

NUMERYCZNA SYMULACJA PROGRAMOWEGO RUCHU SAMOLOTU W PĘTLI PIONOWEJ

WOJCIECH BLAJER

Wyższa Szkoła Inżynierska w Radomiu

Symulowano programowy ruch samolotu w pętli pionowej. Postulowano, by środek masy samolotu zakreślał okrąg o zadanym promieniu oraz dodatkowo, by prędkość lotu była stała. Poszukiwano takiego modelu sterowania, który zapewniałby, że symulowany ruch realizować będzie ściśle narzucony program. Samolot zamodelowano jako sztywny obiekt latający sterowany parametrycznie siłą ciągu silnika oraz wychyleniami steru wysokości. Przedstawiono wyniki symulacji numerycznej.

1. Wstęp

W pracy podjęto się numerycznej symulacji programowego ruchu samolotu w pętli wykonywanej w płaszczyźnie pionowej względem ziemi. Rozważono dwa przypadki ruchu programowego. W pierwszym postulowano, by środek masy samolotu zakreślał okrąg o zadanym promieniu, w drugim żądano dodatkowo, ażeby lot odbywał się ze stałą prędkością. Warunki te zapisane zostały w formie odpowiednich równań więzów programowych. Dla tak sformułowanych programów ruchu, poszukiwano modeli sterowania samolotu zapewniających, że symulowany ruch realizować będzie ściśle warunki więzów programowych.

Podstawowe założenia pracy oraz w znacznej części stosowany model matematyczny, m.in. równania ruchu samolotu i sformułowanie zagadnienia ruchu programowego w pętli kołowej, zawarte zostały w pracy [3]. Artykuł niniejszy stanowi rozwinięcie i poszerzenie cytowanej pracy. Zawarto więc w nim tylko elementy nowe i niezbędne uzupełnienia. Od podstaw sformulowano na przykład zagadnienie programowego ruchu samolotu w pętli kołowej ze stałą prędkością lotu. W odróżnieniu od pracy [3] przyjmowano też że gęstość powietrza zmienia się w funkcji wysokości lotu. Najistotniejszą częścią pracy są jednak przykładowe obliczenia numeryczne.

Rozważane zagadnienia podejmowane były również w pracach [1, 2]. W szczególności, niniejsza praca stanowi przykład praktycznego wykorzystania ogólnego modelu ruchu programowego zawartego w pierwszej z tych prac.

2. Oznaczenia

- c_a — średnia cięciwa aerodynamiczna, m
 c_m — współczynnik aerodynamicznego momentu pochylającego
 c_{mbu} — współczynnik momentu pochylającego dla samolotu bez usterzenia wysokości
 c_{mH} — współczynnik momentu pochylającego od usterzenia wysokości
 c_x — współczynnik aerodynamicznej siły oporu samolotu
 c_z — współczynnik aerodynamicznej siły nośnej samolotu
 c_{zH} — współczynnik siły nośnej na usterzeniu poziomym
 e — odległość linii działania siły ciągu od SC samolotu, m
 g — przyspieszenie ziemskie, $m\ s^{-2}$
 h — wysokość lotu, m
 J — centralny moment bezwładności samolotu, $kg\ m^2$
 m — masa samolotu, kg
 Q — kątowa prędkość pochylania samolotu, s^{-1}
 r — promień pętli, m
 S — powierzchnia nośna samolotu, m^2
 S_H — powierzchnia nośna usterzenia poziomego, m^2
 T — wartość siły ciągu, N
 V — prędkość liniowa samolotu, $m\ s^{-1}$
 x_1, z_1 — współrzędne położenia SC samolotu w inercjalnym układzie odniesienia, m
 x_H, z_H — współrzędne położenia środka parcia sił aerodynamicznych na usterzeniu poziomym wyrażone w układzie samolotowym, m
 α — kąt natarcia samolotu, deg
 α_H — kąt natarcia na usterzeniu poziomym, deg
 γ — kąt pochylenia wektora prędkości, deg
 δ_H — kąt wychylenia steru wysokości, deg
 ε — kąt ochylenia strug na usterzeniu poziomym, deg
 η_H — współczynnik zmniejszenia ciśnienia dynamicznego na usterzeniu wysokości
 Θ — kąt pochylenia samolotu, deg
 ρ — gęstość powietrza, $kg\ m^{-3}$
 χ — kąt między wektorem siły ciągu i osią Ox układu samolotowego, deg

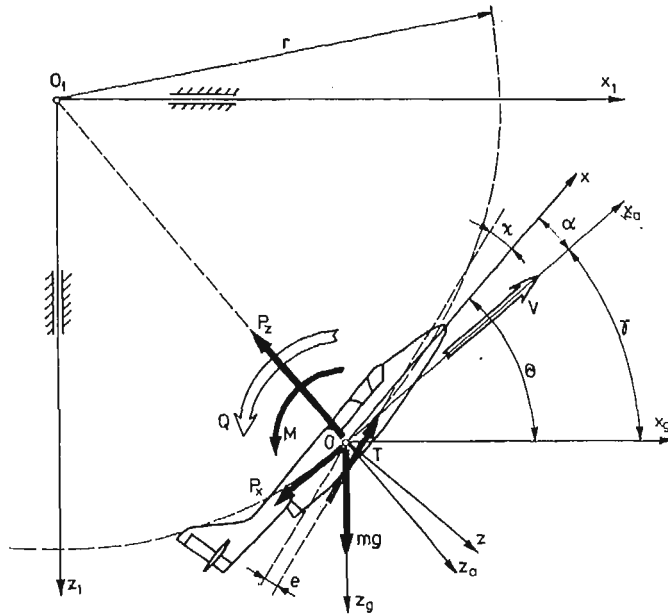
3. Warunki więzów programowych

Postulowanie stałego promienia pętli oraz stałej prędkości lotu jest równoważne z nałożeniem na układ więzów programowych o postaci:

$$f = \frac{1}{2}(x_1^2 + z_1^2) - \frac{1}{2} \cdot r^2 = 0, \quad (1)$$

$$\varphi = V - V_{ust} = C. \quad (2)$$

Jak pokazano w pracy [3], przy założeniu $f_{t=0} = 0$ oraz $\dot{f}_{t=0} = 0$, które to warunki stanowią, że początkowe wartości x_{10} , z_{10} i γ_0 są dobrane dla dowolnego punktu leżącego



Rys. 1 Geometria programowego ruchu samolotu w pętli.

na okręgu pętli (na przykład punkt A na rys. 1), więz geometryczny (1) jest równoważny jego formie różniczkowej $\dot{f} = 0$. Prowadzi to do warunku

$$\frac{m \cdot V^2}{r} - \frac{1}{2} \rho S V^2 c_z - T \cdot \sin(\alpha + \chi) + m \cdot g \cdot \cos \gamma = 0, \quad (3)$$

wyrażającego równowagę sił czynnych i bezwładności na kierunku promieniowym dla okręgu pętli. Podobnie, przy założeniu $\varphi_{t=0} = 0$, a więc $V_0 = V_{ust}$, więz w postaci kinematycznej (2) równoważny jest jego formie różniczkowej $\dot{\varphi} = 0$. Z równań ruchu samolotu pokazanych w [3] wynika, że jest to równoważne warunkowi

$$-\frac{1}{2} \rho S V^2 c_x + T \cdot \cos(\alpha + \chi) - m \cdot g \cdot \sin \gamma = 0. \quad (4)$$

Równanie powyższe oznacza równoważenie się wszystkich sił na kierunku stycznym (kierunku prędkości).

4. Równania ruchu programowego i warunki nakładane na model sterowania samolotem

Warunki więzów dynamicznych (3) i (4) wyrażają ograniczenia jakie nakładają więzy programowe na wzajemne proporcje sił wymuszających ruch samolotu. Ponieważ część tych sił (siła ciągu i aerodynamiczny moment pochylający) zależna jest od parametrów sterowania, związki te oznaczają jednocześnie warunki nakładane na model sterowania samolotu. W pracy [1] zagadnienie to zostało podjęte dla przypadku ogólnego. Poniżej przedstawione zostanie jego rozwiązanie dla przypadku pętli kołowej oraz przypadku pętli kołowej ze stałą prędkością lotu.

4.1. **Pętla kołowa.** Warunkiem, by symulowany ruch samolotu realizował ściśle pętlę kołową o zadanym promieniu r jest, ażeby w każdej chwili zachodziła równowaga sił zapisana równaniem (3). Równanie to zapisać można symbolicznie jako

$$w_1(V, \gamma, \Theta, z_1, T) = 0. \quad (5)$$

Sterowanie samolotu zamodelowano poprzez zmiany T i δ_H . Ponieważ nakładany jest tylko jeden warunek więzów, model zmian tylko jednego parametru sterowania będzie nim limitowany. Funkcja zmian drugiego parametru sterowania może być przyjęta a priori. Podobnie jak w pracy [3], odrzucono możliwość sterowania w tym przypadku wartością siły ciągu T , jako przypadek afizyczny. Na profil toru lotu samolotu wpływają bowiem przede wszystkim wychylenia sterów. Zadanie polegać więc będzie na takim doborze zmian wartości δ_H , by niezależnie od przyjętej funkcji zmian T , w każdej chwili realizowany był warunek (3).

Stosując identyczne przekształcenia jak w pracy [3], różniczkowe równania ruchu programowego zapisane mogą być w postaci:

$$\dot{V} = \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho S V^2 c_x + T \cdot \cos(\alpha + \chi) - m \cdot g \cdot \sin \gamma \right), \quad (6)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{V}{r}, \quad (7)$$

$$Q = \ddot{\alpha} + \frac{\dot{V}}{r}, \quad (8)$$

$$\dot{x}_1 = V \cos \gamma, \quad (9)$$

$$\dot{z}_1 = -V \cdot \sin \gamma, \quad (10)$$

$$\dot{\Theta} = Q. \quad (11)$$

Występująca w równaniu (8) druga pochodna kąta natarcia $\ddot{\alpha}$ jest wyznaczana z zależności

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}(V, Q, \gamma, \Theta, z_1, T, \dot{T}, \ddot{T}) = \frac{b_1}{a_1}, \quad (12)$$

gdzie:

$$b_1 = \left(\frac{m}{r} - \rho S a \alpha \right) (\dot{V}^2 + V \ddot{V}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \rho}{dz_1^2} \dot{z}_1^2 + \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 \right) S V^2 a \alpha - 2 \left(\frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 \alpha - \rho \dot{\alpha} \right) S V \dot{V} a + \\ - \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 S V^2 a \dot{\alpha} - (\ddot{T} - T \dot{\alpha}^2) \sin \alpha_T - 2 \dot{T} \dot{\alpha} \cos \alpha_T - m g (\dot{\gamma} \sin \gamma - \dot{\gamma}^2 \cos \gamma),$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \rho S V^2 a + T \cos \alpha_T.$$

Dla uproszczenia zapisu w powyższych związkach przyjęto:

$$a = \frac{dc_x}{d\alpha}, \quad \alpha_T = \alpha + \chi,$$

natomiast drugie pochodne \ddot{V} , \ddot{z}_1 i $\ddot{\gamma}$ zgodnie z przyjętymi równaniami ruchu (patrz [3]) otrzymać można jako:

$$\begin{aligned}\ddot{V} &= \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 SV^2 c_x - \rho SV \dot{V} c_x - \frac{1}{2} \rho SV^2 \frac{dc_x}{d\alpha} \dot{\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \dot{T} \cdot \cos \alpha_T - T \dot{\alpha} \sin \alpha_T - mg \dot{\gamma} \cos \gamma \right), \\ \ddot{z}_1 &= -\dot{V} \cdot \sin \gamma - V \dot{\gamma} \cos \gamma, \\ \ddot{\gamma} &= \frac{\dot{V}}{r}.\end{aligned}$$

W odróżnieniu od założeń pracy [3], przyjmowano zmienną wartość gęstości powietrza w funkcji wysokości lotu

$$\rho(z_1) = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{h_0 - z_1}{44300} \right)^{4,256}, \quad (13)$$

gdzie: $\rho_0 = 1.2258 \text{ kg m}^{-3}$ — gęstość powietrza na wysokości $h = 0$,

h_0 — wysokość położenia środka układu $0_1 x_1 y_1 z_1$.

Jak pokazano w [3] dla rozważanego przypadku oraz w [1] dla przypadku ogólnego, związek (12) otrzymuje się z warunku drugiej pochodnej po czasie równania (5), $\ddot{w}_1 = 0$. Ażeby w każdej chwili lotu warunek ten był równoważny wyjściowemu warunkowi $w_1 = 0$, spełnione muszą być odpowiednie warunki początkowe, mianowicie:

$$\begin{aligned}w_1(V_0, \gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0) &= 0, \\ \dot{w}_1(V_0, Q_0, \gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0, \dot{T}_0) &= 0.\end{aligned} \quad (14)$$

Warunki te (również warunki przy przekształceniu równania (1) do postaci (3)) nakładają odpowiednie ograniczenia na stan lotu samolotu w chwili $t = 0$.

Zbudowany model matematyczny pozwolił na wyeliminowanie z równań ruchu (6) - (11) jawnej zależności od δ_H . W przedstawionym ujęciu sterowanie jest tym samym zagadnieniem wtórnym, wynikającym z warunków nakładanych przez więzy. Było to możliwe dzięki temu, że zmiany konfiguracji samolotu (w przypadku klasycznej symulacji ruchu stanowiące odpowiedź układu na zadany model sterowania) wymuszono warunkami nakładanymi przez więzy — zmiany $\ddot{\alpha}$ według wzoru (12). Model sterowania musi więc być jedynie dobrany tak, by w każdej chwili wymuszał identyczne zmiany konfiguracji. Zgodnie z [1, 3] podstawą do wyznaczenia aktualnych wartości δ_H może być zależność

$$\frac{1}{J} \left(\frac{1}{2} \rho SV^2 c_a c_m(\alpha, Q, \delta_H) + Te \right) = \ddot{\alpha} + \frac{\dot{V}}{r}. \quad (14)$$

Na zakończenie należy dodać, że zbudowany model wymaga, by przyjęta z założenia funkcja zmian ciągu T musi być co najmniej klasy C^2 .

4.2. Pętla kołowa ze stałą prędkością lotu. Jak pokazano w rozdziale 3 zagadnienie sprowadza się do nałożenia na ruch układu więzów dynamicznych (3) i (4), które dalej oznaczane będą symbolicznie odpowiednio jako w_1 i w_2 . Ponieważ w tym wypadku ilość więzów i ilość parametrów sterowania są równe, przebiegi obydwu parametrów sterowania będą ściśle determinowane programem ruchu.

Stosując analogiczny ciąg przekształceń jak w rozdziale 4.1, poprzez różniczkowanie warunków więzów dynamicznych otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= -\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 a\alpha - \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 a\dot{\alpha} - \dot{T} \cdot \sin \alpha_T - T\dot{\alpha} \cos \alpha_T - mg\dot{\gamma} \sin \gamma = 0 \\ \dot{w}_2 &= -\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 c_x - \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 \frac{dc_x}{d\alpha} + \dot{T} \cdot \cos \alpha_T - T\dot{\alpha} \sin \alpha_T - mg\dot{\gamma} \cos \gamma = 0,\end{aligned}\quad (15)$$

oraz

$$\begin{aligned}\ddot{w}_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\rho}{dz_1^2} \dot{z}_1^2 + \frac{d\rho}{dz_1} \ddot{z}_1 \right) SV_{ust}^2 a\alpha - \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 a\dot{\alpha} + \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 a\ddot{\alpha} - \ddot{T} \cdot \sin \alpha_T - 2T\dot{\alpha} \cos \alpha_T + \\ &\quad - T\ddot{\alpha} \cos \alpha_T + T\dot{\alpha}^2 \sin \alpha_T - mg \cdot \dot{\gamma}^2 \cos \gamma = 0, \\ \ddot{w}_2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\rho}{dz_1^2} \dot{z}_1^2 + \frac{d\rho}{dz_1} \ddot{z}_1 \right) SV_{ust}^2 c_x - \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 \frac{dc_x}{d\alpha} \dot{\alpha} + \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 \frac{d^2c_x}{d\alpha^2} \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 \frac{dc_x}{d\alpha} \ddot{\alpha} + \ddot{T} \cos \alpha_T + \\ &\quad - 2T\dot{\alpha} \sin \alpha_T - T\ddot{\alpha} \sin \alpha_T - T\dot{\alpha}^2 \cos \alpha_T + mg\dot{\gamma}^2 \sin \gamma = 0.\end{aligned}\quad (16)$$

Występujące w powyższych wielkości \ddot{z}_1 , $\dot{\gamma}$ i $\dot{\alpha}$ mają postać:

$$\ddot{z}_1 = -\frac{V_{ust}^2}{r} \cos \gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{V_{ust}}{r}, \quad \dot{\alpha} = Q - \frac{V_{ust}}{r}.$$

Postulowanie realizacji warunków (16) w dowolnej chwili czasu będzie równoważne warunkom (3) i (4) jeśli w chwili $t = 0$ spełnione będą warunki:

$$\begin{aligned}w_1(\gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0) &= 0, \\ w_2(\gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0) &= 0, \\ \dot{w}_1(Q_0, \gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0, \dot{T}_0) &= 0, \\ \dot{w}_2(Q_0, \gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0, \dot{T}_0) &= 0.\end{aligned}\quad (17)$$

Zależności (16) pozwalają na określenie drugich pochodnych kąta natarcia $\ddot{\alpha}$ i siły ciągu \ddot{T} , mianowicie:

$$\ddot{T} = \ddot{T}(Q, \gamma, \Theta, z_1, T, \dot{T}) = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad (18)$$

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}(Q, \gamma, \Theta, z_1, T, \dot{T}) = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad (19)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \sin \alpha_T, & a_{12} &= T \cdot \cos \alpha_T + \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 a, \\ a_{21} &= -\cos \alpha_T, & a_{22} &= T \cdot \sin \alpha_T + \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 \frac{dc_x}{d\alpha},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \varrho}{dz_1^2} \dot{z}_1^2 + \frac{d}{dz_1} \ddot{z}_1 \right) SV_{ust}^2 a\alpha - \frac{d\varrho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 a\dot{\alpha} + \\
&\quad - 2T\ddot{\alpha} \cos \alpha_T + T\dot{\alpha}^2 \sin \alpha_T - mg \cdot \dot{\gamma}^2 \cos \gamma, \\
b_2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dz_1^2} \dot{z}_1^2 + \frac{d\varrho}{dz_1} \ddot{z}_1 \right) SV_{ust}^2 c_x - \frac{d\varrho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 \frac{dc_x}{d\alpha} \dot{\alpha} + \\
&\quad - \frac{1}{2} \varrho SV_{ust}^2 \frac{d^2 c_x}{d\alpha^2} \dot{\alpha}^2 - 2T\dot{\alpha} \sin \alpha_T - T\dot{\alpha}^2 \cos \alpha_T + mg \dot{\gamma}^2 \sin \gamma.
\end{aligned}$$

Podstawiając $T_1 = \dot{T}$, odpowiedni układ różniczkowych równań ruchu samolotu realizującego założony program będzie mieć postać:

$$\dot{Q} = \ddot{\alpha}(Q, \gamma, \Theta, z_1, T, T_1), \quad (20)$$

$$\dot{x}_1 = V_{ust} \cdot \cos \gamma, \quad (21)$$

$$\dot{z}_1 = -V_{ust} \cdot \sin \gamma, \quad (22)$$

$$\dot{\Theta} = Q, \quad (23)$$

$$\dot{T} = T_1, \quad (24)$$

$$\dot{T}_1 = \ddot{T}(Q, \gamma, \Theta, z_1, T, T_1). \quad (25)$$

Równania te uzupełnione muszą być związkami algebraicznymi:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{V_{ust}}{r} t, \quad (26)$$

$$\alpha = \Theta - \gamma.$$

Model zmian wartości ciągu T wyznaczany będzie bezpośrednio w procesie całkowania równań ruchu (20) - (25). Aktualne wartości δ_H wyznaczane mogą być natomiast z analogicznej do (14) zależności o postaci

$$\frac{1}{J} \left(\frac{1}{2} \varrho SV_{ust}^2 c_a c_m(\alpha, Q, \delta_H) + Te \right) - \ddot{\alpha} = 0. \quad (27)$$

4.3. Inne sformułowanie zagadnienia. Zaproponowane w rozdziałach 4.1 i 4.2 modele matematyczne, niezależnie od różniczkowych równań ruchu programowego, pozwalają na wyznaczanie aktualnych wartości δ_H z odpowiednich związków algebraicznych (14) i (27). Zgodnie z [1] możliwe jest jednak inne sformułowanie zagadnienia. 3-krotne zróżniczkowanie po czasie wyjściowych zależności (3) i (4) (oczywiście przy założeniu, że $w_{t=0} = 0$, $\dot{w}_{t=0} = 0$, $\ddot{w}_{t=0} = 0$) pozwoli na otrzymanie odpowiednich związków $\ddot{w}_1 = 0$ i $\ddot{w}_2 = 0$, liniowo zależnych od δ_H i \ddot{T} . Standaryzacja tych związków względem najwyższych pochodnych parametrów sterowania oraz dołączenie (po uprzednim sprowadzeniu równań do rzędu pierwszego) do ogólnych równań ruchu samolotu, pozwoli na budowę odpowiedniego układu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego o postaci normalnej. Wektor stanu takiego układu zawierać będzie m.in. parametry sterowania, aktualne wartości których otrzymywane będą bezpośrednio w procesie całkowania numerycznego.

W rozważonym przypadku podejście takie nie jest jednak celowe. Dodatkowe różniczkowanie związków typu $\ddot{w} = 0$ znacznie bowiem komplikuje zapis matematyczny modelu.

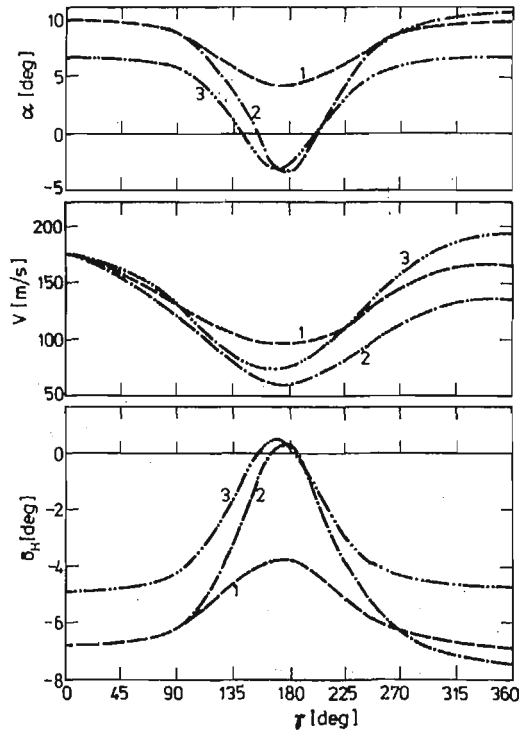
5. Obliczenia przykładowe

Obliczenia przykładowe przeprowadzone zostały dla samolotu TS-11 „Iskra”. Wszelkie dane geometryczne, masowe i aerodynamiczne dla tego samolotu przyjęte zostały za pracą [4], a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 m &= 3200 & x_H &= 4.84 & e &= 0 \\
 J &= 8000 & z_H &= 1.46 & \chi &= 0 \\
 S &= 17.5 & S_H &= 3.54 & \eta_H &= 0.9 \\
 c_a &= 1.83 & \alpha_{zH} &= -2 & g &= 9.8065 \\
 c_z &= 0.07313(\alpha + 0.456) & c_{mbu} &= -0.083 + 0.1035\alpha \\
 c_x &= 0.013 + 0.0005\alpha^2 & \varepsilon &= 0.17 + 0.3749\alpha \\
 c_{zH} &= 0.06453\alpha_H + 0.04464\delta_H
 \end{aligned}$$

W pracy przyjęty został stosunkowo prosty model oddziaływań aerodynamicznych, którego założenia zawarto w pracy [3]. Uściślenia wymaga jedynie sposób wyznaczania aerodynamicznego momentu pochylającego. Aktualną wartość współczynnika tego momentu c_m określano jako

$$c_m(\alpha, Q, \delta_H) = c_{mbu}(\alpha) + c_{mH}(\alpha, Q, \delta_H). \quad (28)$$



Rys. 2 Symulacja pętli kołowej:

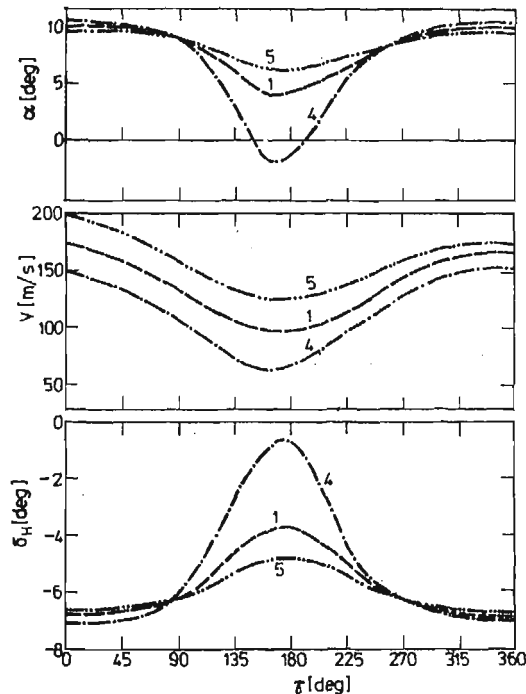
- 1) $r = 500$ m, $V_0 = 175$ m/s, $T = 8000$ N,
- 2) $r = 500$ m, $V_0 = 175$ m/s, $T = 800$ N,
- 3) $r = 750$ m, $V_0 = 175$ m/s, $T = 8000$ N.

Wartość momentu pochylającego od usterzenia poziomego (lub odpowiednio współczynnik c_{mH}) wyznaczano jako moment siły nośnej na usterzeniu względem środka masy samolotu. Zgodnie z przyjętym modelem aerodynamiki samolotu, współczynnik siły nośnej na usterzeniu c_{zH} uzależniono od wartości kąta natarcia α_H i wychylenia steru δ_H . Uwzględniano przy tym lokalne warunki opływu usterzenia, na które wpływ mają odchylenie strug za płatem, zmniejszenie ciśnienia dynamicznego oraz kątowa prędkość obrotu samolotu Q .

Przyjęty model oddziaływań aerodynamicznych jest oczywiście w znacznej mierze uproszczony. Celem podstawowym obliczeń była jedna numeryczna weryfikacja zbudowanych modeli matematycznych, a nie uzyskanie ścisłych wyników ilościowych dla tego typu samolotu.

Obliczenia przeprowadzone zostały na maszynie RIAD 32 według własnych programów w języku FORTRAN IV JS. Zaprezentowano wyniki dla ośmiu wariantów obliczeń. Warianty 1 - 5 dotyczą symulacji pętli kołowej, natomiast warianty a, b oraz c — pętli kołowej wykonywanej ze stałą prędkością lotu. Różnice pomiędzy poszczególnymi wariantami opisane są pod odpowiednimi rysunkami. We wszystkich przypadkach wprowadzenie do pętli następowało w najniższym jej punkcie (punkt A na rys. 1) na wysokości $h = 1000$ m.

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono przebiegi podstawowych parametrów symulowanego



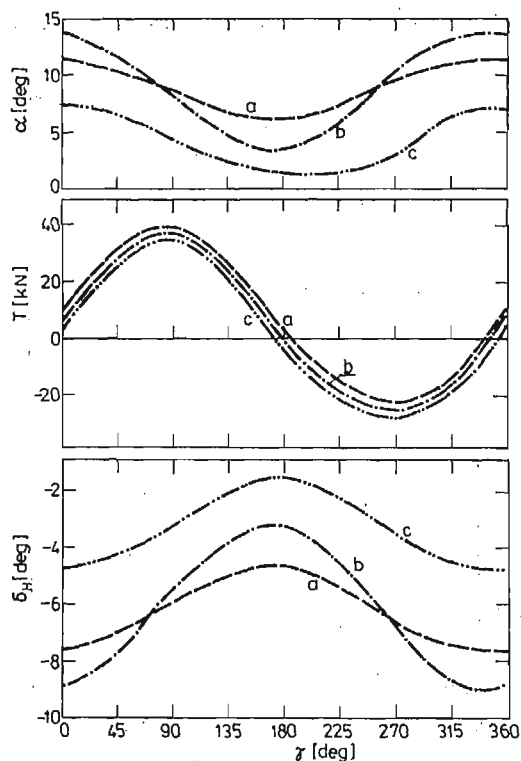
Rys. 3 Symulacja pętli kołowej:

- 1) $r = 500$ m, $V_0 = 175$ m/s, $T = 8000$ N,
- 4) $r = 500$ m, $V_0 = 150$ m/s, $T = 8000$ N,
- 5) $r = 500$ m, $V_0 = 200$ m/s, $T = 8000$ N.

ruchu z narzuconym warunkiem wykonania pętli kołowej. Przyjmowano przy tym, że wartość siły ciągu podczas całej pętli jest stała. Przebiegi zmian parametrów przedstawiono w funkcji kąta γ , który zgodnie z rys. 1 jednoznacznie wyznacza położenie środka masy samolotu na okręgu pętli. Kąt określający konfigurację samolotu w przestrzeni wyznaczany może być z drugiej zależności (26).

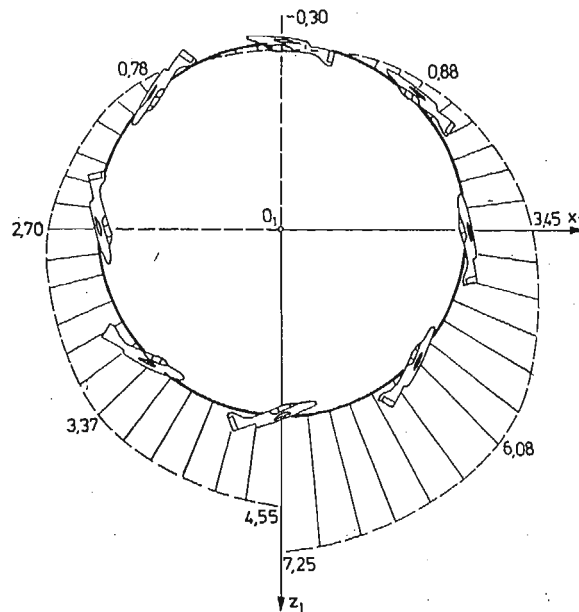
Z przedstawionych wykresów wynika, że przebieg symulowanego ruchu oraz model zmian wychylenia steru wysokości silnie zależą od początkowej prędkości lotu V_0 , narzuconego promienia pętli r oraz wartości siły ciągu $T = \text{const}$. Charakter zmian parametrów ruchu i parametru δ_H są przy tym zgodne z tym co obserwuje się w locie rzeczywistym. W punkcie szczytowym pętli zauważa się bowiem wyraźne zmniejszenie prędkości V , przejście na mniejsze wartości kątów natarcia α oraz zmniejszenie wychylenia steru wysokości δ_H . Zmiany te są szczególnie wyraźne w II i III ćwiartce pętli, czyli w zakresie kątów γ od 90° do 270° .

Na rys. 5 pokazano przebiegi podstawowych parametrów ruchu w symulowanej pętli kołowej ze stałą prędkością lotu. Podobnie jak poprzednio przebiegi te zależne są silnie od założonego promienia pętli oraz narzuconej V_{ust} . Model zmian wychyleń steru wysokości jest jakościowo zgodny z obserwowanym w rzeczywistości modelem sterowania, nato-



Rys. 4 Symulacja pętli kołowej z ustaloną prędkością lotu:

- a) $r = 500 \text{ m}$, $V_{ust} = 120 \text{ m/s}$,
- b) $r = 500 \text{ m}$, $V_{ust} = 90 \text{ m/s}$,
- c) $r = 1000 \text{ m}$, $V_{ust} = 120 \text{ m/s}$.



Rys. 5 Zmiany współczynnika przeciążenia dla wersji 2 obliczeń.

miast przebieg wymaganych zmian siły ciągu wskazuje, że rozwiązanie ma charakter czysto analityczny. Duże wartości dodatnie i przede wszystkim ujemne („ciąg odwrócony”), siły ciągu, niezbędne dla utrzymania stałej prędkości lotu wskazują, że w rzeczywistości założony program może być nie do zrealizowania. W pracy nie rozwijano jednak tego zagadnienia.

Podczas ruchu samolotu w pętli znacznym zmianom ulega również współczynnik przeciążenia. Zmiany te przedstawione zostały na rys. 5 dla wersji obliczeń nr 2.

6. Wnioski

Przedstawiona praca rozwiązuje szczególny przypadek programowego ruchu samolotu. Stanowi tym samym przykład wykorzystania ogólniejszego modelu przedstawionego w [1]. Wybór prostego przypadku lotu oraz uproszczenia modelu oddziaływań aerodynamicznych podyktowane były chęcią nieskomplikowanego podejścia do zagadnienia.

W przypadku symulacji ruchu w pętli kołowej tylko jeden z dwu zamodelowanych parametrów sterowania determinowany był warunkami wynikającymi z postulatu realizacji nałożonego więzu programowego. Jak wspomniano w niniejszej pracy oraz pokazano w pracy [3], lepiej uwarunkowane było poszukiwanie funkcji zmian δ_H jako wynikającej z warunków więzu. Tym samym funkcja zmian T przyjmowana była a priori (postawiono jedynie warunek klasy C^2 tej funkcji). Z równań ruchu samolotu wynika bowiem, że wektor ciągu jest praktycznie równoległy do wektora prędkości, ma więc znikomy wpływ na zmianę krzywizny toru ruchu. Wychylenia steru δ_H decydują natomiast o wartościach kątowej prędkości samolotu Q , a tym samym decydują o zmianach konfiguracji samolotu.

Wyznaczane warunki więzów wartości δ_H dopasowują więc tak konfigurację samolotu, by w każdej chwili siły na kierunku normalnym do toru równoważyły się (jest to warunek realizacji więzu dynamicznego).

Symulacja pętli kołowej z ustaloną prędkością lotu wykazała, że realizacja narzuconego programu (chodzi tu przede wszystkim o warunek $\dot{V} = 0$) wymaga afizycznego modelu zmian wartości siły ciągu. Uwaga ta dotyczy przede wszystkim dużych wartości ciągu wstecznego w III i IV ćwiartce pętli. Uzyskane rozwiązanie traktować należy zatem jako czysto teoretyczne. Poprawniejszym z punktu widzenia zastosowań praktycznych byłoby przyjęcie warunku zmian wartości prędkości V jako funkcji typu cosinusoidalnego w zależności od kąta γ .

We wszystkich pokazanych wariantach obliczeń parametry symulowanego ruchu oraz funkcje zmian determinowanych warunkami więzów parametrów sterowania, silnie zależały od przyjętych warunków początkowych. Jakościowy charakter tych zmian był jednak zgodny z doświadczeniami z lotu rzeczywistego.

Realizacja założonego programu nakłada warunki również na początkowe wartości wektora stanu odpowiedniego układu równań różniczkowych. Tylko część z nich dobrana może być dowolnie z punktu widzenia realizacji więzów. Oznaczało to m.in., że w chwili $t = 0$ (punkt A na rys. 1) samolot już realizował założoną pętlę.

Podjęte zagadnienie może mieć praktyczne wykorzystanie przy modelowaniu figur akrobacji lotniczej. Redefiniowania wymaga jednak przyjęty model matematyczny tak, by możliwe było formułowanie odpowiednich więzów programowych. Dotyczy to przede wszystkim zagadnienia programowego ruchu przestrzennego.

Przedstawione podejście do zagadnienia zastosowane może być również do innych układów sterowanych parametrycznie.

Literatura

1. W. BLAJER, *Wyznaczanie modelu sterowania samolotem zapewniającego ścisłą realizację ruchu programowego*, Mech. Teoret. i Stos., z 3, 1987.
2. W. BLAJER, J. MARYNIAK, J. PARCZEWSKI, *Modelowanie programowego ruchu samolotu w pętli*, zb. ref. XXV Symp. „Modelowanie w mechanice”, Gliwice-Kudowa 1986.
3. W. BLAJER, J. PARCZEWSKI, *Model matematyczny wyznaczania funkcji sterowania samolotem w pętli*, II Ogólnopolska Konf. „Mechanika w lotnictwie”, Warszawa 1986, Mech. Teoret. i Stos. z. 1 - 2, 1987.
4. Z. GORAJ, *Obliczanie sterowności, równowagi i stateczności samolotu w zakresie poddźwiękowym*, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1984.

Резюме

СИМУЛИРОВАНИЕ ПРОГРАМНОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЁТА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЕТЛЕ

Симулировано программное движение самолёта в вертикальной петле. Центр тяжести самолёта движется по окружности постоянного радиуса. Полёт происходит с постоянной скоростью. Получена модель управления самолётом, обеспечивает реализацию принятой программы. Самолёт представлен как жёсткий летающий объект, управляемый тягой двигателя и отклонением руля высоты. Представлены результаты вычислений на ЭВМ.

S u m m a r y

NUMERICAL SIMULATION OF AIRPLANE PROGRAMMED
MOTION IN VERTICAL LOOP

An airplane programmed motion in vertical loop has been simulated. The airplane center of gravity was demanded to describe an ideal circle, and in the other example, additionally a constant flying speed was postulated. The model of airplane control ensures that the simulated motion complies with the program constraints. The airplane was modelled as a rigid body controlled parametrically by jet thrust force and elevator deflections. Some results of numerical calculations are presented.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 kwietnia 1986 roku.
