

## ANALIZA PORÓWNAWCZA MODELI SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO PRĘTA POD DZIAŁANIEM ZGINANIA, SIŁY PODŁUŻNEJ I TEMPERATURY\*

MAREK STODULSKI  
MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

*Politechnika Krakowska*

Problem pręta, będącego pod działaniem zginania, siły osiowej i temperatury w zakresie sprężysto-plastycznym, pozornie prosty, natrafia na trudności przy określaniu charakterystyk wiążących uogólnione siły i uogólnione przemieszczenia. W pracy analizowano kilka modeli takiego pręta, nawiązujących do odkształcalnych lub sztywnych elementów skończonych. Porównanie modeli przeprowadzono pod kątem wykorzystania ich do opisu rurkowego podłoża płyt sitowych w wymiennikach ciepła i reaktorach chemicznych.

### 1. Wstęp

W pracy rozpatrywany jest pręt pryzmatyczny, obciążony na końcach siłą osiową i momentem zginającym z uwzględnieniem wpływu zmiany temperatury na przemieszczenia osiowe. Tak obciążone pręty mają swoje odpowiedniki w rzeczywistych konstrukcjach np. w szeroko stosowanych w przemyśle energetycznym i chemicznym płaszczoworurowych wymiennikach ciepła i reaktorach chemicznych. Jednymi z elementów tych aparatów są rurki, których końce mocuje się (rozłacza, spawa) w perforowanych płytach zwanych płytami sitowymi. Obciążenie całego układu ciśnieniem i temperaturą wywołuje ugięcia obu płyt, które wymuszają przemieszczenia i obroty końców współpracujących z nimi rurek. Z kolei rurki oddziałują na płyty siłami i momentami wywołanymi ich zmienioną konfiguracją. W tym przypadku rurki są w stosunku do rozważanego pręta dodatkowo obciążone różnicą ciśnień na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni. Efekt ten będzie jednak pominięty w obecnej pracy.

Przy ograniczeniu się do symetrycznego obciążenia obu końców pręta jego pracę w poszczególnych zakresach: sprężystym, jedno- lub dwustronnego uplastycznienia, można opisać dwoma związkami typu

$$\Phi_i(U_0, \Theta_0, M_0, N_0, \Delta T) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

\*) Praca została wykonana w ramach probl. węzł. 05.12. - 02.9.

gdzie:  $U_0, \Theta_0$  — przemieszczenie osiowe i kąt obrotu końcowego przekroju pręta,  $M_0, N_0$  — moment zginający i siła osiowa na końcu pręta,  $\Delta T$  — jednorodna dla całego pręta zmiana temperatury. Dla dalszych zastosowań korzystne jest rozwikłanie tych związków bądź do postaci

$$\begin{aligned} M_0 &= \Psi_1(U_0, \Theta_0, \Delta T), \\ N_0 &= \Psi_2(U_0, \Theta_0, \Delta T) \end{aligned} \quad (1.2)$$

bądź do postaci odwrotnej

$$\begin{aligned} U_0 &= \Psi_3(M_0, N_0, \Delta T), \\ \Theta_0 &= \Psi_4(M_0, N_0, \Delta T). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Związki te będziemy nazywać charakterystykami pręta. We wspomnianych konstrukcjach rurki pracują w warunkach zbliżonych do wymuszenia kinematycznego; dla zadanego na obu końcach  $U_0$  i  $\Theta_0$  należy wyznaczyć  $N_0$  i  $M_0$ . Tak postawione zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia charakterystyk w postaci (1.2). W pracy przyjęto za dodatnie siłę rozciągającą oraz przemieszczenie powodujące zmniejszenie odległości pomiędzy końcowymi przekrojami pręta, które odpowiada dodatniemu ugięciu płyty. Dodatni znak momentu jest natomiast zgodny z dodatnim znakiem kąta.

Analiza statyczna lub dynamiczna konstrukcji prętowych — stosunkowo prosta w przypadku liniowości fizycznej materiału (sprężystość lub liniowe pełzanie) — staje się znacznie trudniejsza w przypadku materiałów fizycznie nieliniowych. Trudności te — nawet przy ograniczeniu się do jednoosiowego stanu naprężenia w poszczególnych punktach pręta (rozciąganie — ściskanie i zginanie) — pojawiają się na dwóch szczeblach: na szczeblu przekroju, przy wyprowadzaniu „integralnych” równań konstytutywnych wiążących uogólnione siły wewnętrzne i uogólnione odkształcenia oraz na szczeblu całego ciała, gdy poszukujemy zależności między parametrami obciążeń i charakterystycznymi uogólnionymi przemieszczeniami. Dla pręta o zmiennym wzdłuż osi momencie zginającym na ogół nie jest możliwe analityczne wyznaczenie charakterystyk w jawnej postaci (1.2) lub (1.3).

Drogi pokonywania powyższych trudności można podzielić na dwie grupy. Grupa pierwsza ma charakter czysto numeryczny i sprowadza się na obu szczeblach do przeprowadzenia całkowań wzorami przybliżonymi o możliwie dużej dokładności. Takie podejście, nawiązujące do różnych wariantów metody różnic skończonych, może istotnie zapewnić dużą dokładność wyników końcowych wykazuje jednak następujące wady, które niekiedy mogą być istotne: (1) utrudnia analizę jakościową przez nadmierny nacisk na stronę numeryczną przy jednoczesnym oderwaniu się od interpretacji fizycznej i inżynierskiej, (2) na ogół nie zezwala na wyprowadzenie prostych wzorów końcowych, mogących służyć do dalszych zastosowań. Natomiast druga grupa, nawiązująca do różnych wariantów metody elementów skończonych, ma znacznie wyraźniejszą interpretację fizyczną. W przypadku niewielkiej liczby elementów mówimy o modelowaniu konstrukcji rzeczywistej; w ten sposób tworzone modele nadają się szczególnie dobrze do przeprowadzenia analitycznej analizy jakościowej.

Przedmiotem obecnej pracy będzie porównanie charakterystyk paru tego typu modeli

o kilku stopniach swobody, wyznaczonych metodą analityczno-numeryczną. Charakterystyki te mogą być następnie wykorzystane jako charakterystyki podłoża dla współpracujących z prętami (rurkami) płyt sitowych.

## 2. Modele

Na szczeblu przekroju modele zastępują przekrój rzeczywisty przez wielopunktowy (wielowarstwowy), co prowadzi do zastąpienia całkowania przez sumowanie. Jedynie przekrój dwupunktowy (teoretyczny dwuteownik) jest przy tym statycznie wyznaczalny (przy zginaniu w płaszczyźnie głównej) co umożliwia zarówno wyrażenie sił wewnętrznych przez naprężenia, jak i na odwrót, niezależnie od równań konstytutywnych. Zasady doboru zastępczych przekrojów wielopunktowych przy sprężysto-plastycznym zginaniu z siłą podłużną podał J. Orkisz [18, 19]; nieco inne podejście zaproponowali J. Krużelecki i W. Krzyś [15], ograniczając się do przypadku czystego zginania, ale uwzględniając możliwość wzmocnienia plastycznego. Zastosowanie koncepcji przekrojów zastępczych do obliczenia ugięć sprężysto-plastycznych wielopunktowych belek nierozciągliwych podali J. Orkisz i M. Życzkowski [20] (małe ugięcia) i [21] (duże ugięcia), belek rozciągliwych — Z. Waszczyszyn [29], łuków — M. Radwańska i Z. Waszczyszyn [22, 23].

Znacznie większe możliwości modelowania występują przy analizie pręta jako całości. Modele takie podzielimy na dwie grupy: nawiązujące do sztywnych elementów skończonych i nawiązujące do odkształcalnych elementów skończonych.

Metoda sztywnych elementów skończonych została opracowana w sposób ogólny przez J. Kruszewskiego [14], W. Gawrońskiego i J. Kruszewskiego [7, 8], głównie dla analizy drgań, jednak prostsze koncepcje tego typu w odniesieniu do zagadnień stateczności prętów są znacznie dawniejsze. Jako pierwszą należy tu wymienić rozprawę habilitacyjną H. Hencky'ego z r. 1920 [4], który wprowadził metodę „łańcucha o przegubach sprężystych”. Najbardziej znanym modelem tego typu jest model o jednym stopniu swobody (pręt sztywny, odkształcalny element skupiony w utwierdzeniu), podany przez H. Wagnera [28]. Analiza zjawisk flatteru wymaga modeli o conajmniej dwóch stopniach swobody; odpowiednie uogólnienie zaproponował H. Ziegler [30]. Stateczność modeli wykorzystujących sztywne elementy skończone była bardziej szczegółowo badana przez J. Naleszkiewicza [16], A. R. Rżanicyna [24], J. M. Thompsona i G. Hunta [27]. Bardziej złożone modele zaproponował A. Chajes [3].

W zakresie sprężystym lub liniowego pełzania modele o sztywnych elementach skończonych mogły bez trudu być łączone ze ścisłym, dowolnym kształtem przekroju pręta, gdyż kształt ten jest wtedy bez większego znaczenia: jest on wystarczająco scharakteryzowany momentem bezwładności  $I$  i polem powierzchni przekroju  $A$ . Sytuacja ulega zasadniczej zmianie przy nieliniowym pełzaniu lub w zakresie sprężysto-plastycznym. Wtedy najprostszymi modelami kombinuje długi element sztywny z krótkim elementem odkształcalnym o przekroju dwupunktowym (lub inaczej z dwoma krótkimi prętami odkształcalnymi). Model taki zaproponowali E. I. Ryder i F. R. Shanley [25]; miał on zasadnicze znaczenie dla rozwoju współczesnej teorii wyboczenia sprężysto-plastycznego. Zmodyfikowany model Shanley'ego analizują w swoich pracach G. Ballio, F. Perotti [1]—element odkształcalny ma wielopunktowy przekrój — oraz K. Kawashima, S. Kimura [11] — kilka sztywnych elementów połączonych odkształcalnymi elementami o przekroju

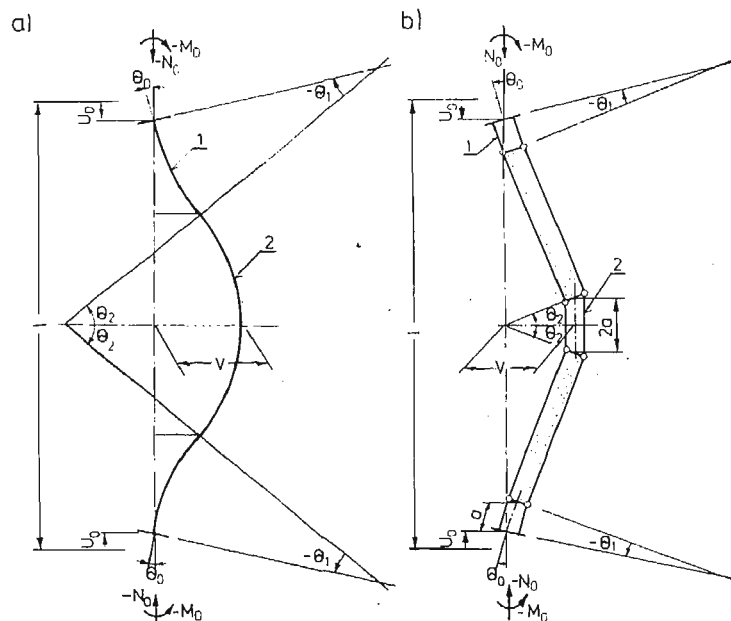
z jedną osią symetrii sprowadzonym do wielopunktowego. W niektórych przypadkach możliwe jest połączenie elementów sztywnych z elementami odkształcalnymi o danym, nie podlegającym uproszczeniu kształcie przekroju: C. R. Calladine [2], M. Życzkowski, A. Zaborski [34], K. Kowalczyk [13], K. Kawashima, S. Obata [12], S. Dorosz [6].

Model uwzględniający dwuosiowy stan naprężenia charakterystyczny dla utraty stateczności powłok, zaproponował M. Życzkowski [31]; dwuwarstwowy przekrój ułatwia analizę w zakresie niesprężystym.

Metoda odkształcalnych elementów skończonych, zaproponowana w formie ogólnej z końcem lat pięćdziesiątych, została dość szybko przystosowana do przybliżonej analizy stateczności prętów (B. J. Hartz [9], G. W. Hicks [10], D. A. Nethercot, K. C. Rockey [17]). Charakterystyczną dla modelu pogłębliwość a jednocześnie niezbędną prostotę w przypadku nieliniowości fizycznej materiału otrzymuje się jedynie w przypadku elementów o stałej krzywiznie, gdyż wtedy równanie konstytutywne wyprowadzone dla jednego przekroju obowiązuje w całym elemencie. Dwuelementowe (dwukrzywiznowe) modele tego typu będą analizowane w obecnej pracy; jeden element o stałej krzywiznie nie jest wystarczający, gdyż nie może opisać występujących w rzeczywistym przecię punktów przegięcia. Dodatkowo przyjęto, że punkt „zszycia” odkształcalnych elementów o różnych krzywiznach jest ustalony i określony parametrem  $\xi_0 = l_2/l$ .

Spośród wielu przedstawionych kombinacji modelu o odkształcalnych i sztywnych elementach skończonych z różnymi kształtami przekrojów w pracy przeprowadzono analizę:

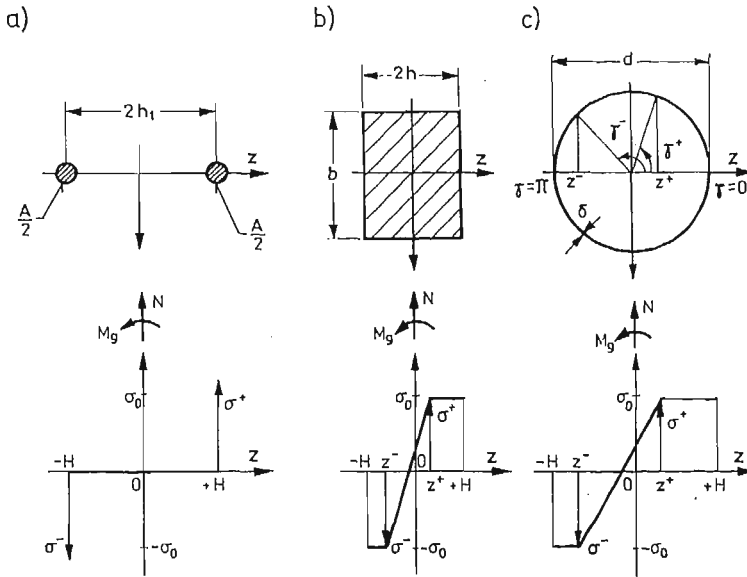
- dwukrzywiznowego modelu o odkształcalnych elementach skończonych (OES) z dwupunktowym, prostokątnym i pierścieniowym przekrojem poprzecznym, rys. 1a;



Rys. 1. Modele pręta: a) o odkształcalnych elementach skończonych (OES) b) o sztywnych elementach skończonych (SES)

— modelu o sztywnych elementach skończonych (SES) z dwupunktowym przekrojem elementu odkształcalnego, rys. 1b.

W modelu SES, dla opisu występujących w rzeczywistym pręcie punktów przegięcia trzeba wprowadzić dodatkowe elementy odkształcalne, w stosunku do modelu zaproponowanego przez F. R. Shanley'a [25]. Analizowane przekroje z wymiarami i charakterystycznymi wielkościami pokazano na rys. 2. Efektem analizy każdego z modeli jest określenie dla sprężysto-plastycznego zakresu pracy przekrojów zależności  $N_0(U_0, \Theta_0, \Delta T)$  i  $M_0(U_0, \Theta_0, \Delta T)$  i ich porównanie.



Rys. 2. Rozpatrywane kształty przekroju

K. Kawashima, S. Obata [12] i K. Kawashima, S. Kimura [11] analizowali pokrytyczne zachowanie się modelu pręta w stanie niesprężystym podając m.in. graficznie zależność siły  $N_0$  od strzałki ugięcia dla materiału ze wzmocnieniem. G. Ballio, F. Perotti [1] i S. Dorosz [6] podali również graficznie zależność  $N_0(U_0)$  przy cyklicznych obciążeniach modelu pręta wykonanego z materiału idealnie sprężysto-plastycznego. W pracach tych modele obciążone są tylko siłą osiową (w [11] dodatkowo poprzeczną) przyłożoną do końców mających całkowitą swobodę obrotu.

W pracy obecnej oprócz siły osiowej uwzględniono skupiony na końcach moment, który spowodowany jest ograniczoną swobodą ich obrotu przyjmując, że każdy z czynników obciążenia zależy od przemieszczenia i kąta obrotu.

Do dalszych rozważań wprowadzono bezwymiarowe naprężenie, odkształcenie, krzywiznę, kąt obrotu przekroju, siłę podłużną, moment zginający i przyrost temperatury odnosząc odpowiednie wielkości do ich największej wartości w zakresie sprężystym przy jednoparametrowym obciążeniu (siła, moment lub temperatura działające z osobna):

$$\begin{aligned} s &= \sigma/\sigma_0, & e &= \varepsilon/\varepsilon_e, & u_0 &= 2U_0/(\varepsilon_e l), \\ k &= \kappa/\kappa_e, & \vartheta &= \Theta/\Theta_e, & n &= N/N_e, \\ m_\vartheta &= M_\vartheta/M_{\vartheta e}, & \tau &= \Delta T/\Delta T_e, \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie:  $\varepsilon_e = \sigma_0/E$ ,  $\kappa_e = \varepsilon_e/H$ ,  $\Theta_e = \frac{1}{2} \kappa_e l$  (dla modelu OES),  $\Theta_e = 2\kappa_e a$  (dla modelu

$$\text{SES}), N_e = \sigma_0 A, M_{ge} = \zeta H N_e, \Delta T_e = \varepsilon_e/\alpha, \zeta = \frac{i^2}{H^2},$$

$A$  — pole powierzchni przekroju,

$H$  — pół wysokości bisymetrycznego przekroju,

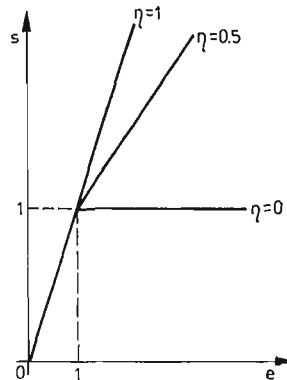
$i$  — promień bezwładności przekroju,

$\alpha$  — współczynnik rozszerzalności liniowej materiału modelu.

### 3. Zależności dla przekrojów

**3.1. Przekrój dwupunktowy.** Sprężysto-plastyczna analiza przekroju dwupunktowego jest znacznie prostsza niż dla przekrojów o polu rozłożonym w sposób ciągły. W skupionych polach występują stany czysto sprężyste lub czysto plastyczne a więc znika problem wyznaczenia granicy pomiędzy strefami. Z tego powodu można bez trudności wprowadzić do rozważań np. model ciała ze wzmocnieniem liniowym, rys. 3, dla którego prawo fizyczne ma postać

$$s = \eta e + (1 - \eta) \text{sign}(e). \quad (3.1)$$



Rys. 3. Zależność naprężenie-odkształcenie dla różnych wartości współczynnika wzmocnienia  $\eta$

Współczynnik wzmocnienia  $\eta = \frac{E_t}{E}$  przyjmuje wartość  $\eta = 1$  w zakresie odkształceń sprężystych ( $e \leq 1$ ) oraz w zależności od przyjętego modelu  $0 \leq \eta \leq 1$  w zakresie odkształceń plastycznych ( $e > 1$ ). Przekrój jako całość znajduje się w stanie sprężysto-plastycznym, gdy w jednym punkcie przekroju  $\eta = 1$  a w drugim  $\eta < 1$ .

Siła normalna i moment zginający w przekroju określone są przez naprężenia panujące w obu punktach  $z = +H$  i  $z = -H$ :

$$n = \frac{1}{2} (s^+ + s^-), \quad m_g = \frac{1}{2} (s^+ - s^-). \quad (3.2)$$

Podobnie odkształcenie osi geometrycznej i krzywizna osi obojętnej przekroju wyznaczone są przez odkształcenia występujące w tych punktach

$$e = \frac{1}{2}(e^+ + e^-), \quad k = \frac{1}{2}(e^+ - e^-). \quad (3.3)$$

**3.2. Przekrój prostokątny.** W częściowo uplastycznionym przekroju prostokątnym można wyodrębnić strefy odkształceń sprężystych i plastycznych. Granicę strefy plastycznej propagującej się od punktu  $\chi = \frac{z}{H} = -1$  oznaczmy przez  $\chi^-$  a strefy plastycznej propagującej się od punktu  $\chi = 1$  przez  $\chi^+$ , rys. 2b. W przypadku ciała sprężysto-idealnie plastycznego ( $\eta = 0$  dla  $e > 1$ ) siła normalna i moment zginający określone są zależnościami

$$n = \frac{1}{2}(s^+ + s^-) - \frac{1}{4}(s^+ - s^-)(\chi^+ + \chi^-), \quad (3.4)$$

$$m_\theta = \frac{1}{4}(s^+ - s^-)[3 - (\chi^+)^2 - \chi^+ \chi^- - (\chi^-)^2], \quad (3.5)$$

a odkształcenie osi geometrycznej i krzywizna osi obojętnej, M. Życzkowski [32]

$$e = -(s^+ \chi^- - s^- \chi^+)/(\chi^+ - \chi^-), \quad (3.6)$$

$$k = (s^+ - s^-)/(\chi^+ - \chi^-). \quad (3.7)$$

**3.3. Przekrój idealnie pierścieniowy.** Za A. G. Dorfmanem i S. D. Lejtiesem [5] przyjmujemy, że w przekroju idealnie pierścieniowym pole powierzchni skupione jest na okręgu o średnicy  $d$ . Wartość naprężenia w każdym punkcie przekroju zależy tylko od jego odległości od osi  $z = \frac{1}{2}d \cos \gamma$ . Dla określenia granicy stref wygodnie jest ze względu na kształt

przekroju posługiwać się kątem  $\gamma$ ,  $\gamma^+$  — gdy odkształcenia plastyczne rozprzestrzeniają się od punktu  $\gamma = 0$ ,  $\gamma^-$  — od punktu  $\gamma = \pi$ , rys. 2c. W przypadku ciała sprężysto-idealnie plastycznego wzory na siłę normalną, moment zginający, odkształcenie osi geometrycznej i krzywiznę osi obojętnej mają postać, A. G. Dorfman, S. D. Lejties [5]

$$n = s^- + \frac{1}{\pi}(s^+ - s^-)(\sin \gamma^- - \gamma^- \cos \gamma^- - \sin \gamma^+ + \gamma^+ \cos \gamma^+)(\cos \gamma^+ - \cos \gamma^-)^{-1}, \quad (3.8)$$

$$m_\theta = \frac{1}{\pi}(s^+ - s^-)(\gamma^- - \sin \gamma^- \cos \gamma^- - \gamma^+ + \sin \gamma^+ \cos \gamma^+)(\cos \gamma^+ - \cos \gamma^-)^{-1}, \quad (3.9)$$

$$e = -(s^+ \cos \gamma^- - s^- \cos \gamma^+)(\cos \gamma^+ - \cos \gamma^-)^{-1}, \quad (3.10)$$

$$k = (s^+ - s^-)(\cos \gamma^+ - \cos \gamma^-)^{-1}. \quad (3.11)$$

#### 4. Zależności dla modeli

**4.1. Model o odkształcalnych elementach skończonych.** Przybliżenie rzeczywistej linii ugięcia odcinkami łuków o stałych krzywiznach wymaga wprowadzenia dla każdego z nich siły normalnej i momentu zginającego o stałych wartościach takich, żeby skutki ich działania

były porównywalne z efektami wywołanymi rzeczywistym obciążeniem pręta. W pracy przyjęto, że zastępcze wartości w obu elementach są równoważne pod względem energetycznym, a mianowicie zdefiniujemy je z warunku równości wariacji pracy sił zewnętrznych

$$\delta L_z = N_e \varepsilon_e l (-n_0 \delta u_0 + \zeta m_0 \delta \vartheta_0) \quad (4.1)$$

i pracy sił wewnętrznych

$$\delta L_w = N_e \varepsilon_e l [(1 - 2\xi_0) n_1 \delta e_1 + 2\xi_0 n_2 \delta e_2 + \zeta m_{\theta 1} \delta \vartheta_1 + \zeta m_{\theta 2} \delta \vartheta_2]. \quad (4.2)$$

W tym celu należy przeprowadzić analizę uogólnionych przemieszczeń modelu. Wyrażenia na osiowe przemieszczenie końcowego przekroju modelu i strzałkę ugięcia środkowego przekroju wyprowadzono ze ścisłych związków geometrycznych po rozwinięciu występujących w nich funkcji kąta w szereg i pozostawieniu wyrazów co najmniej drugiego stopnia:

$\frac{\sin \Theta}{\Theta} \cong 1 - \frac{1}{6} \Theta^2$ ,  $\frac{1 - \cos \Theta}{\Theta} \cong \frac{1}{2} \Theta$ . Tak więc osiowe przemieszczenie z uwzględnieniem wpływu temperatury wyraża się wzorem

$$u_0 = \frac{1}{24} \zeta \varepsilon_e \lambda^2 [\vartheta_2^2 + (1 - 2\xi_0) \vartheta_0 \vartheta_2 + (1 - 2\xi_0) \vartheta_0^2] - [(1 - 2\xi_0) e_1 + 2\xi_0 e_2] - \tau, \quad (4.3)$$

a bezwymiarowa strzałka ugięcia (odniesiona do długości modelu  $l$ )

$$f = \frac{1}{8} \sqrt{\zeta} \varepsilon_e \lambda [(1 - 2\xi_0) \vartheta_0 + \vartheta_2]. \quad (4.4)$$

We wzorach tych  $\lambda = l/i$  jest smukłością modelu. Kąt obrotu końca modelu względem jego środka wyznaczamy z zależności:

$$\vartheta_0 = \vartheta_1 + \vartheta_2, \quad (4.5)$$

przy czym kąty obrotu przekroju końcowego i środkowego względem rozgraniczającego odkształcalne elementy związane są z ich krzywiznami

$$\vartheta_1 = (1 - 2\xi_0) k_1, \quad \vartheta_2 = 2\xi_0 k_2. \quad (4.6)$$

Wykorzystanie zależności (4.1) do (4.6) pozwala określić wartości zastępczych sił i momentów dla skrajnego i środkowego elementu

$$n_1 = n_2 = n_0, \quad (4.7)$$

$$m_{\theta 1} = m_0 - \frac{1}{24} \varepsilon_e \lambda^2 (1 - 2\xi_0) (2\vartheta_0 + \vartheta_2) n_0, \quad (4.8)$$

$$m_{\theta 2} = m_0 - \frac{1}{24} \varepsilon_e \lambda^2 [3(1 - 2\xi_0) \vartheta_0 + (3 - 2\xi_0) \vartheta_2] n_0. \quad (4.9)$$

Przytoczone równania (4.3) do (4.9) wraz z kompletem zależności dla każdego z przekrojów pozwalają wyznaczyć  $n_0$  i  $m_0$  dla zadanych  $u_0$ ,  $\vartheta_0$ ,  $\tau$ . W przypadku przekroju prostokątnego i pierścieniowego wyznaczenie charakterystyk modeli sprowadza się do znalezienia rozwiązania układu czterech równań nieliniowych ze względu na różne kombinacje czterech niewiadomych wielkości spośród ośmiu (czterech naprężeń i czterech granic



stref) w zależności od tego czy przekroje pracują sprężysto, czy są jedno- lub dwustronnie uplastycznione. Dla przekroju dwupunktowego można ten układ sprowadzić do jednego równania algebraicznego piątego stopnia ze względu na  $n_0$ .

We wzorach występuje parametr  $\xi_0$  decydujący o proporcjach długości odkształcalnych elementów skończonych. W pracy przeprowadzono analizę wpływu  $\xi_0$  na wartość siły krytycznej sprężystego modelu z przegubowo zamocowanymi i dwustronnie utwierdzonymi końcami. Różnice względne w odniesieniu do eulerowskich sił krytycznych dla obu przypadków zamocowania zamieszczono w tabelcy 1. W dalszych rozważaniach przyjęto wartość  $\xi_0 = 0.25$  zapewniającą najmniejszy błąd dla pręta dwustronnie utwierdzonego przy niewielkim błędzie dla przegubowo podpartego.

Tabela 1.

Błędy przybliżenia siły krytycznej dla modelu OES o dwóch elementach skończonych

$\xi_0$	$(P_{kr} - P_E)/P_E$	
	przeg.	utw.
0.10	+14,4%	+90,0%
0.20	+7,6%	+26,8%
0.25	+5,4%	+21,8%
0.30	+4,6%	+26,8%
2/3	+4,8%	+37,0%
0.40	+7,4%	+90,0%

4.2. Model o sztywnych elementach skończonych. Analiza symetrycznie obciążonego modelu z dwoma długimi elementami sztywnymi i trzema krótkimi elementami odkształcalnymi ( $\frac{a}{l} = \xi \ll 1$ ), rys. 1b, sprowadza się do wyznaczenia odkształceń w czterech rozciąganych lub ściskanych prętach odpowiadających dwu przekrojom dwupunktowym. Dla wyznaczenia tych odkształceń dysponujemy warunkami równowagi sił (4.7) i momentów

$$m_{g1} = m_0, \quad m_{g2} = m_0 - \lambda f n_0, \quad (4.10)$$

wyrażeniami wyprowadzonymi ze ścisłych zależności geometrycznych po przyjęciu takiej samej dokładności w rozwinięciach funkcji kąta jak w modelu OES

$$u_0 = 2\xi^2 \varepsilon_e \lambda^2 [(1 - 4\xi)\vartheta_2^2 + 2\xi\vartheta_0^2] - 2\xi(e_1 + e_2) - 4\xi\tau, \quad (4.11)$$

$$f = \xi \varepsilon_e \lambda [(1 - 4\xi)\vartheta_2 + 2\xi\vartheta_0] \quad (4.12)$$

i dodatkowo związkami

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} k_1, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{2} k_2. \quad (4.13)$$

Równania (4.10) do (4.13) wraz z kompletem zależności dla przekroju dwupunktowego można sprowadzić do równania piątego stopnia ze względu na  $n_0$  a więc dla zadanych  $u_0, \vartheta_0, \tau$  można wyznaczyć charakterystyki modelu  $n_0(u_0, \vartheta_0, \tau)$  i  $m_0(u_0, \vartheta_0, \tau)$ .

### 5. Ścisłe rozwiązania w zakresie sprężystym

Ścisłe rozwiązania zlinearyzowanego równania dla pręta obciążonego siłą osiową i momentem zginającym na obu końcach w zakresie sprężystym (S. Timoshenko, J. Gere [26]) po uwzględnieniu wpływu zmian temperatury na osiowe przemieszczenie przekrojów i wprowadzeniu analogicznie jak dla modeli wielkości bezwymiarowych (w tym przypadku oznaczonych wężykiem) mają postać:

— w przypadku zginania ze ściskaniem

$$\tilde{n}_0 - \frac{1}{8} \zeta \tilde{\varepsilon}_e \tilde{\lambda}^2 \frac{kl - \sin kl}{kl(1 - \cos kl)} \tilde{\vartheta}_0^2 + (\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}) = 0, \quad (5.1)$$

$$\tilde{m}_0 = \frac{1}{2} \frac{kl \sin kl}{1 - \cos kl} \tilde{\vartheta}_0; \quad (5.2)$$

— w przypadku zginania z rozciąganiem

$$\tilde{n}_0 - \frac{1}{8} \zeta \tilde{\varepsilon}_e \tilde{\lambda}^2 \frac{kl - \operatorname{sh}(kl)}{kl[1 - \operatorname{ch}(kl)]} \tilde{\vartheta}_0^2 + (\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}) = 0, \quad (5.3)$$

$$\tilde{m}_0 = -\frac{1}{2} \frac{kl \operatorname{sh}(kl)}{1 - \operatorname{ch}(kl)} \tilde{\vartheta}_0, \quad (5.4)$$

gdzie:

$$kl = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_e \tilde{\lambda}^2 |\tilde{n}_0|}.$$

Rozwiązanie równań (5.1) do (5.4) pozwala wyznaczyć charakterystyki  $\tilde{n}_0 = \tilde{n}_0(\tilde{u}_0, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{\tau})$  i  $\tilde{m}_0 = \tilde{m}_0(\tilde{u}_0, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{\tau})$  dla ciała idealnie sprężystego co odpowiada przyjęciu  $\eta = 1$  dla modelu z liniowym wzmocnieniem.

### 6. Warunki odpowiedniości modeli

Końcowym efektem przeprowadzonej analizy jest porównanie w sprężysto-plastycznym zakresie charakterystyk wszystkich modeli i dodatkowo zweryfikowanie ich ze ścisłym rozwiązaniem kryterialnego pręta (pręt o przekroju idealnie pierścieniowym) dla czysto sprężystych odkształceń. W tym celu należy tak dobrać proporcje między parametrami modeli i kryterialnego pręta, aby zapewnić spełnienie kilku wybranych warunków. W pracy przyjęto, że pręt i jego modele mają taką samą (1) nośność sprężystą przy rozciąganiu i ściskaniu, (2) siłę krytyczną, (3) sztywność na rozciąganie i (4) sztywność na zginanie. Zrezygnowano ze spełnienia warunku równości nośności sprężystej przy zginaniu, ponieważ powodował przesztynienie układu równań uniemożliwiając dobór parametrów geometrycznych i fizycznych modeli.

Wartość siły krytycznej a tym samym proporcje liczbowe pomiędzy parametrami geometrycznymi i fizycznymi porównywanych obiektów zależą od sposobu zamocowania końców. Przeprowadzona pod tym kątem analiza modelu dwukrzywiznowego wykazała, tablica 1, że różnica wartości siły krytycznej modelu i eulerowskiej pręta w przypadku przegubowo zamocowanych końców nie przekracza 6%, natomiast w przypadku obustronnego utwierdzenia dochodzi do 22%. W konsekwencji zdecydowano, że dobrane parametry mają zapewnić zgodność sił krytycznych pręta i modeli z utwierdzonymi końcami.

Oczywisty dla modelu OES warunek sztywności na zginanie w przypadku modelu SES wymaga objaśnienia. W pracy przyjęto, że będzie on spełniony gdy strzałki ugięcia pod siłą przyłożoną w środku długości obustronnie utwierdzonego pręta i modelu są w zakresie sprężystym równe.

W dalszych rozważaniach przyjęto, że zgodność nośności sprężystych przy rozciąganiu i sił krytycznych pręta kryterialnego i modeli ma być zachowana z osobna dla przypadku obciążenia siłą osiową i dla przypadku obciążenia temperaturą (nieobciążony siłą pręt pomiędzy dwoma sztywnymi ścianami). Z pierwszego warunku wynikają takie same dla modeli OES i SES związki

$$A\sigma_0 = \tilde{A}\tilde{\sigma}_0, \quad \frac{\varepsilon_e}{\tilde{\varepsilon}_e} = \frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}. \quad (6.1)$$

Spełnienie pozostałych warunków daje zależności pomiędzy smukłościami, promieniami bezwładności i maksymalnymi odkształceniami sprężystymi modeli i pręta kryterialnego: — w przypadku modelu OES

$$\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} = \left(\frac{12}{\pi^2}\right)^{3/4}, \quad \frac{i}{\tilde{i}} = \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{1/4}, \quad \frac{\varepsilon_e}{\tilde{\varepsilon}_e} = \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{1/2}; \quad (6.2)$$

— w przypadku modelu SES

$$\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{i}{\tilde{i}} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{3}}, \quad \frac{\varepsilon_e}{\tilde{\varepsilon}_e} = \frac{3}{\pi^2\xi}. \quad (6.3)$$

W powyższych wzorach wielkości bez wężyka charakteryzują modele, z wężykiem — pręt kryterialny i zdefiniowane są zależnościami (2.1). Spełnienie czterech wymienionych warunków odpowiedniości nie wymaga jednoznacznego określenia proporcji  $A/\tilde{A}$  i  $\sigma_0/\tilde{\sigma}_0$  byle zachowana była pierwsza z równości (6.1).

## 7. Obliczenia numeryczne dla modeli

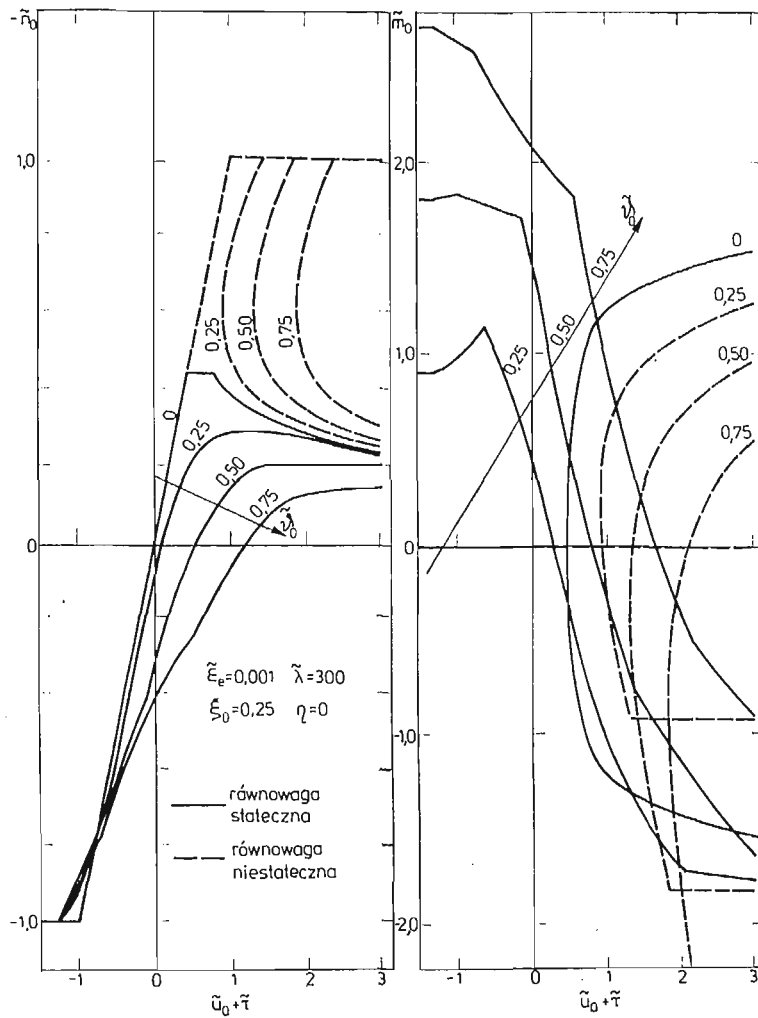
Charakterystyki modeli  $n_0(u_0, \vartheta_0, \tau)$  i  $m_0(u_0, \vartheta_0, \tau)$  w zakresie sprężysto-plastycznych odkształceń zostały określone numerycznie dla modelu OES z dwupunktowym, prostokątnym i idealnym przekrojem pierścieniowym oraz dla modelu SES z dwupunktowym przekrojem po przyjęciu  $\xi = 0.025$ . Parametry geometryczne i fizyczne modeli zostały dobrane zgodnie z warunkami (6.1), (6.2), (6.3) przy założeniu, że granice plastyczności materiału i modeli i pręta kryterialnego są równe  $\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0$ . Obliczenia przeprowadzono dla  $\tilde{\varepsilon}_e = 0.001$  (wartość odpowiadająca dużej grupie węglowych stali konstrukcyjnych) w technicznie ważnym zakresie smukłości  $100 \leq \tilde{\lambda} \leq 300$ .

Układy równań nieliniowych (tego samego typu dla wszystkich modeli) rozwiązywano doliczając wartości siły i momentu na końcach modeli  $n_0$ ,  $m_0$  do zadanego przemieszczenia i kąta obrotu końcowego przekroju  $u_0 + \tau$ ,  $\vartheta_0$ . Wyniki obliczeń przedstawiono głównie w postaci wykresów  $\tilde{n}_0(\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}, \tilde{\vartheta}_0)$  i  $\tilde{m}_0(\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}, \tilde{\vartheta}_0)$  przyjmując jako zmienną niezależną przemieszczenie osiowe końcowego przekroju pręta kryterialnego ( $\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}$ ) a jego kąt obrotu  $\tilde{\vartheta}_0$  traktując jako parametr. W tym celu przeliczono odpowiednie wielkości wykorzystując ich definicje (2.1) i warunki (6.1) do (6.3); dla modelu OES  $\tilde{n}_0/n_0 = 1$ ,  $\tilde{m}_0/m_0 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \xi\right)^{1/2}$ ,  $\tilde{u}_0/u_0 = 1$ ,  $\tilde{\tau}/\tau = 1$ ,  $\tilde{\vartheta}_0/\vartheta_0 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{\pi} \xi\right)^{1/2}$  oraz dla modelu SES  $\tilde{n}_0/n_0 = 1$ ,  $\tilde{m}_0/m_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$ ,  $\tilde{u}_0/u_0 = \frac{1}{4\xi}$ ,  $\tilde{\tau}/\tau = 1$ ,  $\tilde{\vartheta}_0/\vartheta_0 = \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2}$ . Charakterystyki sił są funkcjami parzystymi względem  $\tilde{\vartheta}_0$ , a charakterystyki momentów — nieparzystymi.

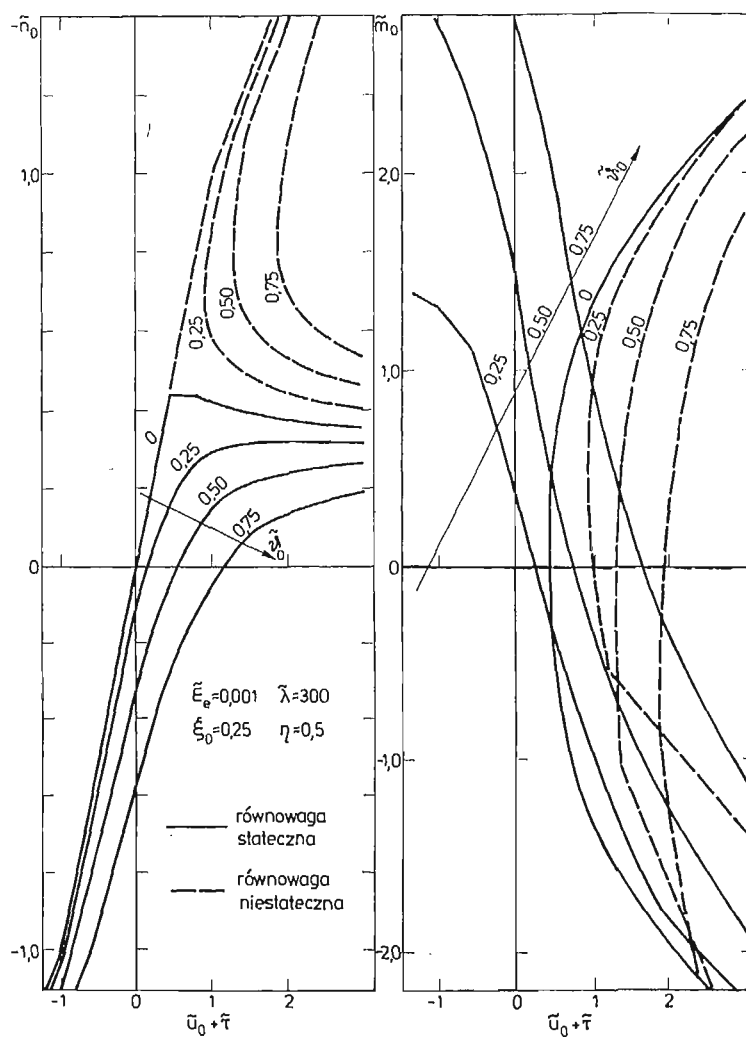
## 8. Analiza wyników i wnioski

**8.1. Jednoznaczność rozwiązania układu równań.** Analizując zachowanie się pręta sztywno utwierdzonego na obu końcach ( $\tilde{\vartheta}_0 = 0$ ) przy równoczesnym wymuszeniu ich przemieszczenia osiowego można stwierdzić, że w zakresie przemieszczeń mniejszych od wartości odpowiadającej eulerowskiej sile krytycznej istnieje tylko jedna postać równowagi — prostoliniowa. Dla przemieszczeń większych następuje utrata stateczności i możliwe są trzy postacie: dwie stateczne równouprawnione (przeciwnie wygięte) i jedna niestateczna (prostoliniowa). W przypadku prętów, których końcowe przekroje obrócone są o zadany kąt ( $\tilde{\vartheta}_0 \neq 0$ ) zaistnieje podobna sytuacja. Jedna postać równowagi występuje dla przemieszczeń mniejszych od pewnej wartości granicznej uzależnionej od kąta  $\tilde{\vartheta}_0$  i trzy różne postacie dla większych przemieszczeń, spośród których tylko jedna jest stateczna. Spostrzeżenia te znajdują potwierdzenie w wynikach obliczeń numerycznych modeli wykonanych w ramach obecnej analizy. Układy równań nieliniowych posiadają jeden pierwiastek w zakresie przemieszczeń mniejszych od granicznego oraz trzy różne dla przemieszczeń większych. Przykładowo pokazano wyniki obliczeń modelu OES z przekrojem dwupunktowym wykonanego z materiału bez wzmocnienia  $\eta = 0$ , rys. 4, ze wzmocnieniem liniowym  $\eta = 0.5$ , rys. 5 oraz idealnie sprężystego  $\eta = 1$ , rys. 6, dla smukłości pręta kryterialnego  $\tilde{\lambda} = 300$ . We wszystkich tych przypadkach przyjęto, że rozwiązaniami odpowiadającymi statecznym formom równowagi są te, które dają najmniejsze wartości bezwzględne sił ściskających (zaznaczone ciągłą linią). W dalszych obliczeniach porównawczych uwzględniono tylko te rozwiązania uważając, że są one poszukiwanymi przez nas charakterystykami modeli. Widoczne w przypadku ciał sprężysto-plastycznych załamania charakterystyk zarówno sił jak i momentów spowodowane są uplastycznieniami kolejnych punktów. W przypadku przekrojów o polu rozłożonym w sposób ciągły załamania te są znacznie mniej wyraźne.

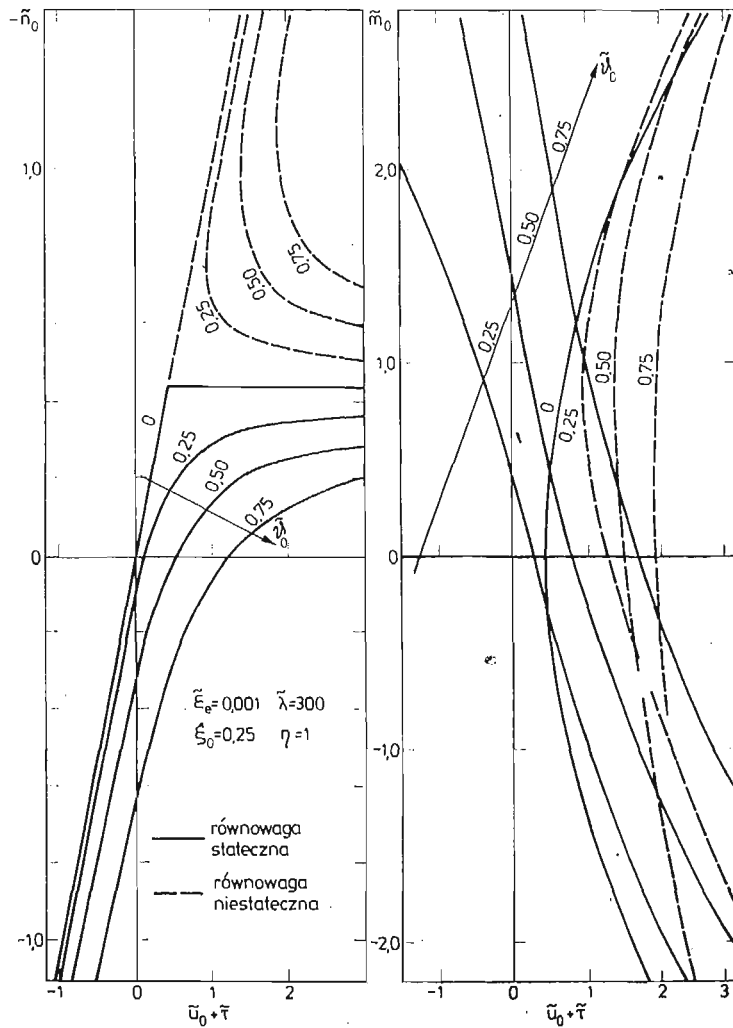
Dla statecznej formy równowagi modelu pokazano bardziej typowe zależności: siły osiowej od strzałki ugięcia dla różnych wartości  $\tilde{\vartheta}_0$ , rys. 7 i momentu skupionego od



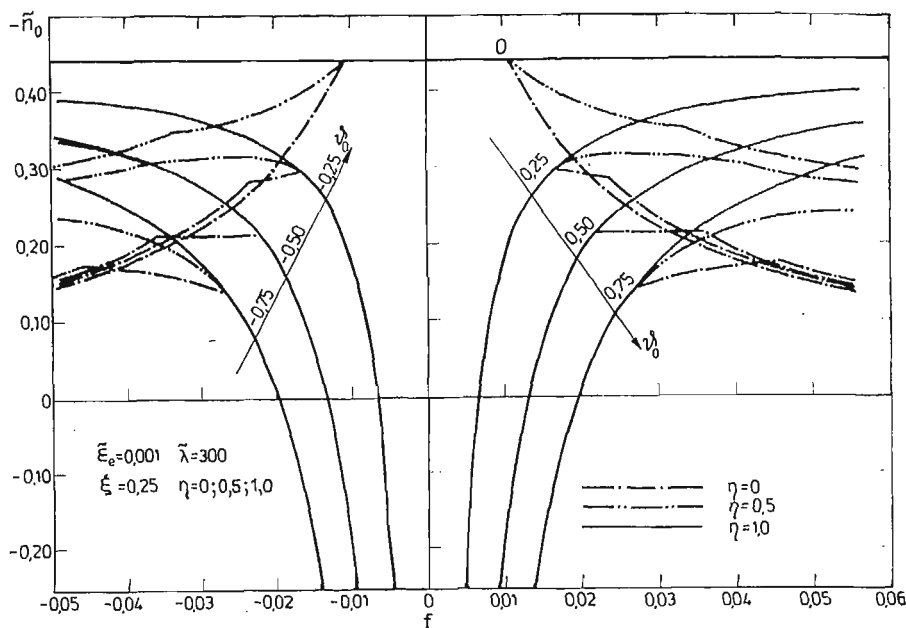
Rys. 4. Charakterystyki sił i momentów dla statecznych i niestatecznych form równowagi modelu OES — materiał bez wzmocnienia,  $\eta = 0$



Rys. 5. Charakterystyki sił i momentów dla stałecznych i niestałecznych form równowagi modelu OES, materiał ze wzmocnieniem liniowym,  $\eta = 0,5$



Rys. 6. Charakterystyki sił i momentów dla statecznych i niestatecznych form równowagi modelu OES, materiał sprężysty,  $\eta = 1$



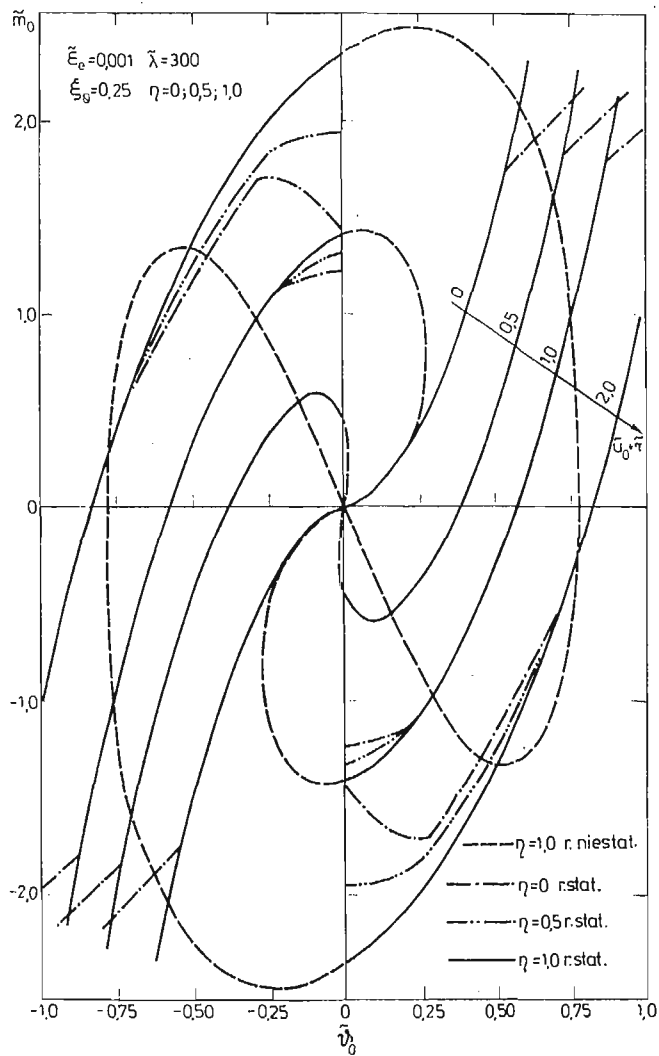
Rys. 7. Zależność siła-strzałka ugięcia dla statecznej formy równowagi modelu OES'

kąta dla różnych wartości  $\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}$ , rys. 8. Na rysunkach tych zestawiono wyniki obliczeń dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego, ze wzmocnieniem liniowym  $\eta = 0.5$  i sprężystego  $\eta = 1$ . Dla przypadku modelu ze sprężystego materiału zależność momentu od kąta obrotu, rys. 8 pokazano dla statecznych i niestatecznych form równowagi.

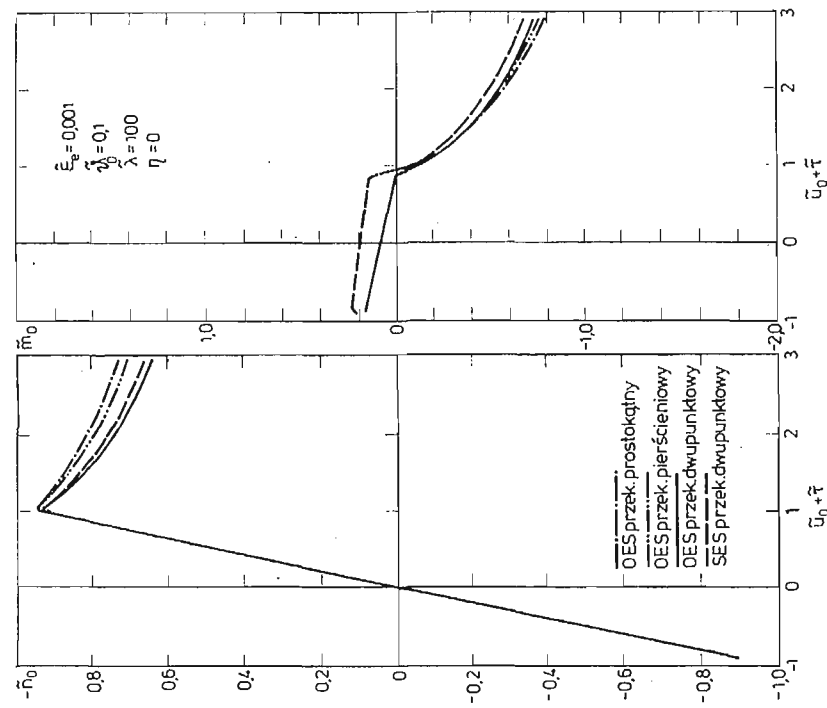
Na podstawie wyników obliczeń modeli dla ciała idealnie sprężystego można wysnuć wniosek, że przyjęta dokładność w wyrażeniach na  $u_0$  (4.3) i (4.11) jest niewystarczająca dla dokładnego opisu stanu pokrytycznego (bezwzględna wartość siły ściskającej nie zmienia się ze wzrostem przemieszczenia a wg dokładniejszych teorii powinna rosnać [33]).

**8.2. Porównanie dla materiału sprężysto-idealnie plastycznego  $\eta = 0$ .** Dla prętów o smukłościach małych i średnich ( $\tilde{\lambda} \leq 200$ ) zależność siły od przemieszczenia osiowego ma ekstremum w zakresie sił ściskających w przebadanym przedziale zmienności kąta  $\tilde{\vartheta}_0$ . Ekstremalna wartość bliska sile uplastyczniającej dla małych smukłości i kątów obrotu, rys. 9, obniża się i przesuwa: ze wzrostem kąta w kierunku większych przemieszczeń, rys. 10, ze wzrostem smukłości w kierunku mniejszych, rys. 11. Różnice ilościowe znikome w zakresie sprężystym są wyraźniejsze w zakresie sprężysto-plastycznym; po osiągnięciu ekstremum w obszarze zginania ze ściskaniem zwiększają się ze wzrostem przemieszczenia. W tym zakresie znaczące różnice występują pomiędzy modelami o przekrojach dwupunktowych i modelami o przekrojach ciągłych dających większe wartości sił. Po stronie sprężysto-plastycznego rozciągania zauważalne różnice występują dla większych kątów ( $\tilde{\vartheta}_0 = 0.5$ ) pomiędzy modelami OES i SES, rys. 10,12. Znikają one przy pełnym uplastycznieniu modeli przez rozciąganie. Dla smukłych prętów przy małych kątach, rys. 11, największe różnice występują w okolicy ekstremum. W tym przypadku modele o dwupunktowych przekrojach dają większe wartości sił. Dla wzrastających wartości kąta, rys. 12, wyraźnie

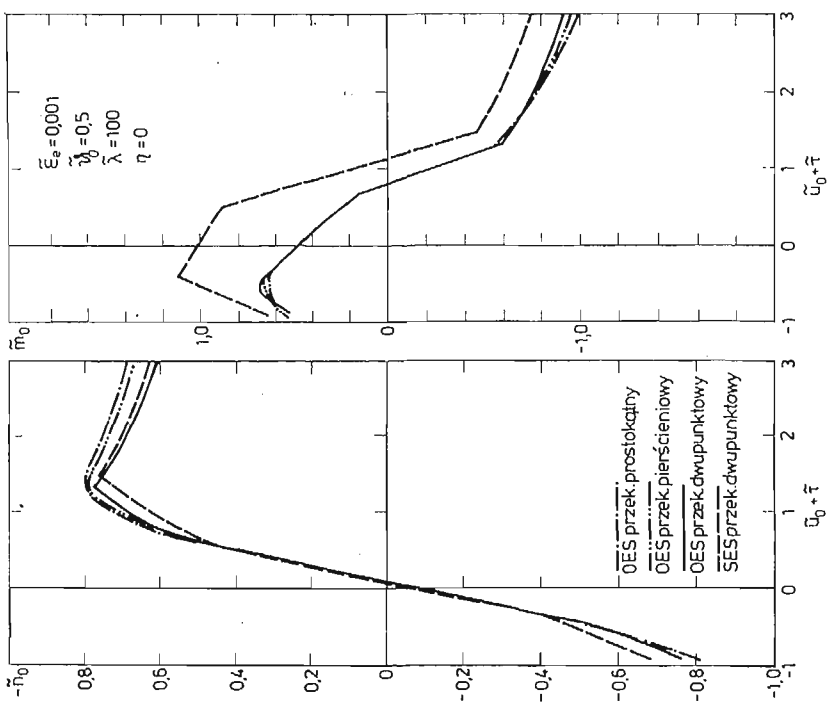




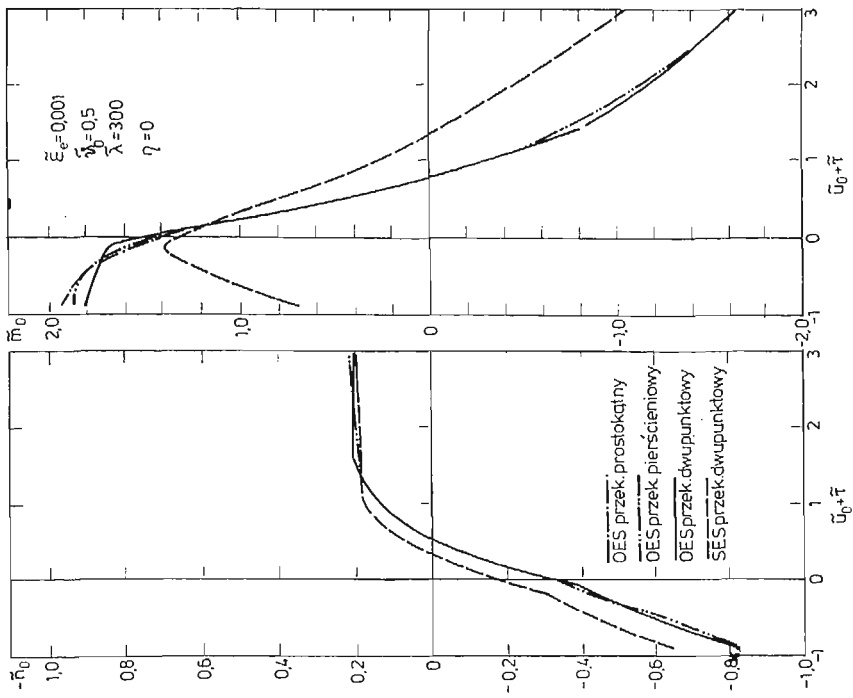
Rys. 8. Zależność moment-kąt obrotu dla różnych form równowagi modelu OES



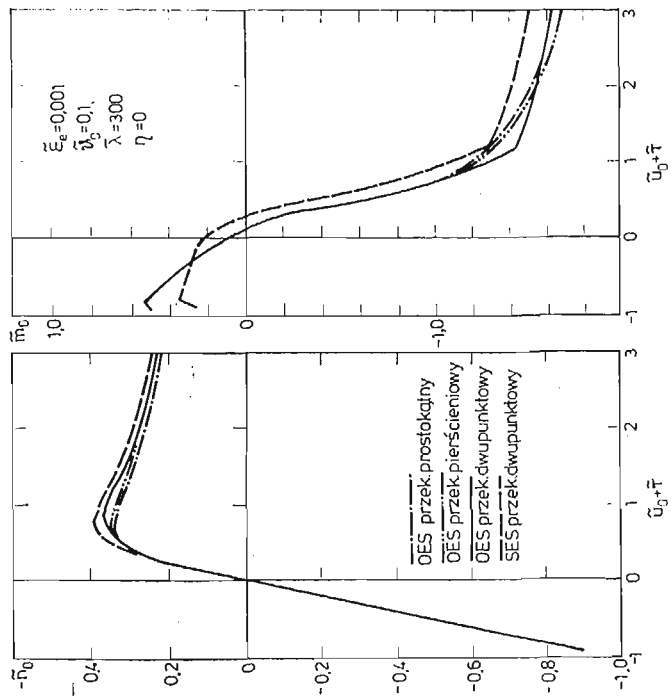
Rys. 9. Porównanie charakterystyk dla materiału bez wzmocnienia, mały kąt obrotu, mała smukłość



Rys. 10. Porównanie charakterystyk dla materiału bez wzmocnienia, duży kąt obrotu, mała smukłość



Rys. 11. Porównanie charakterystyk dla materiału bez wzmocnienia, mały kąt obrotu, duża smukłość



Rys. 12. Porównanie charakterystyk dla materiału bez wzmocnienia, duży kąt obrotu, duża smukłość

wzrastają różnice pomiędzy modelami SES i OES w obszarze małych przemieszczeń zarówno po stronie ściskania jak i rozciągania.

Zależność momentu od przemieszczenia osiowego dla każdego modelu wykazuje ekstremum w zakresie sprężysto-plastycznego zginania z rozciąganiem rys. 9, 10, 11. W zakresie zginania ze ściskaniem istnieje wartość przemieszczenia osiowego, przy której moment się zeruje, co odpowiada przegubowemu zamocowaniu pręta. Dla mniejszych przemieszczeń moment ma znak dodatni (krzywizny w obu elementach są tego samego znaku); dla większych moment staje się ujemny (krzywizny elementów są przeciwnego znaku) co odpowiada w ogólnym przypadku nieszywnemu utwierdzeniu. Różnice ilościowe pomiędzy modelami OES są w zasadzie niewielkie. W zakresie niesprężystego zginania ze ściskaniem wyraźnie zaczynają narastać począwszy od pewnej wartości przemieszczenia ( $\tilde{u}_0 + \tilde{\tau} > 3$ ). W zakresie niesprężystego zginania z rozciąganiem zauważalne różnice występują w pobliżu ekstremum.

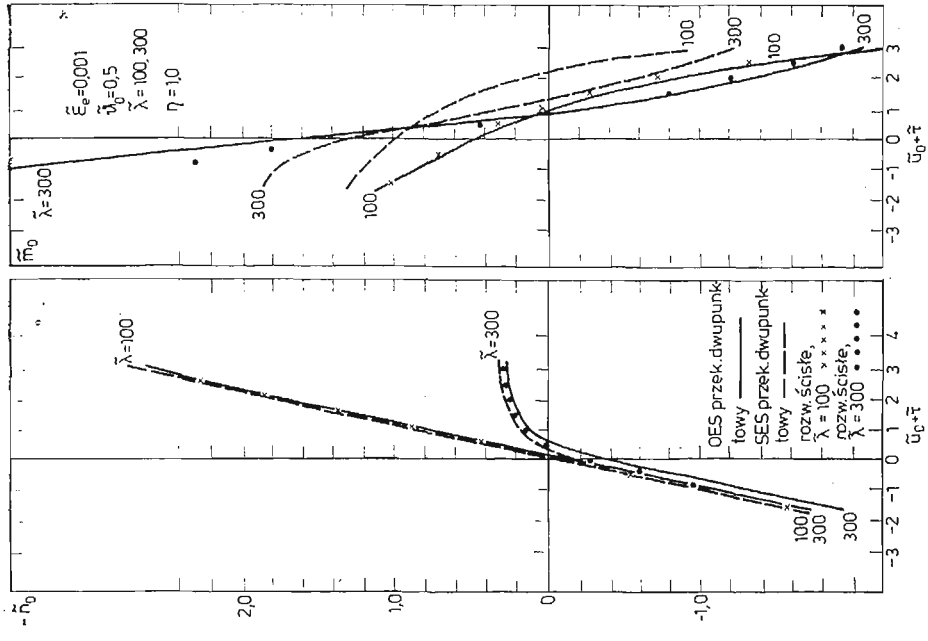
Przebieg zmienności momentu ze zmianą przemieszczenia dla modelu SES jest inny niż dla modelu OES, wykazuje jednak we wszystkich przeliczonych przypadkach wspólną cechę, którą jest przesunięcie miejsca zerowego w kierunku większych przemieszczeń w porównaniu do modeli OES. Porównanie ilościowe można zrobić np. przyjmując za wspólny przypadek przegubowego podparcia. Przy małych smukłościach ( $\tilde{\lambda} = 100$ ) model SES daje większe wartości momentu niż model OES praktycznie w całym zakresie sprężysto-plastycznego zginania z rozciąganiem i ściskaniem. Dla większych smukłości ( $\tilde{\lambda} = 300$ ) prawidłowość ta utrzymuje się w zakresie ujemnych wartości momentu, natomiast w zakresie dodatnich wartości model SES daje mniejsze momenty niż model OES. Przy pełnym uplastycznieniu modeli przez rozciąganie wartość momentu dla OES ustala się na pewnym poziomie zależnym od smukłości i kąta, natomiast dla SES wynosi zero. Rozbieżność ta jest spowodowana różnymi metodami określenia momentów zginających w odkształcalnych elementach: energetyczną — dla OES i kollokacyjną dla SES.

**8.3. Porównanie dla materiału z liniowym wzmocnieniem.** Wyniki obliczeń przeprowadzonych dla modeli OES i SES z dwupunktowymi przekrojami pokazano na rys. 13 dla  $\eta = 0.5$  i na rys. 14 dla  $\eta = 1$ . Zależności siły od przemieszczenia dla obu modeli są bardzo zbliżone do siebie. Znaczące różnice można zaobserwować dopiero dla dużych smukłości i kątów  $\tilde{\lambda} = 300$ ,  $\tilde{\vartheta}_0 = 0.5$ , rys. 13, 14.

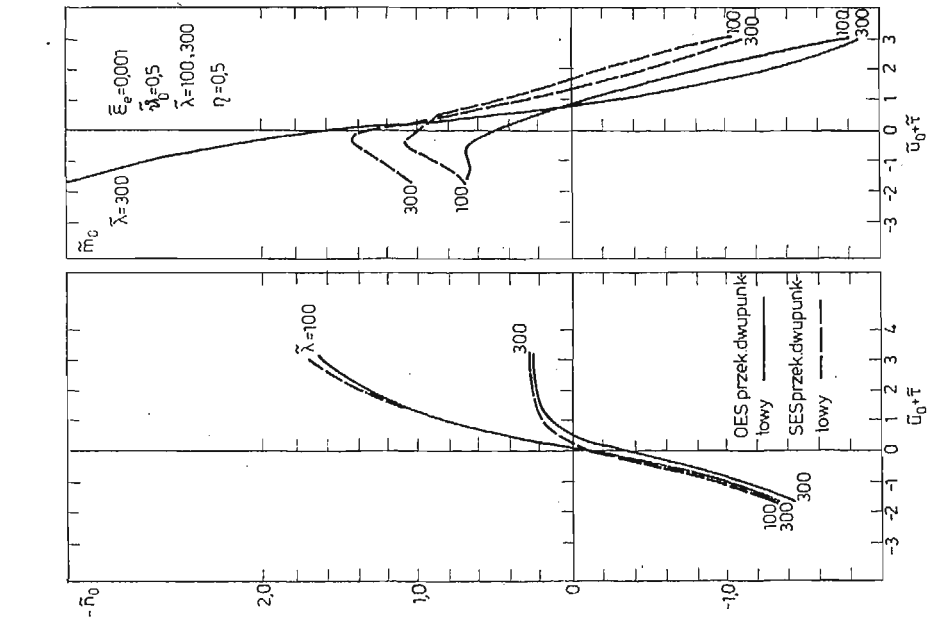
Charakter zależności momentu od przemieszczenia jest bardzo różny dla obu modeli. Cechy wspólne to zmiana znaku momentu z dodatniego na ujemny i monotoniczne malenie z dalszym wzrostem przemieszczenia. W przypadku przyjęcia za wyjściowy stan przegubowego podparcia modeli prawidłowości wskazane dla materiału bez wzmocnienia tracą swoją aktualność ze wzrostem współczynnika wzmocnienia.

Porównanie wyników obliczeń obu modeli ze ścisłym rozwiązaniem sprężystym rys. 14 wskazuje, że dla ciała idealnie sprężystego zarówno model OES i SES nieźle odwzorowują zależność siły od przemieszczenia w przebadanym zakresie zmienności smukłości i kąta. Wartości sił określone przy pomocy modelu SES są nieznacznie większe od rozwiązania ścisłego.

Model OES natomiast znacznie lepiej przybliża ścisłą zależność momentu od przemieszczenia aczkolwiek przybliżenie to jest gorsze niż dla sił.



Rys. 13. Porównanie charakterystyk dla materiału ze wzmocnieniem liniowym  $\eta = 0.5$ , duży kąt obrotu



Rys. 14. Porównanie charakterystyk dla materiału sprężystego  $\eta = 1$ , duży kąt obrotu

## 9. Wnioski

1. Analizowane modele nadają się dość dobrze do wyznaczenia globalnych zależności  $\tilde{n}_0 = \tilde{\Psi}_1(\tilde{u}_0, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{\tau})$  i  $\tilde{m}_0 = \tilde{\Psi}_2(\tilde{u}_0, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{\tau})$ . Lokalna analiza odkształceń i naprężeń pręta w oparciu o nie może prowadzić nawet do jakościowych błędów, np. w modelu OES ze wzrostem siły rozciągającej krzywizna środkowego elementu zmienia znak. Spowodowane to jest ustaleniem punktu zszycia obu elementów. Model SES nie wykazuje takich efektów.
2. Wyznaczone charakterystyki są silnie nieliniowe względem przemieszczenia osiowego i kąta obrotu w interesującym pod kątem praktycznego zastosowania przedziale zmienności  $-3 < \tilde{u}_0 + \tilde{\tau} < 5$ . O ile nieliniowość względem  $\tilde{u}_0 + \tilde{\tau}$  występuje dla każdego z przebadanych kątów to dla niektórych wartości przemieszczenia siła i moment są praktycznie liniowo zależne od  $\tilde{\vartheta}_0$ .
3. Wpływ zmiany kąta na wartość siły oraz przemieszczenia osiowego na wartość momentu jest duży. Nie uwzględnienie go może prowadzić do znacznych błędów, zatem podłoże utworzone przez rodzinę prętów (rurek) powinno być traktowane jako „podłoże momentowe”.
4. Przewidując wykorzystanie modeli do opisu zachowania się rurkowego podłoża płyt sitowych istotne znaczenie ma skala trudności rozwiązywania problemu. Pod tym względem przewagę mają modele o dwupunktowych przekrojach, dla których układy równań nieliniowych dają się sprowadzić do algebraicznego równania piątego stopnia. Występująca dla każdego z modeli zmiana znaku momentu na końcach ze wzrostem przemieszczenia upoważnia do przypuszczenia, że podłoże płyt sitowych lokalnie (np. w wyniku utraty stateczności) zmieni się z podtrzymującego w dociążające.
5. Otrzymane charakterystyki modeli dla zakresu sprężysto-plastycznych odkształceń, jak również porównanie ich ze ścisłym rozwiązaniem w zakresie sprężystym wskazują, że do dalszego zastosowania najbardziej nadaje się model OES o przekroju dwupunktowym. Daje on lepsze przybliżenia od modelu SES przy takim samym stopniu trudności rozwiązania problemu (mniejszym niż w przypadku pierścieniowego i prostokątnego przekroju).

## Literatura

1. G. BALLIO, F. PEROTTI, *A finite element describing axially loaded members subjected to cyclic loads*, EUROMECH COLL. 174, Palermo 1983, COGRAS, Palermo 1984, 67 - 78.
2. C. R. CALLADINE, *The effect of cross-section on the creep buckling behaviour of columns*, Int. J. Mech. Sci., 4 (1962), 387 - 407.
3. A. CHAJES, *Stability behavior illustrated by simple models*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 95 (1969), 6, 1153 - 1172.
4. P. CSONKA, *Die Knickung geradachsiger Stäbe bei Behandlung mit der Methode der elastischen Punkte*, Acta Technica Acad. Sci. Hung., XII (1955), 3 - 4, 275 - 287.
5. А. Г. Дорфман, С. Д. Лейтес, *Об устойчивости внецентрично сжатых трубчатых стержней из упруго-пластического материала*, Инж. журн., 4 (1964), 1, 134 - 140.
6. S. DOROSZ, *The hysteretic behaviour of the bar under cyclic axial loading*, EUROMECH COLL. 174, Palermo 1983, COGRAS, Palermo 1984, 357 - 376.

7. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do analizy drgań złożonych układów liniowych*, Rozpr. Inż., **20** (1972), 2, 601 - 612.
8. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, *Analiza drgań wymuszonych złożonych układów liniowych metodą sztywnych elementów skończonych*, Arch. Bud. Maszyn, **19** (1972), 4, 623 - 641.
9. B. J. HARTZ, *Matrix formulation of structural stability problems*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., **91** (1965), 141 - 157.
10. G. W. HICKS, *Finite-element elastic buckling analysis*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., **93** (1967), 6, 71 - 86.
11. K. KAWASHIMA, S. KIMURA, *Load-carrying capacity of inelastic columns in the post-buckling range*, 25<sup>th</sup> Polish Solid Mech. Conf., Jachranka, 1984.
12. K. KAWASHIMA, S. OBATA, *Reversed yield and plastic buckling*, J. Eng. Mech., **110** (1984), 6, 1005 - 1010.
13. K. KOWALCZYK, *Powierzchnie graniczne dla modelu sprężysto-plastycznego pręta przy uwzględnieniu zmian geometrii*, Mech. Teor. i Stos., **17** (1979), 2, 203 - 215.
14. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zesz. Nauk. Pol. Gdańskiej, Mechanika, **12**, 1971.
15. J. KRUŻELECKI, W. KRZYŚ, *Nowa metoda doboru zastępczego przekroju wielopunktowego w analizie sprężysto-plastycznego zginania*, Rozpr. Inż., **26** (1978), 2, 291 - 306.
16. J. NALESZKIEWICZ, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, PWN, W-wa 1958.
17. D. A. NETHERCOT, K. C. ROCKEY, *Finite element solutions for the buckling of columns and beams*, Int. J. Mech. Sci., **13** (1971), 945 - 949.
18. J. ORKISZ, *Principles of choosing a multipointed equivalent cross-section for elastic-plastic beams*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **10** (1962), 10, 405 - 414.
19. J. ORKISZ, *Interaction curves for multi-point equivalent cross-sections of elastic-plastic beams*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **10** (1962), 11, 451 - 460.
20. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Differential equations of elastic-plastic bending of beams with multi-point cross-sections*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **12** (1964), 4, 227 - 236.
21. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Skończone ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inż., **14** (1966), 4, 681 - 698.
22. M. RADWAŃSKA, Z. WASZCZYSZYN, *Obliczenia skończonych sprężysto-plastycznych ugięć prętów słabo zakrzywionych*, Rozpr. Inż., **20** (1972), 4, 479 - 496.
23. M. RADWAŃSKA, Z. WASZCZYSZYN, *Calculation of finite elastic-plastic deflections of weakly curved bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **21** (1973), 7 - 8, 333 - 340.
24. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Устойчивость равновесия упругих систем*, Гостехиздат, Москва 1955.
25. F. R. SHANLEY, *Inelastic column theory*, J. Aero. Sci., **14** (1947), 5, 261 - 268.
26. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, W-wa 1963.
27. J. M. T. THOMPSON, G. HUNT, *A general theory of elastic stability*, J. Wiley and Sons., London—N.Y.—Toronto 1973.
28. H. WAGNER, G. KIMM, *Bauelemente des Flugzeuges*, 2 wyd., 1942.
29. Z. WASZCZYSZYN, *Application of multi-point equivalent cross-sections to the calculation of finite deflections of elastic-plastic beams with stretchable axis*, Acta Mech., **3** (1967), 2, 219 - 235.
30. H. ZIEGLER, *On the concept of elastic stability*, Adv. Appl. Mech., **4** (1956), 351 - 403.
31. M. ŻYCZKOWSKI, *On axially symmetric elastic buckling of imperfect cylindrical shells under combined loadings*, Ch. Massonnet Volume, Liège, 1984, 387 - 396.
32. M. ŻYCZKOWSKI, *Combined loadings in the theory of plasticity*, PWN, W-wa 1981.
33. M. ŻYCZKOWSKI, *Podstawy analizy stateczności prętów sprężystych*, w książce pod redakcją Z. Waszczyszyna, Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Ossolineum, Wrocław, 1981, 7 - 80.
34. M. ŻYCZKOWSKI, A. ZABORSKI, *Creep rupture phenomena in creep buckling*, Proc. IUTAM Symposium Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies, Göteborg 1974, Springer 1975, 283 - 290.

## Р е з ю м е

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗГИБА, ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ И ТЕМПЕРАТУРЫ

Проблема стержня, подвергнутого действию изгиба, осевой силы и температуры в упруго-пластической области, на вид простая, встречает трудности при определении характеристик соединяющих обобщенные силы и обобщенные перемещения. В работе анализируются несколько моделей такого стержня касающихся деформируемых или жестких конечных элементов. Сравнение моделей проведено с точки зрения их использования к описанию трубчатого основания трубчатых решеток в теплообменниках и химических реакторах.

## S u m m a r y

## A COMPARATIVE ANALYSIS OF MODELS OF AN ELASTIC-PLASTIC BAR UNDER BENDING, AXIAL FORCE AND TEMPERATURE

Relatively easy problem of an elastic-plastic bar under simultaneous bending moment, axial force and temperature involves some difficulties when the relations between generalized loads and displacements are to be determined. Several models of the bar based on deformable as well as rigid finite elements are proposed and analysed. As a result of the comparative analysis a suitable mathematical model may be chosen to describe elastic-plastic behaviour of tubes constituting the foundation of tube sheets in heat exchangers and chemical reactors.

*Praca wpłynęła do Redakcji 20 września 1985 roku*

---