

WYKORZYSTANIE ANALIZY MODALNEJ DO BADANIA UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O WIELU STOPNIACH SWOBODY

WŁADYSŁAW LISEWSKI

PAWEŁ GUTOWSKI

Politechnika Szczecińska

1. Wprowadzenie

Metoda analizy modalnej umożliwia poznanie własności dynamicznych badanego układu w oparciu o wartości własne i wektory własne. Trudności związane z analitycznym rozwiązaniem tego zadania dla liniowych układów tłumionych o wielu stopniach swobody zostały pokonane dzięki możliwości opisu dynamiki takich układów we współrzędnych stanu [1, 2]. Uzyskano w ten sposób możliwość rozkładu własnych drgań układu na sumę głównych postaci drgań. Matematyczna postać tej sumy ma bardzo praktyczne znaczenie w badaniach doświadczalnych [3, 4, 5]. Charakterystyki częstotliwościowe wyznaczone eksperymentalnie można aproksymować zależnością o postaci analogicznej do w/w sumy uzyskując dużą dokładność opisu wyników pomiarów. Celem takiej aproksymacji jest zmniejszenie w maszynie cyfrowej obszaru pamięci potrzebnej do zapamiętania wyznaczonych charakterystyk, oraz estymacja parametrów modalnych. Przykładowo charakterystyka częstotliwościowa wyznaczona w zakresie 0÷500 Hz z rozdzielczością 0,25 Hz i przedstawiona w postaci tablicy zawiera 6000 liczb. Do opisu tej samej charakterystyki po aproksymacji wystarczy zapamiętać $4n+2$ liczby; gdzie n — liczba rezonansów.

W pracy pokazano jeden z możliwych sposobów aproksymowania doświadczalnie wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych, oraz estymacji parametrów modalnych badanych obiektów. Przedstawioną metodę zilustrowano przykładem wykonanym w ramach jej testowania.

2. Teoretyczne podstawy metody rozkładu charakterystyk na składowe

Równanie ruchu dla układu o n stopniach swobody ma postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}_0, \quad (1)$$

gdzie:

M — macierz bezwładności ($n \times n$),

H — macierz tłumienia ($n \times n$),

\mathbf{K} — macierz sztywności ($n \times n$),

\mathbf{q} — macierz współrzędnych uogólnionych ($n \times 1$),

\mathbf{P}_0 — macierz sił uogólnionych ($n \times 1$).

\mathbf{M} , \mathbf{H} , \mathbf{K} — to symetryczne macierze rzeczywiste, dodatnio określone. Przyjmuje się ponadto, że w układzie występuje małe tłumienie o charakterze wiskotycznym, przy czym nie jest to tłumienie proporcjonalne (nie jest spełniony warunek: $\mathbf{HM}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{KM}^{-1}\mathbf{H}$ [3]).

Mnożąc równanie (1) lewostronnie przez \mathbf{M}^{-1} otrzymuje się:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{P}. \quad (1a)$$

Poszukiwany wzór aproksymacyjny jest formą przedstawienia funkcji przejścia obiektu dynamicznego za pomocą postaci drgań głównych. Wobec powyższego należy w pierwszej kolejności rozwiązać zadanie wartości i wektorów własnych. W omawianym tu zadaniu zarówno wartości jak i wektory własne są liczbami zespolonymi. Do ich wyznaczenia wygodniej jest przetransformować równanie ruchu do współrzędnych stanu, a następnie w końcowej fazie wyprowadzeń powrócić do postaci obecnej.

Równania ruchu we współrzędnych stanu otrzymuje się przez dołączenie do równania (1) tożsamości [2, 3]:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Otrzymuje się wówczas następującą postać równania:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{F}, \quad (3)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = -\lambda \cdot \mathbf{y},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_0 \end{bmatrix}.$$

Zapisując równania ruchu we współrzędnych stanu otrzymuje się równanie różniczkowe pierwszego rzędu przy czym wymiar macierzy wchodzących w skład tego równania rośnie dwukrotnie.

Przy zerowym wymuszeniu i przewidywanym rozwiązaniu w postaci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{v} \cdot e^{\lambda t}$$

z równania (3) otrzymuje się układ $2n$ jednorodnych równań algebraicznych:

$$(\mathbf{B} - \lambda_i \mathbf{A}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Równanie (4) ma rozwiązanie nietrywialne, gdy jego wyznacznik charakterystyczny jest równy zero:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) = 0. \quad (5)$$

Z równania (5) otrzymuje się wartości własne λ_i dla $i = 1 + 2n$. Wszystkie λ_i są liczbami zespolonymi o niezerowych częściach rzeczywistych i urojonych, oraz są parami sprzężone:

$$\lambda_i = \mu_i + j\nu_i \quad \text{oraz} \quad \bar{\lambda}_i = \mu_i - j\nu_i,$$

gdzie: μ_i — współczynnik tłumienia i -tej postaci drgań,

ν_i — i -ta częstotliwość drgań własnych tłumionych.

Z wartości własnych można zbudować macierz spektralną:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n} \} = \\ &= \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n \}.\end{aligned}\quad (6)$$

Każdej parze wartości własnych przyporządkowana jest para zespolonych sprzężonych wektorów własnych (otrzymanych w wyniku rozwiązania układu równań (4))

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{s}_i + j\mathbf{p}_i \quad \text{oraz} \quad \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{s}_i - j\mathbf{p}_i.$$

Wektory te można zestawić w macierz modalną wektorów prawostronnych:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2n}] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n]. \quad (7)$$

Podobnie można wyznaczyć macierz modalną wektorów lewostronnych.

Po wykonaniu określonych przekształceń [1] równanie (3) można doprowadzić do postaci:

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \Lambda \mathbf{y} = \mathbf{F}_1. \quad (8)$$

W ten sposób wyjściowy układ n zależnych równań różniczkowych ruchu drugiego rzędu we współrzędnych \mathbf{q} został przetransformowany na $2n$ niezależnych równań różniczkowych pierwszego rzędu we współrzędnych \mathbf{y} .

Rozwiązanie ogólne równania (8) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{e}^{(-\Lambda)t} \mathbf{C}, \quad (9)$$

gdzie \mathbf{C} jest wektorem stałych całkowania:

$$C_i = a_i + jb_i \quad \text{oraz} \quad \bar{C}_i = a_i - jb_i.$$

Wzór transformacyjny umożliwiający przejście od układu we współrzędnych \mathbf{y} do współrzędnych \mathbf{q} ma następującą postać:

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}_{II} \mathbf{y}, \quad (10)$$

gdzie: \mathbf{V}_{II} — dolny blok macierzy modalnej \mathbf{V} ;

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_I \\ \mathbf{V}_{II} \end{bmatrix}.$$

Uwzględniając (9) i (10) t -ta współrzędna wektora \mathbf{q} jest określona wzorem:

$$q_i(t) = \sum_{r=1}^n [V_{i,r,II} \cdot C_r e^{(-\mu_r + j\nu_r)t} + \bar{V}_{i,r,II} \cdot \bar{C}_r \cdot e^{(-\mu_r - j\nu_r)t}]. \quad (11)$$

Po wykonaniu prostych przekształceń otrzymuje się:

$$q_i(t) = \sum_{r=1}^n [(T_{i,r} + jU_{i,r})e^{(-\mu_r + j\nu_r)t} + (T_{i,r} - jU_{i,r})e^{(-\mu_r - j\nu_r)t}], \quad (11a)$$

gdzie:

$$T_{i,r} = s_{i,r,II} \cdot a_r - p_{i,r,II} \cdot b_r,$$

$$U_{i,r} = s_{i,r,II} \cdot b_r + p_{i,r,II} \cdot a_r.$$

Stosując transformację Laplace'a równanie powyższe przyjmuje postać:

$$q_t(s) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{T_{t,r} + jU_{t,r}}{s + (-\mu_r + j\nu_r)} + \frac{T_{t,r} - jU_{t,r}}{s + (-\mu_r - j\nu_r)} \right], \quad (12)$$

a po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i podstawieniu $s = j\omega$:

$$q_t(j\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{F_{t,r} + j\omega G_{t,r}}{-\omega^2 + S_r + j\omega R_r}, \quad (13)$$

gdzie:

$$F_{t,r} = -2\mu_r \cdot T_{t,r} + 2\nu_r \cdot U_{t,r},$$

$$G_{t,r} = 2T_{t,r},$$

$$S_r = \mu_r^2 + \nu_r^2,$$

$$R_r = 2\mu_r.$$

W praktyce na ogół wyznacza się funkcję przejścia W_t jako stosunek sygnału wyjściowego $q_t(j\omega)$ do siły wymuszającej $P(j\omega)$. Zależność (13) przyjmuje wówczas postać:

$$W_t(j\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{F_{t,r} + j\omega G_{t,r}}{-\omega^2 + S_r + j\omega R_r}. \quad (14)$$

Charakterystyka doświadczalna jest wyznaczana w określonym przedziale częstotliwości $[\omega_A, \omega_B]$. Obecność charakterystyki poza tym obszarem uwzględnić można przez wprowadzenie do wzoru (14) dwóch członów:

$\frac{1}{m_t \omega^2}$ człon inercyjny, uwzględniający wpływ postaci drgań z przedziału $(0, \omega_A)$,

gdzie m_t jest masą residualną niższych postaci drgań.

$x_0 + jy_0$ — człon uwzględniający postacie drgań w przedziale (ω_B, ∞) zwany residualną podatnością.

Wzór (14) przyjmuje więc formę:

$$W_t(j\omega) = -\frac{1}{m_t \omega^2} + \sum_{r=1}^n \frac{F_{t,r} + j\omega G_{t,r}}{-\omega^2 + S_r + j\omega R_r} + x_0 + jy_0. \quad (15)$$

3. Aproksymacja doświadczalnie wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych

Poszczególne punkty charakterystyki częstotliwościowej wyznaczonej doświadczalnie mogą być obciążone błędami przypadkowymi. Do aproksymacji tych charakterystyk wykorzystano metodę najmniejszych kwadratów.

W metodzie tej minimalizuje się następujące wyrażenie:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N (W_{tDi} - W_{tmi})(\bar{W}_{tDi} - \bar{W}_{tmi}), \quad (16)$$

gdzie: W_{tDi} — doświadczalnie wyznaczona podatność dynamiczna w punkcie t badanego układu przy i -tej częstotliwości,

W_{imi} — podatność dynamiczna w punkcie t badanego układu opisana równaniem (15) przy i -tej częstotliwości.

Sumowanie w powyższym wzorze odbywa się po wszystkich częstotliwościach z aproksymowanego przedziału. Ponieważ zadanie minimalizacji prowadzi do równań nieliniowych, rozwiązanie jego może być wykonane metodą iteracyjną.

Układ równań, który należy rozwiązać w każdej iteracji ma następującą postać [7]:

$$\mathbf{L} \cdot \delta_k + \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

gdzie:

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i \partial k_j} = (W_{im}^i - W_{iD}) \frac{\partial^2 \bar{W}_{im}}{\partial k_i \partial k_j} + \frac{\partial W_{im}}{\partial k_j} \cdot \frac{\partial \bar{W}_{im}}{\partial k_i} + \\ + (\bar{W}_{im} - \bar{W}_{iD}) \frac{\partial^2 W_{im}}{\partial k_i \partial k_j} + \frac{\partial \bar{W}_{im}}{\partial k_j} \cdot \frac{\partial W_{im}}{\partial k_i}, \quad (18)$$

δ_{ki} — poprawki wyznaczanych parametrów równania (15),

$$V_i = \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_i} = (W_{im} - W_{iD}) \frac{\partial \bar{W}_{im}}{\partial k_i} + (\bar{W}_{im} - \bar{W}_{iD}) \frac{\partial W_{im}}{\partial k_i}, \quad (19)$$

k_i, k_j — poszukiwane parametry równania (15), $i, j = 1, 2, \dots, 4n+2$.

Uwaga: W powyższych wzorach celem uproszczenia zapisów opuszczono znak sumowania po częstotliwościach.

Jeśli proces iteracyjny jest zbieżny do rozwiązania tak, że elementy macierzy kolumnowej δ_k stają się zerami, wówczas elementy macierzy \mathbf{V} są też zerami. Elementy macierzy \mathbf{L} nie mają więc istotnego wpływu na przebieg iteracji i sposób ich wyznaczania można nieco uprościć przez pominięcie wyrażań z pochodnymi drugiego rzędu. Równanie (18) przyjmuje w tej sytuacji postać:

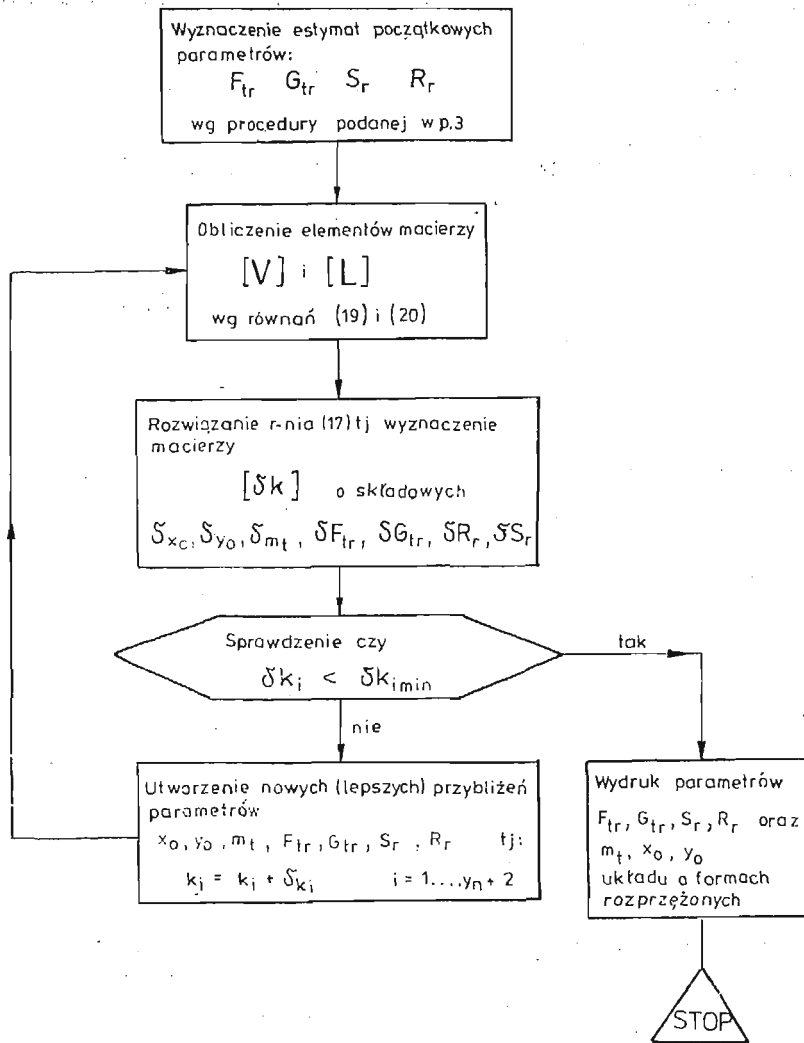
$$L_{ij} = \frac{\partial W_{im}}{\partial k_j} \cdot \frac{\partial \bar{W}_{im}}{\partial k_i} + \frac{\partial \bar{W}_{im}}{\partial k_j} \cdot \frac{\partial W_{im}}{\partial k_i}. \quad (20)$$

Cały proces iteracyjny przebiega wg schematu blokowego przedstawionego na rys. 1. Zakończenie obliczeń może nastąpić po osiągnięciu zadowalającej dokładności opisu charakterystyki (przyjętej odległości między charakterystyką doświadczalną a jej postacią aproksymującą) lub po wykonaniu zadanej ilości iteracji.

3.1. Wyznaczanie estymat początkowych parametrów dla poszczególnych postaci drgań. Iteracyjny sposób wyznaczania parametrów równania opisującego charakterystykę wymaga podania estymat początkowych. Różnice między tymi estymatami a wartościami dokładnymi mogą mieć wpływ na zbieżność procesu iteracyjnego.

Występujące we wzorze (15) człony uwzględniające wpływ postaci z przedziałów $(0; \omega_A)$ i (ω_B, ∞) nie zawsze muszą pojawić się podczas aproksymacji. Zależy to od kształtu charakterystyki w tych przedziałach. Przyjęto więc, że wstępne estymaty parametrów m_0, x_0 i y_0 są równe zero.

Estymaty parametrów R_0 i S_0 wyznaczyć można z charakterystyki amplitudowo-fazowo-częstotliwościowej $(A-\varphi-f)$ w oparciu o jej punkty przyrezonansowe. Konstrukcja geometryczna umożliwiająca wyznaczenie tych estymat dla każdego z rezonansów powstaje



Rys. 1. Schemat blokowy obliczeń parametrów modelu układu o formach rozprzężonych.

dzięki możliwości aproksymowania okręgiem charakterystyki $A-\varphi-f$ w pobliżu rezonansu [6] — rys. 2. Przy potraktowaniu każdego z rezonansów jako odpowiedzi układu o jednym stopniu swobody słuszne są zależności [7]:

$$S_r = \omega_0^2, \quad (21)$$

$$R_r = 2\Delta\omega \cdot \operatorname{tg} \Phi. \quad (22)$$

gdzie: ω_0 — częstotliwość rezonansowa,

$$\Delta\omega = |\omega_0 - \omega_i|; \Delta\omega \ll \omega_0,$$

ω_i — częstotliwość w punkcie charakterystyki wybranym do obliczeń,

Φ — kąt określający położenie na charakterystyce punktu o częstotliwości ω_i — rys. 2.

$$Y4_{n,j} = 1, \quad (30)$$

$$Y4A_{i,j} = \frac{\omega^2 R_i R_j + (S_i - \omega^2)(S_j - \omega^2)}{[(S_i - \omega^2)^2 + \omega^2 R_i^2][(S_j - \omega^2)^2 + \omega^2 R_j^2]} - \frac{[(S_j - \omega^2)(S_n - \omega^2) + \omega^2 R_j R_n] \omega^2}{[(S_j - \omega^2)^2 + \omega^2 R_j^2][(S_n - \omega^2)^2 + \omega^2 R_n^2]}, \quad (31)$$

$$Y4B_i = \frac{\omega^4 R_n^2 + (S_n - \omega^2)^2 \omega^2}{[(S_n - \omega^2)^2 + \omega^2 R_n^2]^2} - \frac{[(S_i - \omega^2)(S_n - \omega^2) + \omega^2 R_i R_n] \omega^2}{[(S_i - \omega^2)^2 + \omega^2 R_i^2][(S_n - \omega^2)^2 + \omega^2 R_n^2]}, \quad (32)$$

$$K1_i = x(S_i - \omega^2) - y(\omega R_i), \quad (33)$$

$$K2_i = \frac{x\omega^2 R_i + y\omega(S_i - \omega^2)}{(S_i - \omega^2)^2 + \omega^2 R_i^2} - \frac{x\omega^2 R_n + y\omega(S_n - \omega^2)}{(S_n - \omega^2)^2 + \omega^2 R_n^2}, \quad (34)$$

$$x = \operatorname{Re} W_{TD}(j\omega); \quad y = \operatorname{Im} W_{TD}(j\omega), \quad (35)$$

F, G — macierze kolumnowe n -wymiarowe zawierające szukane parametry F_{tr} i G_{tr} .

Rozwiązanie równania (23) ze względu na **F** i **G** kończy etap prac związanych z wyznaczeniem estymat początkowych. Możliwe jest więc kontynuowanie procesu aproksymacji charakterystyk zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 1.

4. Identyfikacja parametrów modelu

W celu wyznaczenia macierzy tłumienia **R** i sztywności **S** układu o n stopniach swobody (wzór 3) należy dokonać analizy n charakterystyk $A - \varphi - f$. Danymi wyjściowymi do rozwiązania tego zadania są parametry powyższych n charakterystyk aproksymujących. Dla pojedynczej charakterystyki zawierającej n rezonansów zbiór tych parametrów obejmuje n wartości F_{tr} , G_{tr} , R_r i S_r . Jak już wcześniej zauważono parametry R_r i S_r z poszczególnych wykresów powinny być sobie równe, gdyż są one funkcją struktury układu, a nie punktu wymuszenia czy też punktu pomiaru sygnału wyjściowego. Powinna więc obowiązywać następująca równość:

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= \dots = R_{1,i} = \dots = R_{1,n} \\ &\vdots \\ R_{r,1} &= \dots = R_{r,i} = \dots = R_{r,n} \\ &\vdots \\ R_{n,1} &= \dots = R_{n,i} = \dots = R_{n,n} \end{aligned} \quad (36)$$

oraz:

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \dots = S_{1,i} = \dots = S_{1,n} \\ &\vdots \\ S_{r,1} &= \dots = S_{r,i} = \dots = S_{r,n} \\ &\vdots \\ S_{n,1} &= \dots = S_{n,i} = \dots = S_{n,n} \end{aligned} \quad (37)$$

gdzie: r — numer rezonansu, i — numer charakterystyki.

W praktyce mogą wystąpić niewielkie ich rozrzuty, stąd do dalszych rozważań przyjęto średnie arytmetyczne powyższych parametrów po wskaźniku „ i ”. W dalszej części pracy

tak uśrednione parametry oznaczano odpowiednio R_r i S_r , a więc tylko z indeksem mówiącym o numerze rezonansu.

Równanie (14) niniejszej pracy dotyczy pojedynczej charakterystyki wyznaczonej w punkcie t badanego układu. Postać równania macierzowego zawierającego wszystkie n charakterystyki jest następująca:

$$\mathbf{W} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}, \quad (38)$$

gdzie: \mathbf{W} — kolumnowa macierz zawierająca n odpowiedzi badanego układu;

\mathbf{D} — kwadratowa macierz elementów typu $F_{r,t} + j\omega G_{r,t}$;

\mathbf{N} — kolumnowa macierz elementów typu $(-\omega^2 + j\omega R_r + S_r)^{-1}$.

Analogicznie, macierzowy zapis charakterystyk wyrażonych wzorem (8) przedstawić można zależnością:

$$\mathbf{W} = \alpha \cdot \mathbf{q}, \quad (39)$$

gdzie: α — kwadratowa macierz współczynników kierunkowych.

Macierz współczynników kierunkowych określa się przez zależności geometryczne wiążące przemieszczenia w danym punkcie w funkcji współrzędnych uogólnionych \mathbf{q} . Opis wyznaczania współczynników α_{ij} przedstawiony jest w pracy [7].

Porównując zależności (38) i (39) oraz podstawiając za \mathbf{q} związek (3) otrzymuje się:

$$\alpha(-\omega^2 \mathbf{I} + j\omega \mathbf{R} + \mathbf{S})^{-1} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}. \quad (40)$$

Po przekształceniu równanie to ma postać:

$$(-\omega^2 \mathbf{I} + j\omega \mathbf{R} + \mathbf{S}) \alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N} = \mathbf{P}. \quad (41)$$

Równanie (41) jest słuszne dla wszystkich częstotliwości, a więc także dla $\omega = 0$. Wówczas:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \alpha^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}, \quad (42)$$

gdzie: \mathbf{F} — kwadratowa macierz parametrów F_{ij} (części rzeczywiste elementów macierzy \mathbf{D}),

\mathbf{T} — kolumnowa macierz parametrów S_r^{-1} .

Po wstawieniu (42) do (41) i odpowiednim przekształceniu otrzymuje się:

$$\mathbf{S}(\alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N} - \alpha^{-1} \mathbf{F} \mathbf{T}) + j\omega \mathbf{R} \alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N} = \omega^2 \mathbf{I} \alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}. \quad (43)$$

Równanie (43) jest równaniem zespolonym. Prawdziwe jest więc ono oddzielnie dla części rzeczywistej i części urojonej. Po rozdzieleniu otrzymuje się dwa macierzowe równania rzeczywiste:

$$\mathbf{S}(\mathbf{A} - \mathbf{C}) - \omega \mathbf{R} \mathbf{B} = \omega^2 \mathbf{I} \mathbf{A}, \quad (44)$$

$$\mathbf{S} \mathbf{B} + \omega \mathbf{R} \mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{I} \mathbf{B}, \quad (45)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \text{Re}(\alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}), \quad (46)$$

$$\mathbf{B} = \text{Im}(\alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}), \quad (47)$$

$$\mathbf{C} = \alpha^{-1} \mathbf{F} \mathbf{T}. \quad (48)$$

Ponieważ macierze kolumnowe \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} są zależne od częstotliwości, można je rozbudować do kwadratowych przez wyznaczanie kolejnych kolumn dla innych częstotliwości.

Mogą to być częstotliwości odpowiadające kolejnym rezonansom. Wówczas powyższe równania przyjmują postać:

$$\mathbf{S}(\mathbf{A}' - \mathbf{C}') - \mathbf{R}\mathbf{B}'' = \mathbf{Z}\mathbf{1}, \quad (49)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{B}' + \mathbf{R}\mathbf{A}'' = \mathbf{V}\mathbf{1}, \quad (50)$$

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{A}(\omega_1), \mathbf{A}(\omega_2), \dots, \mathbf{A}(\omega_n)], \quad (51)$$

$$\mathbf{B}' = [\mathbf{B}(\omega_1), \mathbf{B}(\omega_2), \dots, \mathbf{B}(\omega_n)], \quad (52)$$

$$\mathbf{C}' = [\mathbf{C}(\omega_1), \mathbf{C}(\omega_2), \dots, \mathbf{C}(\omega_n)], \quad (53)$$

$$\mathbf{A}'' = [\omega_1 \cdot \mathbf{A}(\omega_1), \omega_2 \cdot \mathbf{A}(\omega_2), \dots, \omega_n \mathbf{A}(\omega_n)], \quad (54)$$

$$\mathbf{B}'' = [\omega_1 \cdot \mathbf{B}(\omega_1), \omega_2 \mathbf{B}(\omega_2), \dots, \omega_n \mathbf{B}(\omega_n)], \quad (55)$$

$$\mathbf{Z}\mathbf{1} = [\mathbf{Z}(\omega_1), \mathbf{Z}(\omega_2), \dots, \mathbf{Z}(\omega_n)], \quad (56)$$

$$\mathbf{Z}(\omega_i) = \omega_i^2 \mathbf{I}\mathbf{A}(\omega_i), \quad (57)$$

$$\mathbf{V}\mathbf{1} = [\mathbf{V}(\omega_1), \mathbf{V}(\omega_2), \dots, \mathbf{V}(\omega_n)], \quad (58)$$

$$\mathbf{V}(\omega_i) = \omega_i^2 \mathbf{I}\mathbf{B}(\omega_i), \quad (59)$$

$\mathbf{A}(\omega_i)$, $\mathbf{B}(\omega_i)$, $\mathbf{C}(\omega_i)$ — macierze kolumnowe wyznaczone odpowiednio z równań (46 ÷ 48) dla i -tej wartości z wybranego zbioru częstotliwości.

Rozwiązanie tych równań wyrażają następujące równości:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Z}\mathbf{1} \cdot \mathbf{B}''^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{1} \cdot \mathbf{A}''^{-1})[(\mathbf{A}' - \mathbf{C}')\mathbf{B}''^{-1} + \mathbf{B}'\mathbf{A}''^{-1}]^{-1}, \quad (60)$$

oraz

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{1} \cdot \mathbf{A}''^{-1} - [(\mathbf{Z}\mathbf{1} \cdot \mathbf{B}''^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{1} \cdot \mathbf{A}''^{-1})((\mathbf{A}' - \mathbf{C}')\mathbf{B}''^{-1} + \mathbf{B}'\mathbf{A}''^{-1})^{-1}]\mathbf{B}'\mathbf{A}''^{-1}. \quad (61)$$

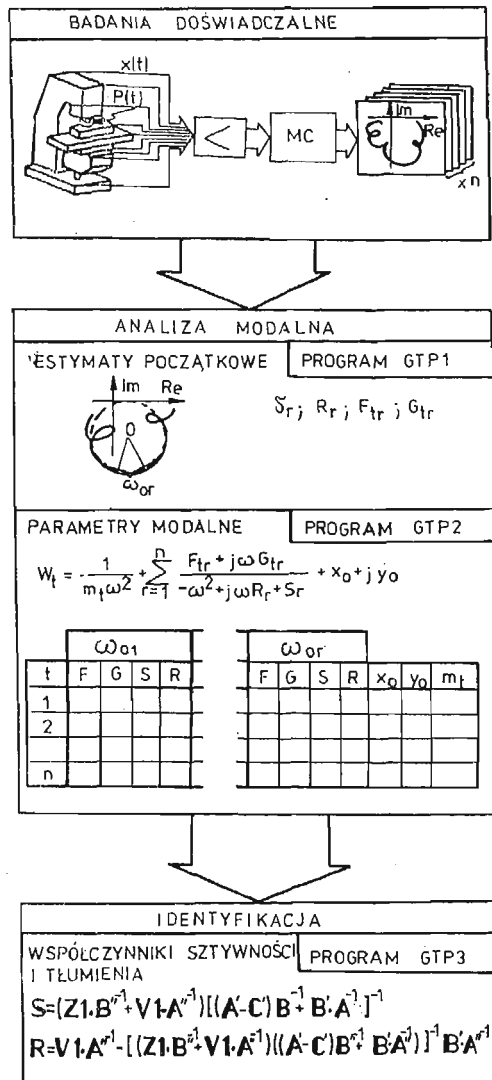
Uzyskano w ten sposób wzory pozwalające wyznaczyć szukane macierze współczynników sztywności i tłumienia układu o n stopniach swobody.

5. Przykład obliczeniowy

W oparciu o przedstawioną w rozdziałach 2 ÷ 4 teorię opracowano programy obliczeniowe na maszynę cyfrową HP 2100A umożliwiające aproksymację doświadczalnie wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych, oraz estymację parametrów modalnych układów o wielu stopniach swobody. Schemat blokowy systemu organizującego współpracę tych programów przedstawiono na rys. 3.

W celu przetestowania zarówno metody jak i programów wykonano obliczenia sprawdzające dla różnych układów.

We wszystkich testach uzyskano dużą dokładność aproksymacji charakterystyk. Jedynie wówczas, gdy wśród innych rezonansów znajduje się taki, który jest znacznie mniejszy od pozostałych (rys. 4), program może ów rezonans pominąć. Powyższy rysunek ilustruje także jakość aproksymacji charakterystyk w przedziałach częstotliwości gdzie rezonanse są wyraźne. Zamieszczono też na nim wyliczone wartości parametrów charakterystyki aproksymującej.



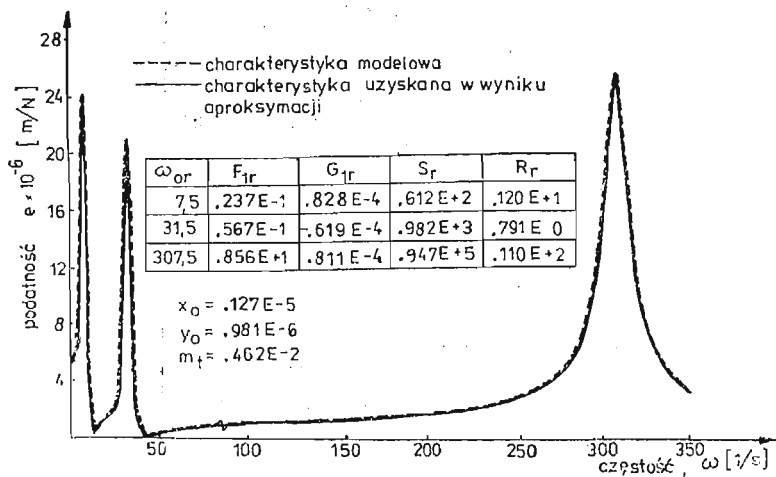
Rys. 3. Schemat organizacyjny prezentowanej metody badawczej.

W ramach prezentowanej pracy cały proces obejmujący aproksymację oraz estymację parametrów modalnych zilustrowano przykładem obliczeniowym układu modelowego o dwóch stopniach swobody (rys. 5). Ten prosty przykład w pełni pokazuje poprawność metody oraz programów obliczeniowych, a przy tym umożliwia łatwą interpretację otrzymanych wyników.

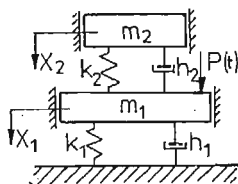
Parametry tego układu przyjęto następująco:

$$m_1 = 1,0 \text{ kg}; \quad h_1 = 8,0 \text{ Ns/m}; \quad k_1 = 1,0E+05 \text{ N/m};$$

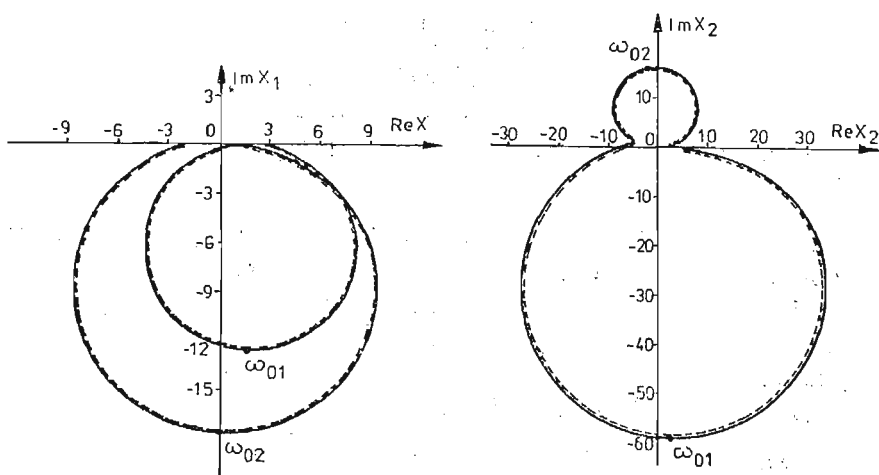
$$m_2 = 0,2 \text{ kg}; \quad h_2 = 2,0 \text{ Ns/m}; \quad k_2 = 1,3E+04 \text{ N/m}.$$



Rys. 4. Charakterystyka aproksymowana (modelowa) i aproksymująca wraz z wyznaczonymi parametrami modalnymi.



Rys 5. Model fizyczny układu dwumasowego o dwóch stopniach swobody.



Rys. 6. Charakterystyki $A-\varphi-f$ przyjętego do obliczeń układu o dwóch stopniach swobody.

Tablica 1. Estymaty początkowe i parametry modalne wyznaczone z aproksymacji układu o dwóch stopniach swobody (rys. 5).

ESTYMATY POCZĄTKOWE															
i	ω_{01}						ω_{02}						y_0		
	F	G	S	R	F	G	S	R	F	G	S	R		m_i	x_0
1	.168E+5	-.448E0	.512E+5	.671E+1	.142E+6	.448E0	.126E+6	.135E+2	.142E+6	.448E0	.126E+6	.135E+2	0	0	0
2	.921E+5	-.208E+1	.514E+5	.649E+1	-.246E+6	.208E+1	.126E+6	.136E+2	-.246E+6	.208E+1	.126E+6	.136E+2	0	0	0
PARAMETRY CHARAKTERYSTYKI APROKSYMUJĄCEJ															
1	.182E+5	.290E+1	.513E+5	.655E+1	.818E+5	-.290E+1	.127E+6	.134E+2	.818E+5	-.290E+1	.127E+6	.134E+2	.106E-3	.538E-2	-.700E-2
2	.862E+5	.540E+1	.513E+5	.655E+1	-.864E+5	-.540E+1	.127E+6	.135E+2	-.864E+5	-.540E+1	.127E+6	.135E+2	.105E-3	.538E-2	-.700E-2

Danymi do obliczeń testujących były analitycznie wyznaczone charakterystyki częstotliwościowe.

Wymagana do analizy ilość charakterystyk nie może być mniejsza od liczby postaci drgań występujących w badanym paśmie częstotliwości. Rozpatrując więc układ o dwóch stopniach swobody należało dysponować dwiema charakterystykami $A-\varphi-f$. Otrzymane z obliczeń charakterystyki modelowe (wyznaczone analitycznie dla przyjętego modelu z rys. 5) i aproksymujące (obliczone przy użyciu programów GTP1 i GTP2) przedstawiono na rys. 6. W obydwu przypadkach charakterystyka aproksymowana (modelowa) zaznaczona jest linią przerywaną, natomiast charakterystyka aproksymująca linię ciągłą. Wyznaczone dla każdej z charakterystyk estymaty wstępne (program GTP1) i parametry charakterystyk aproksymujących (program GTP2) zestawiono w tablicy 1.

Do wyznaczenia estymat wstępnych parametrów R_r wzięto z otoczenia każdego z rezonansów po dwadzieścia punktów a otrzymane zbiory wartości uśredniono.

Wyniki z programu GTP2 uzupełnione informacją o współczynnikach kierunkowych poszczególnych postaci drgań stanowią zbiór danych do dalszych obliczeń — estymacji parametrów modalnych (program GTP3 — rys. 3).

W rozpatrywanym przypadku macierz współczynników kierunkowych ma postać:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tak więc efektem końcowym przeprowadzonych obliczeń są macierze sztywności i tłumienia:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} .112989\text{E}+06 & -.129959\text{E}+05 \\ -.650611\text{E}+05 & .650110\text{E}+05 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} .100088\text{E}+02 & -.199059\text{E}+01 \\ -.100302\text{E}+02 & .999497\text{E}+01 \end{bmatrix}.$$

Dla przyjętego układu modelowego dwumasowego o dwóch stopniach swobody (rys. 5) macierze sztywności \mathbf{S} i tłumień \mathbf{R} są następującej postaci:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{h_1+h_2}{m_1} & -\frac{h_1}{m_1} \\ -\frac{h_2}{m_2} & \frac{h_2}{m_2} \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Po podstawieniu przyjętych do obliczeń wartości liczbowych parametrów uzyskuje się

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} .113000\text{E}+06 & -.130000\text{E}+05 \\ -.650000\text{E}+05 & .650000\text{E}+05 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} .100000\text{E}+02 & -.200000\text{E}+01 \\ -.100000\text{E}+02 & .100000\text{E}+02 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Zgodność wyestymowanych macierzy sztywności i tłumienia (62) z przyjętymi w analizowanym modelu (64) potwierdza poprawność zaprezentowanej w tej pracy metody.

6. Uwagi końcowe

Opracowany w ramach niniejszej pracy system programów obliczeniowych służący do aproksymacji doświadczalnie wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych oraz estymacji parametrów modalnych oparty został o jedną z możliwych metod rozwiązania tego zadania. Przeprowadzone testy wykazują dobrą efektywność systemu zarówno w zakresie czasu obliczeń jak i dokładności wyników. Bardzo dobrą zgodność charakterystyki aproksymowanej i aproksymującej uzyskiwano po wykonaniu trzech do pięciu iteracji.

Prezentowane przykłady pokazują działanie procedur obliczeniowych w odniesieniu do charakterystyk wyznaczonych analitycznie, a więc nie obciążonych błędami towarzyszącymi pomiarom eksperymentalnym. Jest to więc pierwszy etap sprawdzenia metody i pełniejszą informację można będzie uzyskać po opracowaniu wyników badań doświadczalnych. Tego typu testy zostaną przedstawione w następnym artykule będącym kontynuacją niniejszego.

Wyniki otrzymane przy badaniu prezentowanego układu dwumasowego pozwalają sądzić, że przedstawiona metoda może dawać niezłe efekty w zadaniach identyfikacji parametrów układów dynamicznych o znanej strukturze.

W wyniku opracowanych procedur aproksymacyjnych uzyskuje się znaczne zmniejszenie w maszynie cyfowej obszaru pamięci niezbędnej do zapamiętania dużej ilości charakterystyk. Przyczynić się to może do wykorzystania tych procedur przy badaniu postaci drgań własnych złożonych układów rzeczywistych.

Literatura

1. J. BRYNICH, *Spektrální veličiny a modální analýza vlastních kmitů lineárních diskretních tlumených soustav s vice stupni volnosti*, Strojnický Časopis Nr 3, Ročník 28, 1977.
2. J. KRUSZEWSKI i inni, *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, Warszawa Arkady 1984.
3. J. PETERS, M. MERGEAY, *Dynamic Analysis of Machine Tools Using Complex Modal Method*, CIRP, Vol. 25 nr 1 1976, str. 257 - 261.
4. M. WECK, K. TEIPPEL, *Dynamisches Verhalten Spanender Werkzeugmaschinen*, Berlin: Springer-Verlag 1977.
5. R. SNOEYS, D. ROESEMS, W. VANDEURZEN, P. VANHONACKER, *Survey of Modal Analysis Applications*, CIRP, Vol. 28 nr 2, 1976, str. 497 - 511.
6. M. SIELSKI, W. GAWROŃSKI, *Interpretacja parametrów modalnych z charakterystyk amplitudowych układów mechanicznych o małym tłumieniu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej Nr 315 Mechanika 39, Gdańsk 1980.
7. P. GUTOWSKI, *Aproksymacja charakterystyk częstotliwościowych metodą rozkładu na podstawowe formy drgań*, Praca dyplomowa, Politechnika Szczecińska 1977.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА В СЛУЧАЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В статье представлен метод аппроксимации экспериментально определённых амплитудно — фазово — частотных характеристик сложных механических систем. На основании полученных из аппроксимации модальных параметров разработано метод идентификации коэффициентов жёсткости и демпфирования исследованного объекта.

Представленные в статье примеры показывают правильность презентированного метода и показывают на возможность его практического использования при исследовании динамических действительных систем.

Summary

USE OF MODAL ANALYSIS IN THE DYNAMICAL SYSTEMS
OF MANY DEGREES OF FREEDOM

An approximation method for experimentally determined amplitude-phase-frequency characteristics of complex mechanical systems has been presented. On the basis of modal parameters describing particular set of characteristics and obtained from the approximation, the method has been shown of stiffness and damping identification for the examined object. The introduced algorithms made it possible to develop a system of programs. The examples prove the correctness of presented method, and indicate the possibility of applying the method for examining real dynamical systems.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 września 1986 roku.