

O PRZYBLIŻONYM ROZWIĄZYWANIU JEDNOWYMIAROWYCH ZAGADNIĘĆ ODWROTNYCH PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

KRZYSZTOF GRYSA
HENRYK KAMIŃSKI

Politechnika Poznańska

Wstęp

W pracy [1] wyprowadzono stowarzyszone równania całkowe dla równania Helmholtza i pokazano ich zastosowania do rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. Przez zagadnienia odwrotne rozumie się przy tym zagadnienia wyznaczania strumienia ciepła lub temperatury na brzegu i wewnątrz pewnego obszaru $\Omega \subset E^m$, $m = 1, 2, 3$, na podstawie tzw. wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych lub strumieniowych, [1]. Z tego typu problemami można się spotkać w wielu dziedzinach techniki; doczekały się one także dosyć bogatej literatury (por. [8, 9, 10]). W niniejszej pracy omówiono trzy typy jednowymiarowych zagadnień odwrotnych, a mianowicie zagadnienia dotyczące warstwy płaskiej, kuli i warstwy kulistej oraz walca i warstwy walcowej. Do rozwiązywania tych zagadnień zastosowano równania całkowe wyprowadzone w pracy [1]. Równania te w wymienionych przypadkach można było rozwiązać w postaci zamkniętej, co pozwoliło otrzymać wzory rekurencyjne określające pewne układy funkcji, które stanowią przybliżone rozwiązania tych zagadnień. Analiza tych wzorów doprowadziła do interesujących wniosków dotyczących wpływu błędów danych na wyniki obliczeń. Wnioski te znalazły swoje potwierdzenie w przykładach liczbowych.

1. Pojęcia podstawowe

Zagadnienie rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego w pewnym obszarze $\Omega \times \hat{T}$, gdzie $\Omega \subset E^m$, $m = 1, 2, 3$, zaś $\hat{T} = (0, t_e)$, $t_e < +\infty$, jest pewnym przedziałem czasowym, można sprowadzić do zagadnienia rozwiązywania kolejno po sobie następujących równań Helmholtza w obszarze Ω . W tym celu w równaniu przewodnictwa cieplnego,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) T(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \hat{T}, \quad (1.1)$$

(w którym \varkappa oznacza współczynnik dyfuzyjności temperaturowej, T jest temperaturą względną, mierzoną od pewnej temperatury odniesienia, zaś $F = -Q/\lambda$, gdzie Q jest intensywnością źródła ciepła, a λ — współczynnikiem przewodnictwa cieplnego) należy w miejsce pochodnej $\partial\Theta/\partial t$ podstawić pierwszą różnicę wsteczną. Jeśli oznaczymy

$$t_k = \sum_{l=1}^k \tau_l, \Theta_k(x) \approx T(x, t_k), p_k = (\varkappa \tau_k)^{-1/2}, t_0 = 0, \quad (1.2)$$

$$f_k(x) = -p_k^2 \Theta_{k-1}(x) + \frac{1}{\tau_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(x, t) dt, t_K \equiv t_e = \sum_{l=1}^K \tau_l,$$

gdzie τ_k jest krokiem czasowym, to w chwili t_k można w miejsce równania (1.1) rozważać równanie Helmholtza postaci, [1],

$$(\nabla^2 - p_k^2) \Theta_k(x) = f_k(x), x \in \Omega. \quad (1.3)$$

Układ funkcji $\{\Theta_k\}_{k=1, \dots, K}$, otrzymanych w wyniku rozwiązania równania (1.3) dla $k = 1, \dots, K$, stanowić będzie przybliżone rozwiązanie równania (1.1).

Oczywiście oprócz równania (1.1) znany musi być także warunek początkowy oraz warunki brzegowe (w przypadku zagadnień początkowo-brzegowych, nazywanych także prostymi), lub tzw. wewnętrzne odpowiedzi, [1] (w przypadku zagadnień odwrotnych).

Niech funkcje $T_b(\xi, t)$ i $\hat{q}_b(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times \hat{T}$, określają odpowiednio temperaturę i jej pochodną normalną na brzegu $\partial\Omega$ rozważanego obszaru, tzn.

$$T_b(\xi, t) = \lim_{x \rightarrow \xi} T(x, t), \hat{q}_b(\xi, t) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\partial T(x, t)}{\partial n(\xi)}, x \in \Omega, t \in \hat{T}, \quad (1.4)$$

gdzie $n(\xi)$ jest normalną zewnętrzną do $\partial\Omega$. Niech funkcje $T^*(x^*, t)$ i $\hat{q}^*(x^*, t)$, $(x^*, t) \in \partial\Omega^* \times \hat{T}$, $\Omega^* \subset \Omega$, opisują odpowiednio wewnętrzne odpowiedzi temperaturową i strumieniową (w skrócie WOT I WOS), [1], spełniające warunki

$$T^*(x^*, t) = \lim_{x \rightarrow x^*} T(x, t), \hat{q}^*(x^*, t) = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{\partial T(x, t)}{\partial n(x^*)}, \quad (1.5)$$

gdzie $x \in \Omega \setminus \partial\Omega^*$, $t \in \hat{T}$, zaś $n(x^*)$ jest normalną zewnętrzną do $\partial\Omega^*$. Niech funkcja $\Theta_0(x)$, $x \in \Omega$, opisuje początkowy rozkład temperatury w obszarze Ω , tzn.

$$\Theta_0(x) = \lim_{t \rightarrow 0} T(x, t), \quad (1.6)$$

zaś funkcja $T_z(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times \hat{T}$ — temperaturę otoczenia.

Rozwiązując zagadnienia odwrotne przewodnictwa cieplnego przy wykorzystaniu równania (1.3) dla $k = 1, \dots, K$, posługiwać się będziemy pewnymi układami funkcji zmiennych przestrzennych, wprowadzonymi w miejsce T^* , \hat{q}^* , czy T_z , T_b i \hat{q}_b . Funkcje te będą określone następująco:

$$\begin{aligned} \Theta_{bk}(\xi) &= T_b(\xi, t_k), q_{bk}(\xi) = \hat{q}_b(\xi, t_k), \\ \Theta_{zk}(\xi) &= T_z(\xi, t_k), \Theta_k^*(x^*) = T^*(x^*, t_k), q_k^*(x^*) = \hat{q}^*(x^*, t_k), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$\xi \in \partial\Omega$, $x^* \in \partial\Omega^*$, $k = 1, \dots, K$. Gdy na brzegu $\partial\Omega$ będzie miała miejsce swobodna

wymiana ciepła ze współczynnikiem wymiany $\hat{\alpha}(\xi, t)$, to przy rozwiązywaniu równania (1.3) wprowadzimy zamiast funkcji $\hat{\alpha}$ układ funkcji

$$\alpha_k(\xi) = \hat{\alpha}(\xi, t_k), \quad \xi \in \partial\Omega, \quad k = 1, \dots, K. \quad (1.8)$$

W pracy [1] pokazano, że gdy obok równania (1.3) dana jest funkcja $\Theta_k^*(x^*)$, $x^* \in \partial\Omega^*$, wówczas rozwiązanie równania (1.3) istnieje w postaci

$$\Theta_k(x) = S_m(x, p_k|h_k) + V_m(x, p_k|f_k), \quad x \in \text{Int } \Omega = \Omega/\partial\Omega, \quad (1.9)$$

o ile istnieje funkcja h_k na $\partial\Omega$, która spełnia równanie

$$S_m(x^*, p_k|h_k) = \Theta_k^*(x^*) - V_m(x^*, p_k|f_k). \quad (1.10)$$

Tutaj, [1],

$$S_m(x, p|h) = \int_{\partial\Omega} G_m(x-\zeta, p)h(\zeta)dS(\zeta), \quad (1.11)$$

$$V_m(x, p|f) = - \int_{\Omega} G_m(x-y, p)f(y)dV(y), \quad x \in \Omega, \quad (1.12)$$

gdzie $m = 1, 2, 3$, oraz

$$G_m(x-y, p) = \begin{cases} \frac{1}{2p} e^{-p|x-y|} & \text{gdy } m = 1, \\ \frac{1}{2\pi} K_0(p|x-y|) & \text{gdy } m = 2, \\ \frac{1}{4\pi|x-y|} e^{-p|x-y|} & \text{gdy } m = 3. \end{cases} \quad (1.13)$$

Całka S_m nazywana jest potencjałem warstwy pojedynczej dla równania Helmholtza, całka V_m — potencjałem objętościowym, zaś funkcja G_m jest rozwiązaniem podstawowym równania (1.3), [1].

W pracy [1] pokazano także, że gdy obok równania (1.3) dana jest funkcja $q^*(x^*)$, $x^* \in \partial\Omega^*$, wówczas rozwiązanie tego równania istnieje w postaci (1.9), o ile istnieje funkcja h_k na $\partial\Omega$, która spełnia równanie

$$\frac{\partial S_m(x^*, p_k|h_k)}{\partial n(x^*)} = q^*(x^*) - \frac{\partial V_m(x^*, p_k|f_k)}{\partial n(x^*)}. \quad (1.14)$$

Równania (1.10) i (1.14) są dla $m = 2, 3$ całkowymi równaniami Fredholma, przy czym równanie (1.10) jest I rodzaju, zaś (1.14) może być równaniem I lub II rodzaju zależnie od tego, czy $\partial\Omega^*$ i $\partial\Omega$ mają część wspólną czy nie. W przypadku $m = 1$ równania (1.10) i (1.14) przyjmują postać układu równań algebraicznych (por. [1]).

W dalszych częściach pracy skupimy uwagę na rozwiązaniu równań (1.10) i (1.14) dla problemów jednowymiarowych. Przy opisie tych problemów współrzędne przestrzenne oznaczать będziemy literami łacińskimi lub greckimi bez podkreślenia.

2. Warstwa płaska

Niech obszar Ω będzie warstwą płaską, ograniczoną płaszczyznami $x = a$ i $x = b$. Ponieważ rozważamy zagadnienie jednowymiarowe, więc będziemy utożsamiać obszar Ω z odcinkiem $(a, b) \subset E^1$. Niech $\Omega^* = (x_d, x_g)$, przy czym $a \leq x_d < x_g \leq b$. Brzegi obszarów Ω i $\Omega^* \subset \Omega$ określone będą następująco: $\partial\Omega = \{a; b\}$, $\partial\Omega^* = \{x_d; x_g\}$.

Dla warstwy płaskiej rozważymy dwa typy zagadnień odwrotnych:

1° W punktach $x = x_d$ i $x = x_g$ dane są WOT:

2° W punkcie $x = x_d$ dana jest WOT, zaś w punkcie $x = x_g$ — WOS.

W obu przypadkach zakładamy, że znany jest warunek początkowy dla temperatury oraz że w obszarze Ω brak jest źródeł ciepła. Zakładamy także, że znane są współczynniki κ i λ . Współczynnik wymiany ciepła, $\hat{\alpha}$, nie jest znany, natomiast znana jest temperatura otoczenia.

Funkcjami poszukiwanymi są tutaj $T(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times \hat{T}$, $T_b(a, t)$, $T_b(b, t)$, $\hat{q}_b(a, t)$, $\hat{q}_b(b, t)$ oraz $\hat{\alpha}(a, t)$ i $\hat{\alpha}(b, t)$, $t \in \hat{T}$. Funkcjami danymi są $T^*(x_d, t)$ i $T^*(x_g, t)$ (w zagadnieniu 1°) lub $T^*(x_d, t)$ i $q^*(x_g, t)$ (w zagadnieniu 2°). Zamiast wyżej wymienionych funkcji posługiwać się będziemy układem funkcji $\{\Theta_k\}$ oraz układami wielkości $\{\Theta_k^a\}$, $\{\Theta_k^b\}$, $\{q_k^a\}$, $\{q_k^b\}$, $\{\alpha_k^a\}$, $\{\alpha_k^b\}$, oraz $\{\Theta_{dk}^*\}$, $\{\Theta_{gk}^*\}$ i $\{q_{gk}^*\}$, zdefiniowanych związkami:

$$\begin{aligned} \Theta_k^a &\equiv \Theta_{bk}(a), \Theta_k^b \equiv \Theta_{bk}(b), q_k^a \equiv q_{bk}(a), q_k^b \equiv q_{bk}(b), \\ q_{gk}^* &\equiv q_k^*(x_g), \alpha_k^a \equiv \alpha_k(a), \alpha_k^b \equiv \alpha_k(b), \Theta_{dk}^* \equiv \Theta_k^*(x_d), \Theta_{gk}^* \equiv \Theta_k^*(x_g). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Całki S_1 i V_1 oraz pochodna $\partial S_1 / \partial n$ mają tutaj postać, [1],

$$S_1(x, p|h) = \frac{1}{2p} [e^{-p(x-a)}h(a) + e^{-p(b-x)}h(b)], \quad x \in (a, b), \quad (2.2)$$

$$V_1(x, p|f) = -\frac{1}{2p} \int_a^b e^{-p|x-y|} f(y) dy, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial S_1(x, p|h)}{\partial n(x)} = -\frac{n(x)}{2} [e^{-p(x-a)}h(a) - e^{-p(b-x)}h(b)], \quad x \in (a, b), \quad (2.4)$$

gdzie $n(x) = +1$ lub -1 .

2.1. Przypadek dwóch WOT. Wykorzystując związki (2.2) i (2.3) można sprowadzić równanie (1.10) do postaci układu dwóch równań z niewiadomymi $h_k(a)$ i $h_k(b)$:

$$\begin{aligned} e^{-p_k(x_d-a)}h_k(a) + e^{-p_k(b-x_d)}h_k(b) &= 2p_k[\Theta_{dk}^* - V_1(x_d, p_k|f_k)], \\ e^{-p_k(x_g-a)}h_k(a) + e^{-p_k(b-x_g)}h_k(b) &= 2p_k[\Theta_{gk}^* - V_1(x_g, p_k|f_k)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Rozwiązując ten układ równań oraz wykorzystując związki (1.2)₄, (1.9), (2.2), (2.3) i (2.6) otrzymujemy następującą postać funkcji Θ_k :

$$\Theta_k(x) = \frac{\sinh[p_k(x_g - x)]}{\sinh(p_k l)} \left[\Theta_{dk}^* - \frac{p_k}{2} \int_a^b e^{-p_k|x_d - y|} \Theta_{k-1}(y) dy \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sinh[p_k(x-x_d)]}{\sinh(p_k l)} \left[\Theta_{\theta k}^* - \frac{p_k}{2} \int_a^b e^{-p_k|x_\theta-y|} \Theta_{k-1}(y) dy \right] + \\
& + \frac{p_k}{2} \int_a^b e^{-p_k|x-y|} \Theta_{k-1}(y) dy,
\end{aligned} \quad (2.6)$$

gdzie $l = x_g - x_d$, $x \in (a, b)$, $k = 1, \dots, K$.

Wielkości Θ_k^a i Θ_k^b można wyznaczyć bezpośrednio ze wzoru (2.6), kładąc w nim odpowiednio $x = a$ lub $x = b$. Podobnie, różniczkując wzór (2.6) i kładąc następnie $x = a$ lub $x = b$ można wyznaczyć wielkości q_k^a i q_k^b . Przy znanych funkcjach $T_z(a, t)$ i $T_z(b, t)$ współczynniki wymiany ciepła na brzegach $x = a$ i $x = b$ można wyznaczyć ze wzorów

$$\alpha_k^a = \lambda \frac{q_k^a}{\Theta_{zk}^a - \Theta_k^a}, \quad \alpha_k^b = \lambda \frac{q_k^b}{\Theta_{zk}^b - \Theta_k^b}, \quad (2.7)$$

gdzie $\Theta_{zk}^a = T_z(a, t_k)$, $\Theta_{zk}^b = T_z(b, t_k)$.

Wzór rekurencyjny (2.6) ma duże znaczenie dla identyfikacji temperatury w całej warstwie na podstawie WOT pochodzących np. z pomiarów. Wówczas jednak powstaje pytanie, jaki jest wpływ na błąd obliczeń takich wielkości jak odległość pomiędzy punktami, w których zadane są WOT, krok czasowy i dokładność pomiaru WOT.

W dalszych rozważaniach odcinek, zawarty pomiędzy punktami, w których dane są wewnętrzne odpowiedzi, nazwiemy b a z a zagadnienia odwrotnego i oznaczymy przez U .

Założmy, że WOT w punkcie $x_d \in (a, b)$, w chwili t_k obarczona jest błędem ε_{dk}^* , oraz że funkcja $T^*(x_g, t_k)$ obarczona jest błędem ε_{gk}^* . Dla uproszczenia przyjmijmy, że $x_g = b$, zaś bazę (x_d, b) oznaczymy U^R . Błąd obliczeń temperatury Θ_k , który oznaczymy $\varepsilon_k(x)$, będzie zatem spowodowany błędami ε_{dk}^* , ε_{gk}^* oraz błędem $\varepsilon_{k-1}(x)$, gdzie $k = 1, \dots, K$. Wykorzystując (2.6) otrzymujemy następującą postać błędu ε_k :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k(x) &= \frac{\sinh[p_k(b-x)]}{\sinh(p_k l)} \left[\varepsilon_{dk}^* - \frac{p_k}{2} \hat{\varepsilon}_{k-1} \int_a^b e^{-p_k|x_d-y|} dy \right] + \\
& + \frac{\sinh[p_k(x-x_d)]}{\sinh(p_k l)} \left[\varepsilon_{gk}^* - \frac{p_k}{2} \hat{\varepsilon}_{k-1} \int_a^b e^{-p_k|b-y|} dy \right] + \\
& + \frac{p_k}{2} \hat{\varepsilon}_{k-1} \int_a^b e^{-p_k|x-y|} dy,
\end{aligned} \quad (2.8)$$

gdzie $\hat{\varepsilon}_{k-1}$ jest wartością średnią błędu $\varepsilon_{k-1}(x)$, $x \in (a, b)$ (por. [2], rozdz. 4.7). Położmy

$$L = b - a, \quad P_k = p_k L = \frac{b-a}{\sqrt{\kappa \tau_k}}, \quad u = \frac{l}{L} = \frac{x_g - x_d}{b-a}, \quad (2.9)$$

gdzie u jest bezwymiarową długością bazy U ; $u \in (0, 1)$. Długość bazy $U^R = (x_d, b)$ oznaczymy u^R .

Policzmy wartość funkcji $\varepsilon_k(x)$ w punkcie $x = a$ (punkt najbardziej oddalony od bazy U^R). Wobec (2.9) otrzymujemy

$$\varepsilon_k(a) = \frac{\sinh P_k}{\sinh(P_k u^R)} \varepsilon_{dk}^* - \frac{\sinh[P_k(1-u^R)]}{\sinh(P_k u^R)} \varepsilon_{gk}^* - \left[\frac{\sinh P_k - \sinh[P_k(1-u^R)]}{\sinh(P_k u^R)} - 1 \right] \hat{\varepsilon}_{k-1}. \quad (2.10)$$

Łatwo można sprawdzić, że dla $u^R \in (0, 1)$ i $P_k > 0$ współczynnik przy ε_{dk}^* jest większy od współczynników stojących przy ε_{gk}^* i $\hat{\varepsilon}_{k-1}$, przy czym im większa jest wartość P_k tym bliższy jedynki jest stosunek współczynnika przy ε_{dk}^* do współczynnika przy $\hat{\varepsilon}_{k-1}$. Wynikają z tego następujące wnioski:

- średni błąd z chwili t_{k-1} , $\hat{\varepsilon}_{k-1}$, odgrywa mniejszą rolę przy obliczaniu błędu $\varepsilon_k(a)$ niż błąd ε_{dk}^* ,
- im krótszy krok czasowy τ_k , tzn. im większe P_k , tym większy jest wpływ błędu $\hat{\varepsilon}_{k-1}$ na błąd $\varepsilon_k(a)$.

Przeanalizujmy teraz wpływ błędów ε_{dk}^* i $\varepsilon_{d,k-1}^*$ na $\varepsilon_k(a)$. Jeśli $\varepsilon_{gk}^* = 0$, to wykorzystując wzór (2.6) i zakładając, że $P_k = P_{k-1} \equiv P$ dla $k = 2, \dots, K$, otrzymujemy

$$\varepsilon_k(a) = \frac{\sinh P}{\sinh(P u^R)} \varepsilon_{dk}^* + \frac{P \sinh P}{2 \sinh(P u^R)} [u^R \operatorname{ctgh}(P u^R) - \operatorname{ctgh} P] \varepsilon_{d,k-1}^* \quad (2.11)$$

Pominięto tu składnik zawierający $\hat{\varepsilon}_{k-2}$, jako nieistotny, [3]. Aby obliczenia, prowadzone przy wykorzystaniu wzoru (2.6), były stabilne numerycznie, wpływ błędu $\varepsilon_{d,k-1}^*$ na $\varepsilon_k(a)$ powinien być mniejszy niż wpływ błędu ε_{dk}^* . Przy danym P najmniejsza wielkość bazy U^R , dla której to zachodzi, może zostać wyznaczona z nierówności

$$-2 < P[u^R \operatorname{ctgh}(P u^R) - \operatorname{ctgh} P] < 2. \quad (2.12)$$

Najmniejszą wartość u^R , dla której spełniona jest nierówność (2.12) dla danego P , oznaczmy u_+^R , zaś samą bazę U_+^R .

Prowadząc podobne rozważania dla bazy $U^L = (a, x_g)$ o długości u^L , jako warunek stabilności numerycznej obliczeń także otrzymujemy nierówność (2.12). Wynika stąd, że $u_+^L = u_+^R$, gdzie u_+^L jest najmniejszą długością bazy U^L , dla której spełniona jest nierówność (2.12) przy danym P . Dla dużych P , co w praktyce oznacza $P \geq 5$, można napisać następujący przybliżony wzór na u_+^R :

$$u_+^R \approx (P-2)/P. \quad (2.13)$$

Wnioski z nierówności (2.12) są następujące:

- wielkość u_+^R dąży do 1 gdy P dąży do nieskończoności, tzn. gdy krok czasowy dąży do zera,
- przy ustalonej długości u^R bazy U^R współczynniki przy ε_{dk}^* i przy $\varepsilon_{d,k-1}^*$ rosną co do wartości bezwzględnej wraz ze wzrostem P ,
- współczynniki przy ε_{dk}^* i $\varepsilon_{d,k-1}^*$ mają przeciwne znaki, a więc jeśli będą one tego samego rzędu, to błąd $\varepsilon_k(a)$ będzie oscylował wokół zera.

Jak wynika z powyższego, prowadzenie obliczeń z małym krokiem czasowym (duże P) wymaga bardzo dokładnych danych opisujących WOT, przy czym muszą one być tym dokładniejsze im mniejsza jest bezwymiarowa długość bazy zagadnienia odwrotnego.

Niespełnienie przez długość u^R bazy U^R nierówności (2.12) nie oznacza niemożności wyznaczenia rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Przypadek taki oznacza tylko bardzo duży wpływ błędów danych na wynik obliczeń.

Gdy znane są wielkości u_+^R i u_+^L , można także wyznaczyć długość u_+ bazy $U = (x_d, x_g)$, dla której obliczenia dotyczące temperatury będą stabilne. Przypadku tego dotyczy wzór

$$u_+ = u_+^R u_+^L / (u_+^R - u_+^R u_+^L + u_+^L). \quad (2.14)$$

2.2. Przypadek WOT i WOS. Wykorzystując związki (2.2), (2.3) oraz (1.10) i (1.14) można ten problem sprowadzić do zagadnienia rozwiązania układu dwóch równań algebraicznych z niewiadomymi $h_k(a)$ i $h_k(b)$:

$$\begin{aligned} e^{-p_k(x_d-a)}h_k(a) + e^{-p_k(b-x_d)}h_k(b) &= 2p_k[\Theta_{dk}^* - V_1(x_d, p_k|f_k)], \\ e^{-p_k(x_g-a)}h_k(a) - e^{-p_k(b-x_g)}h_k(b) &= -2\left[q_{gk}^* - \frac{\partial V_1(x_g, p_k|f_k)}{\partial x}\right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Rozwiązując ten układ równań, a następnie wykorzystując związki (1.2)₄, (1.9), (2.2) i (2.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Theta_k(x) &= \frac{\cosh[p_k(x_g-x)]}{\cosh(p_k l)} \left[\Theta_{dk}^* - \frac{p_k}{2} \int_a^b e^{-p_k|x_d-y|} \Theta_{k-1}(y) dy \right] + \\ &+ \frac{\sinh[p_k(x-x_d)]}{p_k \cosh(p_k l)} \left[q_{gk}^* - \frac{p_k^2}{2} \int_a^b \operatorname{sgn}(x_g-x) e^{-p_k|x_g-y|} \Theta_{k-1}(y) dy \right] + \\ &+ \frac{p_k}{2} \int_a^b e^{-p_k|x-y|} \Theta_{k-1}(y) dy, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$x \in (a, b)$, $k = 1, \dots, K$.

Wielkości Θ_k^a , Θ_k^b , q_k^a i q_k^b można łatwo wyznaczyć ze wzoru (2.16), zaś współczynniki wymiany ciepła na brzegach $x = a$ i $x = b$ — ze wzorów (2.7) (o ile znane są funkcje $T_z(a, t)$ i $T_z(b, t)$).

Jeśli założymy, że WOT i WOS obarczone są błędami, odpowiednio, ε_{dk}^* i ε_{gk}^* , i skupimy uwagę na wpływach błędów z chwil t_k i t_{k-1} na błędy obliczeń w punktach a i b (końcach przedziału (a, b)), to przy założeniu, że $P_k = P_{k-1} \equiv P$ dla $k = 2, \dots, K$, otrzymujemy (por. (2.9))

— dla bazy $U = U^R$ i przy $\varepsilon_{gl}^* = 0$, $l = 1, \dots, K$

$$\varepsilon_k(a) = \frac{\cosh P}{\cosh(Pu^R)} \varepsilon_{dk}^* + \frac{P \cosh P}{2 \cosh(Pu^R)} [u^R \operatorname{tgh}(Pu^R) - \operatorname{tgh} P] \varepsilon_{d,k-1}^*, \quad (2.17)$$

— dla bazy $U = U^L$ i przy $\varepsilon_{dl}^* = 0$, $l = 1, \dots, K$

$$\varepsilon_k(b) = \frac{\sinh P}{P \cosh(Pu^L)} L \varepsilon_{gk}^* + \frac{\sinh P}{2 \cosh(Pu^L)} \left[u^L \operatorname{tgh}(Pu^L) + \frac{1}{P} - \operatorname{ctgh} P \right] \varepsilon_{g,k-1}^*. \quad (2.18)$$

Pominięto tutaj składnik zawierający $\hat{\varepsilon}_{k-2}$, [3].

Warunkiem koniecznym stabilności numerycznej rozwiązania zagadnienia odwrotnego, danego wzorem (2.16), jest spełnienie przez długości u^L i u^R baz U^L i U^R następujących nierówności:

$$-2 < P[u^R \operatorname{tgh}(Pu^R) - \operatorname{tgh}P] < 2, \quad (2.19)$$

$$-2 < P \left[u^L \operatorname{tgh}(Pu^L) + \frac{1}{P} - \operatorname{ctgh}P \right] < 2. \quad (2.20)$$

Dla dużych P (większych od 5) wielkość u_+^R można wyznaczyć ze wzoru (2.13), zaś wielkość u_+^L — ze związku

$$u_+^L \approx (P-3)/P. \quad (2.21)$$

W przypadku bazy U wielkość u_+ wyznacza się ze wzoru (2.14).

3. Kula

Niech obszar $\Omega \subset E^3$ będzie kulą o promieniu R , zaś obszar $\Omega^* \subset \Omega$ — kulą o promieniu $r^* < R$. Ponieważ rozważamy zagadnienie jednowymiarowe, więc wszystkie rozważane funkcje będą zależeć tylko od odległości od środka kuli (i od czasu).

Całki S_3 i V_3 można w tym przypadku rozważać dla punktów x o współrzędnych $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = r$, $r \in (0, R)$, zaś powierzchnię kuli można sparametryzować przy pomocy dwóch kątów, kładąc $\xi_1 = R \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2$, $\xi_2 = R \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2$, $\xi_3 = R \cos \vartheta_1$, gdzie $\vartheta_1 \in [0, 2\pi)$, $\vartheta_2 \in [0, \pi)$. Ponieważ gęstość h potencjału S_3 zależy tylko od wartości promienia kuli na jej brzegu, więc jest po prostu liczbą, którą oznaczymy h_R . Stąd

$$S_3(x, p|h) = h_R \frac{R \sinh(pr)}{p r e^{pR}}, \quad (3.1)$$

$$V_3(x, p|f) = -\frac{1}{pr} \left\{ e^{-pr} \int_0^r z \sinh(pz) f(z) dz + \sinh(pr) \int_0^r z e^{-pz} f(z) dz \right\} \equiv V(r, p|f). \quad (3.2)$$

Dla kuli rozważymy następujące zagadnienie odwrotne.

Dana jest WOT w punkcie $r = r^*$ (punkt ten utożsamiamy ze sferą $r = r^*$). Znając warunki początkowe dla temperatury w obszarze Ω oraz współczynnik dyfuzyjności temperaturowej κ , wyznaczyć należy temperaturę wnętrza i brzegu kuli przy braku źródeł ciepła w jej wnętrzu. Funkcją poszukiwaną jest $T(r, t)$, $(r, t) \in (0, R) \times (0, t_c)$, oraz $T(R, t) \equiv T_b(t)$. W miejsce tych funkcji poszukujemy układu funkcji $\{\Theta_k\}$, określonych wzorem (1.2)₂.

Gęstość h_R potencjału S_3 , określonego wzorem (3.1), wyznaczmy z równania (1.10). Wykorzystując (1.2)₄ i (3.1), a następnie (1.9), otrzymujemy

$$\Theta_k(r) = \frac{r^* \sinh(p_k r)}{r \sinh(p_k r^*)} [\Theta_k^* + p_k^2 V(r^*, p_k | \Theta_{k-1})] - p_k^2 V(r, p_k | \Theta_{k-1}), \quad (3.3)$$

$k = 1, \dots, K$. Układ funkcji $\{\Theta_k\}$ stanowi przybliżone rozwiązanie zagadnienia odwrotnego. Przybliżone wartości funkcji $T_b(t)$ w chwilach t_k określonych wzorem (1.2)₁ można uzyskać bezpośrednio ze wzoru (3.3).

4. Warstwa kulista

Niech obszar $\Omega \subset E^3$ będzie warstwą kulistą o promieniu wewnętrznym a i zewnętrznym b , zaś obszar $\Omega^* \subset \Omega$ — warstwą kulistą o promieniu zewnętrznym r_g oraz wewnętrznym r_d , gdzie $0 < a \leq r_d < r_g \leq b$. Zakładamy, że wszystkie rozważane funkcje zależą tylko od odległości r od środka kuli; $r \in (a, b)$.

Całki S_3 i V_3 rozważymy także i w tym przypadku tylko dla punktów x o współrzędnych $(0, 0, r)$. Otrzymujemy tutaj

$$S_3(x, p|h) = h_a \frac{a \sinh(pr)}{pr e^{pa}} + h_b \frac{b \sinh(pr)}{pr e^{pb}}, \quad (4.1)$$

$$V_3(x, p|f) = -\frac{1}{pr} \left\{ e^{-pr} \int_a^r z \sinh(pz) f(z) dz + \sinh pr \int_r^b z e^{-pz} f(z) dz \right\} \equiv V_s(r, p|f), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial S_3(x, p|h)}{\partial n(x)} = n(r) \left\{ h_b \frac{b [pr \cosh(pr) - \sinh(pr)]}{pr^2 e^{pb}} - h_a \frac{a \sinh(pa) (1+pr)}{pr^2 e^{pa}} \right\}. \quad (4.3)$$

Tutaj $n(r)$ może przyjmować wartość $+1$ lub -1 ; $h_a \equiv h(a)$, $h_b \equiv h(b)$.

Dla warstwy kulistej rozważymy dwa zagadnienia odwrotne, w których znając warunki początkowe dla temperatury w całym obszarze Ω oraz współczynnik κ należy wyznaczyć temperaturę wnętrza i obu powierzchni warstwy, gdy

1° w punktach $r = r_d$ i $r = r_g$ dane są WOT,

2° w punkcie $r = r_d$ dana jest WOT, zaś w punkcie $r = r_g$ — WOS.

W obu przypadkach zakładamy brak źródeł ciepła w obszarze.

4.1. Przypadek dwóch WOT. Wykorzystując związki (4.1) i (4.2) można przekształcić równanie całkowe (1.10) w układ dwóch równań algebraicznych z niewiadomymi h_a i h_b . Rozwiązując ten układ i wykorzystując (1.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Theta_k(r) = & [\Theta_{dk}^* + p_k^2 V_s(r_d, p_k | \Theta_{k-1})] \frac{r_d \sinh[p_k(r_g - r)]}{r \sinh(p_k l)} + \\ & + [\Theta_{gk}^* + p_k^2 V_s(r_g, p_k | \Theta_{k-1})] \frac{r_g \sinh[p_k(r - r_d)]}{r \sinh(p_k l)} - p_k^2 V_s(r, p_k | \Theta_{k-1}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdzie $l = r_g - r_d$, $r \in (a, b)$, $k = 1, \dots, K$. Wielkości $\Theta_k(a)$ i $\Theta_k(b)$ można wyznaczyć bezpośrednio ze wzoru (4.4). Podobnie, dokonując różniczkowania funkcji Θ_k po r i mnożąc wynik przez $n(a) = -1$ lub przez $n(b) = 1$ można wyznaczyć $q_k(a)$ i $q_k(b)$. Przy znanych funkcjach $T_z(a, t)$ i $T_z(b, t)$ współczynniki wymiany ciepła na brzegach $r = a$ i $r = b$ można wyznaczyć ze wzorów (2.7).

Analiza wpływu błędów wewnętrznych odpowiedzi na błąd obliczeń temperatury w punktach brzegowych jest analogiczna do analizy przedstawionej w punkcie 3.1 pracy i prowadzi również do nierówności (2.12) jako warunku stabilności numerycznej obliczeń temperatury.

4.2. Przypadek WOT i WOS. Postępując podobnie jak w poprzednich przypadkach otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Theta_k(r) = & \frac{r_d \{p_k r_g \cosh[p_k(r_g - r)] - \sinh[p_k(r_g - r)]\}}{r \{p_k r_g \cosh(p_k l) - \sinh(p_k l)\}} [\Theta_{dk}^* + p_k^2 V_s(r_d, p_k | \Theta_{k-1})] + \\ & + \frac{r_g \sinh[p_k(r - r_d)]}{r \{p_k r_g \cosh(p_k l) - \sinh(p_k l)\}} [r_g q_{gk}^* + r_g p_k^2 \hat{V}_s(r_g, p_k | \Theta_{k-1})] - p_k^2 V_s(r, p_k | \Theta_{k-1}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{V}_s(r, p | f) = & \frac{1}{pr^2} \left\{ e^{-pr}(1 + pr) \int_0^r z \sinh(pz) f(z) dz + \right. \\ & \left. + [\sinh(pr) - pr \cosh(pr)] \int_r^b z e^{-pz} f(z) dz \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Analiza wpływu błędów wewnętrznych odpowiedzi z chwil t_k i t_{k-1} na błędy obliczeń temperatury na obu powierzchniach warstwy prowadzi do wniosków podobnych jak w części 2.2 pracy.

5. Walec

Niech obszar $\Omega \subset E^3$ będzie walcem o promieniu R , zaś obszar $\Omega^* \subset \Omega$ — walcem o promieniu $r^* < R$. W tym przypadku do zbudowania reprezentacji całkowitej przybliżonego rozwiązania zagadnienia odwrotnego wystarczy znajomość całek S_2 i V_2 . Rozważać je będziemy dla punktów x o współrzędnych $x_1 = r$, $x_2 = 0$, $r \in (0, R)$, $x \in E^2$, leżących w dowolnym przekroju walca prostopadłym do jego osi. Punkty brzegowe tego przekroju można sparametryzować przy pomocy jednego kąta, kładąc $\xi_1 = R \cos \vartheta$, $\xi_2 = R \sin \vartheta$, $\xi \in E^2$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Ponieważ gęstość h potencjału S_2 zależy tylko od wartości promienia walca na jego brzegu, więc jest ona po prostu liczbą, którą oznaczymy h_R . Wykorzystując wzór 8.4313 z tablic [4], związki 9.191 i 9.351 z monografii [5] oraz tw. Fubinię ([2], rozdz. 4.68) znajdujemy

$$\begin{aligned} S_2(x, p | h) = & Rh_R K_0(pR) I_0(pr), \\ V_2(x, p | f) = & - \left\{ K_0(pr) \int_0^r z I_0(pz) f(z) dz + I_0(pr) \int_r^R z K_0(pz) f(z) dz \right\} \equiv V_w(r, p | f), \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie $I_\nu(y)$ i $K_\nu(y)$ są to zmodyfikowane funkcje Bessela, [6].

W przypadku walca gdy dana jest WOT w punkcie $r = r^*$, to przy znanym warunku początkowym i współczynniku κ oraz przy braku źródeł ciepła znajdujemy — postępując analogicznie jak w poprzednich przypadkach — następującą postać funkcji Θ_k , określającej w sposób przybliżony pole temperatury w walcu w chwili t_k , $k = 1, \dots, K$:

$$\Theta_k(r) = \frac{I_0(pr)}{I_0(pr^*)} [\Theta_k^* + p_k^2 V_w(r^*, p_k | \Theta_{k-1})] - p_k^2 V_w(r, p_k | \Theta_{k-1}). \quad (5.2)$$

6. Warstwa walcowa

Niech obszar $\Omega \subset E^3$ będzie warstwą walcową o promieniu wewnętrznym a oraz zewnętrznym b , zaś obszar $\Omega^* \subset \Omega$ — warstwą walcową o promieniach: wewnętrznym r_d i zewnętrznym r_g , gdzie $0 < a \leq r_d < r_g \leq b$. W tym przypadku całki S_2 i V_2 , rozważane dla punktów $x = (r, 0) \in E^2$, przyjmują postacie następujące:

$$S_2(x, p|h) = bh_b K_0(pb) I_0(pr) + ah_a K_0(pr) I_0(pa),$$

$$V_2(x, p|f) = - \left\{ K_0(pr) \int_a^r z I_0(pz) f(z) dz + I_0(pr) \int_r^b z k_0(pz) f(z) dz \right\} = V_c(r, p|f). \quad (6.1)$$

Ponadto

$$\frac{\partial S_2(x, p|h)}{\partial n(x)} = n(r)p \{bh_b K_0(pb) I_1(pr) - ah_a K_1(pr) I_0(pa)\}. \quad (6.2)$$

gdzie $n(r)$ może przyjmować wartość $+1$ lub -1 .

Dla warstwy walcowej rozważymy dwa zagadnienia odwrotne, sformułowane podobnie jak dla warstwy kulistej (por. część 4 pracy).

6.1. Przypadek dwóch WOT. Wykorzystując związek (6.1) można przekształcić równanie całkowe (1.10) w układ równań algebraicznych z niewiadomymi h_a i h_b . Rozwiązując ten układ i wykorzystując związek (1.9) otrzymujemy

$$\Theta_k(r) = [\Theta_{dk}^* + p_k^2 V_c(r_d, p_k | \Theta_{k-1})] \frac{M_k(r, r_g)}{M_k(r_d, r_g)} +$$

$$+ [\Theta_{gk}^* + p_k^2 V_c(r_g, p_k | \Theta_{k-1})] \frac{M_k(r_d, r)}{M_k(r_d, r_g)} - p_k^2 V_c(r, p_k | \Theta_{k-1}), \quad (6.3)$$

gdzie

$$M_k(x, y) = I_0(p_k x) K_0(p_k y) - I_0(p_k y) K_0(p_k x). \quad (6.4)$$

Analizy wpływu błędów WOT na błędy obliczeń temperatury w warstwie prowadzi do wniosków podobnych do przedstawionych w części 2 pracy. W przypadku, gdy $a \gg 1$, wzór (6.3) można przekształcić do następującej postaci przybliżonej:

$$\Theta_k(r) \approx \left[\Theta_{dk}^* - \frac{p_k}{2} \int_a^b \sqrt{\frac{z}{r_d}} e^{-p_k |r_d - z|} \Theta_{k-1}(z) dz \right] \sqrt{\frac{r_a}{r}} \frac{\sinh[p_k(r_g - r)]}{\sinh(p_k l)} +$$

$$+ \left[\Theta_{gk}^* - \frac{p_k}{2} \int_a^b \sqrt{\frac{z}{r_g}} e^{-p_k |r_g - z|} \Theta_{k-1}(z) dz \right] \sqrt{\frac{r_g}{r}} \frac{\sinh[p_k(r - r_d)]}{\sinh(p_k l)} +$$

$$+ \frac{p_k}{2} \int_a^b \sqrt{\frac{z}{r}} e^{-p_k |r - z|} \Theta_{k-1}(z) dz. \quad (6.5)$$

Wprowadzając do wzoru (6.5) $x = r - a$ łatwo można pokazać, że gdy $a \rightarrow \infty$, wzór (6.5) przechodzi w (2.6).

6.2. Przypadek WOT i WOS. Wykorzystując związki (1.10) i (1.14) oraz (6.1) i (6.2), a następnie związek (1.9), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Theta_k(r) = & [\Theta_{dk}^* + p_k^2 V_c(r_d, p_k | \Theta_{k-1})] \frac{N_k(r, r_d)}{N_k(r_d, r_d)} + \\ & + \left[\frac{1}{p_k} q_{gk}^* + p_k^2 \hat{V}_c(r_d, p_k | \Theta_{k-1}) \right] \frac{M_k(r, r_d)}{N_k(r_d, r_d)} - p_k^2 V_c(r, p_k | \Theta_{k-1}). \end{aligned} \quad (6.6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} N_k(x, y) = & I_0(p_k x) K_1(p_k y) + K_0(p_k x) I_1(p_k y), \\ \hat{V}_c(r, p | f) = & K_1(pr) \int_a^r z I_0(pz) f(z) dz - I_1(pr) \int_r^b z K_0(pz) f(z) dz. \end{aligned} \quad (6.7)$$

W przypadku, gdy $a \gg 1$, wzór (6.6) można zapisać w postaci przybliżonej:

$$\begin{aligned} \Theta_k(r) \approx & \left[\Theta_{dk}^* - \frac{p_k}{2} \int_a^b \sqrt{\frac{z}{r_d}} e^{-p_k |r_d - z|} \Theta_{k-1}(z) dz \right] \sqrt{\frac{r_d}{r}} \frac{\cosh[p_k(r_d - r)]}{\cosh(p_k l)} - \\ & - \left[q_{gk}^* + \frac{p_k^2}{2} \int_a^b \sqrt{\frac{z}{r_g}} \operatorname{sgn}(r_g - z) e^{-p_k |r_g - z|} \Theta_{k-1}(z) dz \right] \sqrt{\frac{r_g}{r}} \frac{\sinh[p_k(r - r_d)]}{p_k \cosh(p_k l)} + \\ & + \frac{p_k}{2} \int_a^b \sqrt{\frac{z}{r}} e^{-p_k |r - z|} \Theta_{k-1}(z) dz. \end{aligned} \quad (6.8)$$

7. Jednowymiarowe zagadnienia ustalone

Przejsie do ustalonych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego uzyskuje się, kładąc we wzorach przedstawionych w poprzednich częściach pracy $p_k = 0$. Dla ustalonych zagadnień otrzymujemy stąd następujące postaci rozwiązań:

a) warstwa płaska, przypadek dwóch WOT (por. (2.6))

$$\Theta(x) = \Theta_d^* \frac{x_g - x}{l} + \Theta_g^* \frac{x - x_d}{l}, \quad x \in (a, b);$$

b) warstwa płaska, przypadek WOT i WOS (por. (2.16))

$$\Theta(x) = \Theta_d^* + (x - x_d) q_g^*, \quad x \in (a, b);$$

c) warstwa kulista, przypadek dwóch WOT (por. (4.4))

$$\Theta(r) = \Theta_d^* \frac{r_d(r_g - r)}{r(r_g - r_d)} + \Theta_g^* \frac{r_g(r - r_d)}{r(r_g - r_d)}, \quad r \in (a, b);$$

d) warstwa kulista, przypadek WOT i WOS (por. (4.5))

$$\Theta(r) = \Theta_d^* + q_g^* \frac{r_g^2(r - r_d)}{r \cdot r_d}, \quad r \in (a, b);$$

e) warstwa walcowa, przypadek dwóch WOT (por. (6.3))

$$\Theta(r) = \Theta_d^* \frac{\ln(r/r_g)}{\ln(r_d/r_g)} + \Theta_g^* \frac{\ln(r_d/r)}{\ln(r_d/r_g)}, \quad r \in (a, b):$$

f) warstwa walcowa, przypadek WOT i WOS (por. (6.6))

$$\Theta(r) = \Theta_d^* + q_g^* r_g \ln \frac{r}{r_d}, \quad r \in (a, b).$$

8. Przykłady liczbowe

W celu zilustrowania możliwości wykorzystania wzorów przedstawionych w pracy, dokonano obliczeń numerycznych, dotyczących identyfikacji temperatury brzegów i wnętrza warstwy płaskiej na podstawie wzorów (2.6) i (2.16). Dla obu przypadków w pierwszym etapie wyznaczono numerycznie rozwiązania pewnych zagadnień początkowo-brzegowych (prostych). Wyniki obliczeń, dotyczące punktów wewnętrznych warstwy, zostały następnie wykorzystane do dalszych obliczeń jako WOT, przy czym w celu sprawdzenia efektywności wzorów (2.6) i (2.16) wprowadzono je do dalszych obliczeń bądź w postaci bezpośrednio otrzymanej z rozwiązania zagadnienia prostego („dane dokładne”), bądź w postaci obciążonej celowo wprowadzonymi błędami („dane zafalszowane”).

8.1. Obliczenia wykorzystujące wzór (2.6). Zagadnienie proste rozwiązano w oparciu o następujące dane bezwymiarowe: $a = 0$, $b = 1$, $T_z(a, t) = 2$, $T_z(b, t) = 10 - 10t$, $t \in (0, 1)$. Bezwymiarowe współczynniki wymiany ciepła (liczby Biota) miały postać:

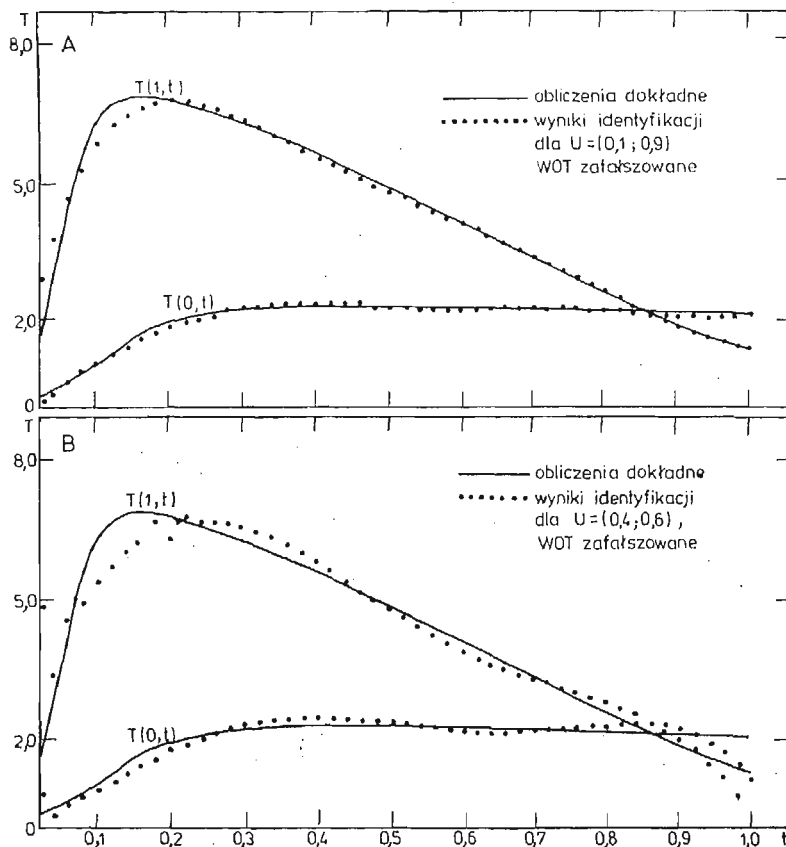
$$\alpha_k^a \equiv Bi_k(0) = 1 + 2 [\Theta_{k-1}(a)]^2, \quad \alpha_k^b \equiv Bi_k(1) = 1 + \Theta_{k-1}(b).$$

Warunki początkowe przyjęto zerowe.

Tablica 1. Niektóre dokładne i zafalszowane WOT wykorzystane w obliczeniach, prowadzonych z bezwymiarowym krokiem czasowym równym 0.02

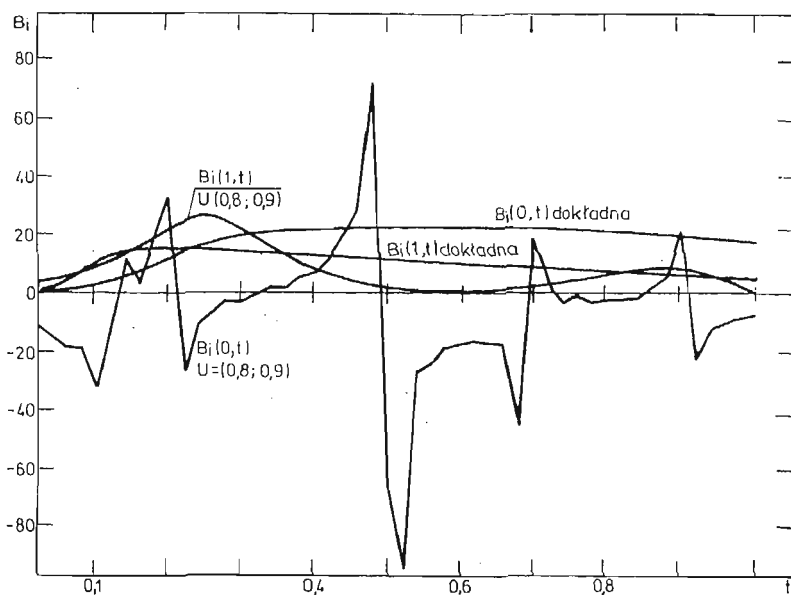
t	$T(0.1, t)$		$T(0.2, t)$		$T(0.8, t)$		$T(0.9, t)$	
	dokł.	zafalsz.	dokł.	zafalsz.	dokł.	zafalsz.	dokł.	zafalsz.
0.02	0.1437	0.1069	0.0742	0.1182	0.3128	0.8294	0.6329	1.2425
0.04	0.2760	0.2577	0.1777	0.2669	0.9418	1.5657	1.6802	2.2887
0.06	0.4162	0.4394	0.3096	0.4391	1.7650	2.2157	2.8752	3.1607
0.08	0.5831	0.6407	0.4792	0.6284	2.6028	2.7857	3.9284	3.8788
0.10	0.7855	0.8523	0.6905	0.8291	3.3274	3.2817	4.7081	4.4615
0.14	1.2691	1.2765	1.2079	1.2449	4.3227	4.0743	5.5593	5.2874
0.18	1.7229	1.6666	1.7340	1.6527	4.8522	4.6364	5.8630	5.7562
0.22	2.0527	1.9961	2.1587	2.0274	5.1111	5.0063	5.9207	5.9641
0.30	2.4230	2.4365	2.6747	2.6144	5.2372	5.3027	5.7663	5.8879
0.50	2.6107	2.6003	2.9345	3.0043	4.6240	4.6277	4.7931	4.7290
0.70	2.4584	2.4638	2.6863	2.6179	3.4590	3.4281	3.4195	3.4560
0.90	2.2203	2.2009	2.3170	2.3885	2.2722	2.3056	2.1019	2.0682
0.98	2.1209	2.1194	2.1666	2.1365	1.8392	1.8176	1.6315	1.6405
1.00	2.0963	2.1399	2.1297	2.0154	1.7367	1.6841	1.5210	1.5727

Rozwiązując zagadnienie odwrotne wyznaczono nie tylko rozkład temperatur w przedziale $[0, 1]$, lecz także odtworzono liczby Biota na obu brzegach warstwy ($Bi(0)$ i $Bi(1)$). Obliczeń dokonano dla następujących baz: $(0.1, 0.9)$, $(0.4, 0.6)$, $(0.8, 0.9)$, $(0.1, 0.2)$, przy czym brano do obliczeń WOT dokładne i WOT zafałszowane. Niektóre dokładne i zafałszowane WOT przedstawiono w tabelicy 1.

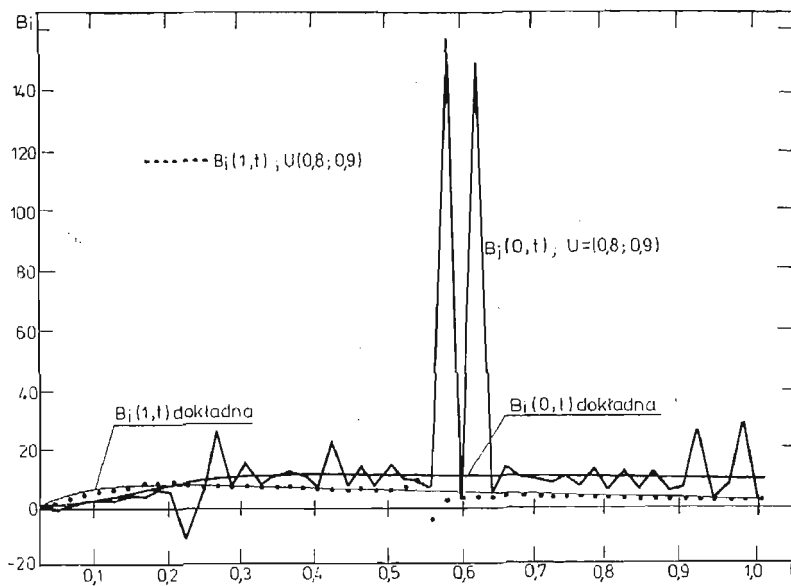


Rys. 1. Temperatury brzegów $x = 0$ $x = 1$ warstwy, zidentyfikowane na podstawie różnych par WOT

Z obliczeń dotyczących temperatur brzegów warstwy wynika, że lepiej zidentyfikowana jest temperatura na tym brzegu, który jest bliżej bazy. Ponieważ parametr P był równy 7.071 (co odpowiada stałemu bezwymiarowemu krokowi czasowemu równemu 0.02), więc $u_+^L = u_+^R = 0.717$ oraz $u_+ = 0.559$ (por. (2.13) i (2.14)). Tylko długość bazy $(0.1, 0.9)$ jest większa od u_+ — i dla tej bazy otrzymano najlepsze wyniki (por. rys. 1a). W przypadku pozostałych baz długość ich była mniejsza od u_+ , co natychmiast odbiło się na wynikach. Jednakże w punkcie brzegowym bliższym bazie otrzymywano zawsze wyniki lepsze niż w punkcie brzegowym bardziej od bazy oddalonym. Jest to zrozumiałe, gdyż w stosunku do punktu brzegowego bliższego bazie można bazę rozpatrywać w odniesieniu do odcinka od dalszego punktu bazy do rozważanego punktu brzegowego (np. dla punktu $x = 0$ baza $(0.1, 0.2)$ może być rozpatrywana względem odcinka $(0, 0.2)$ — i wtedy jej bezwymia-



Rys. 2. Wartości liczb Biota na brzegach $x = 0$ i $x = 1$ warstwy, zidentyfikowane na podstawie WOT w punktach $x^* = 0.8$ i $x^* = 0.9$. WOT dokładne



Rys. 3. Wartości liczb Biota na brzegach $x = 0$ i $x = 1$ warstwy, zidentyfikowane na podstawie WOT w punktach $x^* = 0.8$ i $x^* = 0.9$. WOT zafalszowane

rowa długość wynosi 0.5). W przypadku, gdy dane dotyczące WOT są niedokładne, a punkt brzegowy odległy od bazy, obserwujemy oscylacje temperatury wokół wartości dokładnych, przy czym są one tym większe, im większy jest błąd danych. We wszystkich rozważanych przykładach oscylacje te wygaszały, gdyż błędy WOT układały się w sekwencje o takich samych znakach (por. tablica 1), co powodowało również stałoznakowe błędy obliczeń w podprzedziałach czasu (por. rys. 1b).

Obliczenia dotyczące liczb Biota wskazują na ich znacznie większą wrażliwość na niedokładność danych. Wynika to stąd, że pochodna temperatury po zmiennej przestrzennej może wykazywać znaczne odchylenie od wartości dokładnych nawet wtedy, gdy temperatury brzegu zidentyfikowane są stosunkowo dokładnie. Ponadto na błąd w identyfikacji liczb Biota ma istotny wpływ różnica temperatury otoczenia i temperatury brzegu (por. 2.7)), szczególnie wtedy, gdy jest ona mała. Wyniki identyfikacji liczb Biota na brzegach warstwy przedstawiono na rys. 2 i 3.

Z powyższych rozważań wynika konkluzja, iż liczba Biota jest znacznie trudniejsza do zidentyfikowania metodą przedstawioną w pracy, niż temperatura brzegu, szczególnie wtedy, gdy jest ona (tzn. liczba Biota) funkcją temperatury.

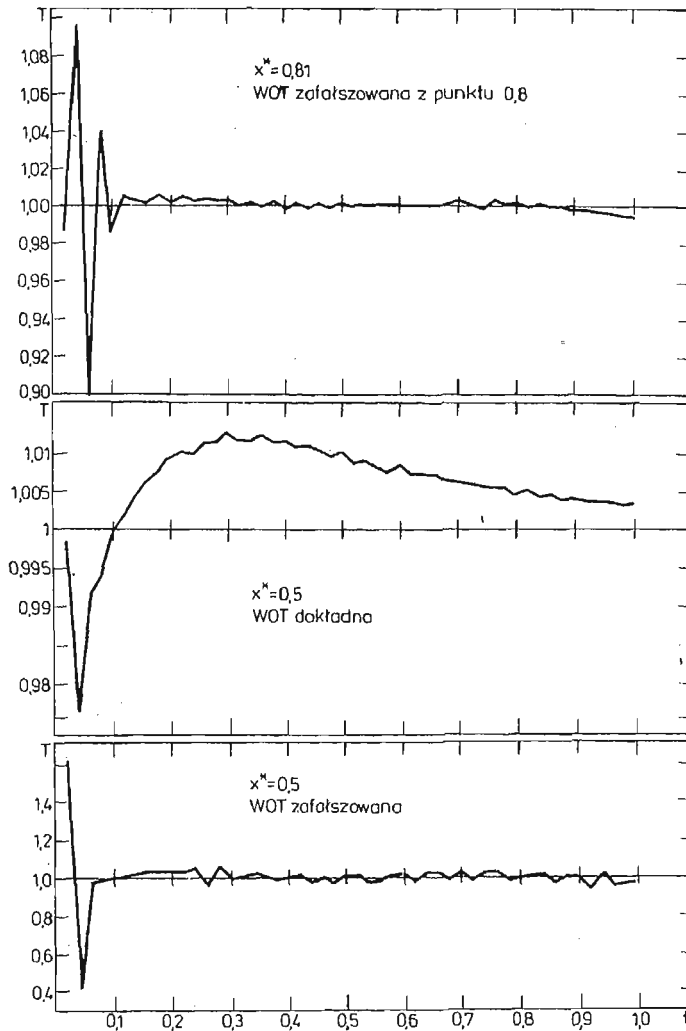
Obliczeń dokonywano głównie przy bezwymiarowym kroku czasowym równym 0.02, oraz przy podziale przedziału (0,1) na 25 części (podział ten był niezbędny do obliczania całek). Obliczenia dokonywane z bardziej gęstym podziałem (na 55 części) jak i z podziałem nieco rzadszym (na 15 części) dały wyniki nieznacznie różniące się od przedstawionych na rysunkach. Natomiast obliczenia dokonywane z krokiem czasowym równym 0.04 i 0.08 dały wyniki, które w początkowej fazie obliczeń były zaniżone w stosunku do wyników otrzymanych przy kroku równym 0.02, lecz w toku obliczeń różnice te zacieśniały się.

8.2. Obliczenia wykorzystujące wzór (2.16). Zagadnienie proste rozwiązano w oparciu o następujące dane bezwymiarowe: $a = 0$, $b = 1$, $T_b(a, t) = 2$, $q_b(b, t) = 0$, $t \in (0, 1)$. Warunki początkowe przyjęto zerowe.

Rozwiązując zagadnienie odwrotne wyznaczono tylko rozkład temperatury w przedziale (0, 1). WOS przyjmowano przy tym zawsze w punkcie $x = 1$; było to więc właściwie zagadnienie odwrotne z jedną wewnętrzną odpowiedzią. Obliczeń dokonano dla następujących baz: (0.3, 1), (0.5, 1), (0.8, 1). Rozważono przy tym przypadki, gdy WOT była dokładna, gdy była zafałszowana i gdy błędnie zmierzona była odległość od x^* do brzegu warstwy. Wyniki obliczeń, prowadzonych z bezwymiarowym krokiem czasowym równym 0.02 przedstawiono na rys. 4. Na rysunku tym pokazano zmiany w czasie temperatury zidentyfikowanej w punkcie $x = 0$ na podstawie WOT z punktu $x^* = 0.5$ oraz z punktu $x^* = 0.8$, przy czym ta ostatnia została wykorzystana do obliczeń jako WOT w punkcie $x^* = 0.81$. W dwóch przypadkach WOT były zafałszowane, m.in. taka była WOT w punkcie $x^* = 0.81$.

Tutaj również $P = 7.071$, skąd $u_+^R = 0.717$. Jedyne bazy pierwsze ma długość bliską tej wartości. Wyniki otrzymane dla tej bazy były obciążone błędem mniejszym niż 1%. W przypadku pozostałych baz wyniki posiadały podobne cechy jak rezultaty przedstawione w części 8.1 pracy.

Z otrzymanych rezultatów wynika, że gdy dana jest jedna WOT, to jeśli błąd pomiaru WOT i błąd pomiaru odległości od punktu x^* do brzegu są rzędu kilku procent w stosunku



Rys. 4. Temperatura brzegu $x = 0$ zidentyfikowana na podstawie WOT w punkcie $x^* = 0.5$ (WOT dokładne i zafalszowane) oraz w punkcie $x^* = 0.81$ (WOT zafalszowana z punktu $x^* = 0.8$)

do danych dokładnych, to błąd otrzymanych rezultatów nie przekracza 10% nawet w przypadku, gdy długość bazy jest rzędu $1/3$ grubości warstwy.

9. Uwagi końcowe

Wykorzystanie wzorów (1.9) i (1.10) do rozwiązywania jednowymiarowych zagadnień odwrotnych w warstwie płaskiej, walcowej i kulistej dało w rezultacie wzory rekurencyjne na wartości temperatur w rozważanej warstwie w kolejnych chwilach czasu. Przedyskutowanie wpływu błędów WOT na błąd obliczonej temperatury brzegu oraz dokonanie

obliczeń dla bezwymiarowych danych czasowych i przestrzennych pozwoliło ustalić pewne relacje pomiędzy krokiem czasowym i długością bazy, na podstawie których można dokonywać wstępnych ocen błędu obliczeń przy znanej dokładności urządzeń mierzących WOT. Analiza przytoczona w części 2.1 pracy, w powiązaniu z faktem, że znak współczynnika przy $\varepsilon_{d, k-1}^*$ jest przeciwny do znaku współczynnika przy ε_{dk}^* (por. (2.11)) prowadzi do wniosku, że oscylujący wokół rozwiązania ścisłego błąd danych spowoduje oscylację rozwiązania zagadnienia odwrotnego, przy czym jeśli długość bazy U będzie mniejsza od u_+ , mogą to być oscylacje o rosnącej amplitudzie. Wynika z tego wniosek, że przy opisie danych dotyczących WOT przy pomocy funkcji ciągłej niekorzystne jest stosowanie splajnów bądź takich funkcji, które w chwilach czasu t_k osiągają wartości równe zmierzonym (danym). Lepiej jest dobierać takie funkcje opisujące WOT, które będą najlepiej „wpasowane” w układ punktów otrzymanych z pomiarów i jednocześnie nie będą miały charakteru funkcji oscylującej. Do opisu WOT można użyć np. kombinacji funkcji wykładniczych, [7].

Dla jednowymiarowych ustalonych zagadnień odwrotnych otrzymano przy okazji wzory, opisujące rozkład temperatury w warstwie płaskiej, walcowej i kulistej przy znanych WOT i WOS.

Przykłady liczbowe dały dobre lub zadawalające wyniki nawet w tych przypadkach, gdy wstępna ocena wpływu błędów danych na rezultaty końcowe wypadła dla tych ostatnich niekorzystnie. Jak z tego wynika, procedurę cechuje duża stabilność numeryczna. Jednocześnie czas realizacji obliczeń na minikomputerze SM-1 był stosunkowo krótki i przy podziale przedziału a, b na 25 części (niezbędnym do obliczania całek) był równy ok. 2 sekundy na jeden krok czasowy.

Literatura

1. K. GRYSA, *Stowarzyszone równania całkowe dla równania Helmholtza i ich zastosowania do rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, s. Mechanika, 1986 (w druku).
2. G. A. KORN, T. M. KORN, *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*, cz. 1, PWN, Warszawa, 1983.
3. H. KAMIŃSKI, K. GRYSA, *O wyznaczeniu przybliżonej temperatury brzegu warstwy płaskiej przy pomocy współczynników wzmocnienia wewnętrznych odpowiedzi*, Sympozjon „Modelowanie w Mechanice”, Materiały, Beskid Śląski, 1985.
4. I. S. GRADŠTEIN, I. M. RYŻYK, *Tablice integralov, summ, rjadov i proizvedenii*, Nauka, Moskwa, 1971.
5. W. A. DITKIN, A. P. PRUDNIKOW, *Przekształcenia całkowe i rachunek operatorowy*, PWN, Warszawa, 1964.
6. N. W. MCLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa, 1964.
7. H. KAMIŃSKI, *Wyznaczanie stałych materiałowych w procesach wymiany ciepła i masy*. Praca doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań, 1984.
8. K. GRYSA, M. J. CIAŁKOWSKI, *Zagadnienia odwrotne pól temperatur — przegląd literatury*, Mech. Teoret. Stos., 18, 4, 1980.
9. K. KURPISZ, *Wyznaczanie pola temperatury w ciałach stałych na podstawie obserwacji temperatury lub gęstości strumienia ciepła w wybranych punktach ciała*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Energetyka, 84, Gliwice, 1984.
10. L. A. KOZDOBA, P. G. KRUKOWSKIJ, *Metody rešenija obratnych zadač teploperenosy*, Kiev, Naukova Dumka, 1982.

Резюме

О ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В статье представлены приближенные решения обратных задач для плоского, цилиндрического и сферического слоев. Эти решения имеют вид рекуррентных формул. Рассмотрено влияние погрешности внутренних характеристик температуры на погрешность аналитических расчетов касающихся температуры. На основе выведенных формул произведены численные вычисления для нескольких наборов внутренних характеристик. Эти вычисления проявляют хорошую численную стабильность, даже в случае неточных внутренних характеристик.

Summary

ON APPROXIMATE SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL INVERSE HEAT CONDUCTION
PROBLEMS

Approximate solutions of inverse problems have been determined for a flat layer and a spherical and cylindrical thick shell. They have been formulated in the form of recurrent formulae. The influence of an inaccuracy of internal responses on an error of the derived temperature field has been discussed. The obtained formulae have served as the basis for numerical calculations. Remarkable stability of the calculations has been observed even in the case when the internal responses were inaccurate.

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 maja 1984 roku.
