VOLKER, *Complex flow through porous media*, Australian Geomechanics Journal, vol. 1, 1971, pp. 1 - 10.
6. H. W. OLSEN, *Deviations from Darcy's law in saturated clays*, Soil Sci. Soc. Amer., vol. 29, 1965, pp. 135 - 140.
7. R. SKAWIŃSKI, *Mechanizm przepływu cieczy w ośrodkach porowatych w świetle badań eksperymentalnych*, Zeszyt. Nauk. AGH, 1974, nr 459.
8. М. Г. БЕРНАДИНЕР, В. М. ЕНТОВ; *Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей*, Наука, Москва, 1975
9. P. M. КАЦ; *Нелинейная установившаяся фильтрация жидкости в слоистом пласте*, Изв. АН СССР, МЖГ, 1/1972, с. 180 - 186
10. М. М. ЧЕПИНОГА; *Некоторые нелинейные задачи теории фильтрации*, Теор. и прикл. мех. (Минск), 1982, в. 9, с. 69 - 74
11. W. M. JENTOW, *Hydrodynamiczna teoria filtrowania cieczy z reologicznymi anomaliami*, Rozpr. Inż., t. 27, 1979, z. 4, 501 - 516.
12. A. FORYŚ, *Konsolidacja warstwy sprężystej przy nieliniowym prawie przepływu*, Arch. Hydrot., t. 26, 1979, z. 2, s. 251 - 271.
13. С. Н. НУМЕРОВ, Л. А. ПАНАСЕНКО; *К вопросу о фильтрации в горизонтальном напорном пласте при наличии негерметичной полупроницаемой диафрагмы*, Изв. ВНИИГ, т. 126, 1978, с. 54 - 57
14. T. PIWESKI, Z. SOKÓLSKI, *O rozwiązywaniu niektórych zagadnień filtracji ustalonej*, Arch. Hydrot., t. 17, 1970, z. 2, s. 161 - 167.
15. K. CZYZEWSKI, W. WOŁSKI, S. WÓJCICKI, A. ŻBIKOWSKI; *Zapory ziemne*, Arkady, Warszawa, 1973.
16. L. COLLATZ; *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa, 1960.
17. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method*, Mc Graw-Hill, London, 1977.
18. К. БРЕББИЯ, С. УОКЕР; *Применение метода граничных элементов в технике*, Мир, Москва, 1982
19. *Boundary Elements*, Proc. 5th Int. Conference, Hiroshima 1983, Springer Verlag, Berlin 1983 (Ed. C. A. Brebbia, T. Futagami, M. Tanaka).
20. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*. WTN, Warszawa, 1974.
21. B. WOSIEWICZ, *Analiza numeryczna nieliniowej filtracji ustalonej*, Arch. Hydrot., t. 29, 1982, z. 1/2, s. 53 - 76.
22. B. WOSIEWICZ, *Analiza zagadnień filtracji ustalonej z nieliniowymi równaniami konstytutywnymi*, Roczn. AR Poznań, Rozpr. Naukowe t. 162, 1986.
23. J. T. ODEN, T. H. KIKUCHI, *Theory of Variational Inequalities with Application to Problems of Flow Through Porous Media*, Int. J. Eng. Science, t. 18, 1980, nr 10.

24. P. K. BENERJEE, R. BUTTERFIELD (ed); *Development in Boundary Element Method*, Applied Science Publishers, London, 1979.
25. A. KEZDI, *Handbook of Soil Mechanics*, vol. 1, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

## Резюме

## НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ

В работе показано, что в задачах установившейся фильтрации могут появляться нелинейные краевые условия. Проанализировано типичные примеры таких задач.

Для решения задач фильтрации с нелинейными краевыми условиями предложено известные численные методы (метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод граничных элементов). Вопрос сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (43), методом прямых итераций (45).

Приведены результаты расчётов двух типичных задач.

## Summary

## NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS FOR STEADY SEEPAGE PROBLEMS

It is shown in the paper that nonlinear boundary conditions can appear for steady seepage problems. Characteristic examples of the problems are discussed.

Known methods (finite difference method, finite element method and boundary element method) are proposed for solving steady seepage problems with nonlinear boundary conditions. The discretized system can be written as a set of nonlinear algebraic equations (43), which is solved by direct iteration technique (45).

Results for two typical problems are included.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 lutego 1984 roku*

---