MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 25, (1987)

РАЗВИТИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ОБОЛОЧЕК В ТРУДАХ КАЗАНСКОЙ ШКОЛЫ

И. Г. Терегулов

Казань, СССР

1. Профессору Х. М. Муштари (1900 - 1981) и профессору К. З. Галимову (1910 - 1986) выпала честь основания Казанской школы нелинейной механики оболочек, многие фундаментальные результаты которой в этой области знания вошли в золотой фонд мировой науки. Первой такого рода работой (1938) была докторская диссертация Х. М. Муштари „Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия" [1, 2], в которой впервые в мировой литературе были проанализированы соотношения теории оболочек для случая прогибов, сравнимых с толщиной оболочки, и были выписаны корректные соотношения этой теории для ортотропного и изотропного линейно упругого тела. Эта пионерская работа вызвала поток исследований в этом направлении. Х. М. Муштари в своих публикациях [3 - 6] дает анализ пределов применимости приближенных теорий, основанных на гипотезах Кирхгофа-Лява (1947), дает вывод точных выражений для конечных деформаций срединной поверхности оболочки в произвольных координатах (1948)

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}+E_{\beta\alpha}+E^{\gamma}_{\alpha.}E_{\beta\gamma}+\omega_\alpha\omega_\beta,\; E_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta - b_{\alpha\beta}w,\; \omega_\alpha = \nabla_\alpha w + b^{\gamma}_{\alpha} u_\gamma \tag{1.1}$$

строит уравнения нелинейного краевого эффекта. К числу фундаментальных исследований следует считать публикацию Х. М. Муштари „Качественное исследование напряженного состояния упругой оболочки при малых деформациях и произвольных смещениях" [6], в которой впервые была дана общепринятая теперь классификация задач теории оболочек на слабый, средний и сильный изгибы и качественный анализ краевого эффекта.

В трудах К. З. Галимова в эти годы интенсивно развиваются методы исследования оболочек при конечных перемещениях и малых деформациях в части построения самих уравнений [7 - 9] и вариационные формулировки задач теории оболочек [10 и др.]. Эти и многие другие результаты Х. М. Муштари, К. З. Галимова и их учеников были подытожены в их совместной книге „Нелинейная теория упругих оболочек" [11], в которой был обобщен богатый опыт Казанской школы и основные результаты, опубликованные в мировой литературе к тому времени.

Большое количество научных результатов в нелинейной механике оболочек были получены учениками Х. М. Муштари и К. З. Галимова — профессором

Корнишиным М. С., Саченковым А. В. и другими, ссылки на которые можно найти в обзорах [12 - 14]. Эти результаты были подытожены в книгах М. С. Корнишина [15], М. С. Корнишина и Ф. С. Исанбаевой [16], И. Г. Терегулова [17], М. А. Ильгамова [18], М. А. Ильгамова, В. А. Иванова, Б. В. Гулина [19], И. В. Свирского [20].

Широко результаты ученых Казанской школы нелинейной механики оболочек освещены в регулярно издаваемых ,,Исследованиях по теории пластин и оболочек'' при Казанском государственном университете (выпуски с I по XУП с 1962 по 1985 г.г.).

В кратком сообщении нет никакой возможности осветить все вопросы, которые были подвергнуты исследованию в трудах Казанских ученых. Если отметить основные направления исследований, то к ним следует отнести следующие.

Общие вопросы нелинейной теории упругости по построению определяющих соотношений и общие вариационные принципы были исследованы в работах К. З. Галимова [21 и др.] и И. Г. Терегулова [22, 23 и др.]. В публикации [24] дается обобщение формул (1.1) для оболочки как трехмерного тела.

Вопросы построения уточненных теорий пластин и оболочек были подвергнуты исследованию в работах Х. М. Муштари и И. Г. Терегулова [24, 25], А. К. Галиньша, А. В. Саченкова с учениками и др. В статье [23] Терегуловым И. Г. впервые дана нелинейная формулировка общего вариационного принципа, который сегодня называется принципом Ху-Вашицу.

Многослойные и трехслойные оболочки были объектом исследования Х. М. Муштари [26], М. А. Ильгамова, Н. К. Галимова, А. Г. Терегулова и др.

Численные методы решения геометрически нелинейных задач развивались М. С. Корнишиным, Ф. С. Исанбаевой, М. С. Ганиевой и другими.

Задачи изгиба и устойчивости физически и геометрически нелинейных задач и задач ползучести изучались И. Г. Терегуловым, М. С. Ганиевой.

Широкий круг задач о сосредоточенных воздействиях и контактном взаимодействии исследован в работах Ю.П. Жигалко, Н. Г. Гурьянова, Ю. П. Артюхина.

А. В. Саченковым был развит удачный метод решения задач статики и динамики оболочек, получивший название теоретико-экспериментального метода, успешно развитый и примененный к широкому кругу прикладных задач Ю. Г. Коноплевым и другими его учениками.

В монографии К. З. Галимова [27] подведен итог его большой работы по построению нелинейной механики линейно упругих оболочек с учетом поперечного сдвига. В книге [28] под научной редакцией К. З. Галимова группой авторов изложены ряд результатов по теории и практике расчетов оболочек с учетом поперечных сдвигов. В книге К. З. Галимова и В. Н. Паймушина [29] излагается развитое ими направление по расчету оболочек сложной геометрии границы оболочки. Об этих и многих других исследованиях можно получить информацию из обзоров [12, 14], и упомянутых выше сборников ,,Исследования по теории пластин и оболочек''. Находится в печати книга К. З. Галимова, В. Н. Паймушина, И. Г. Терегулова ,,Основания нелинейной теории оболочек'', в которой рассматриваются и физические соотношения механики оболочек [30]. Н. С. Ганиев исследует нелинейные задачи изгиба оболочек с учетом пластических деформаций, а С. Б. Черевацкий с учениками изучает несущую способность оболочки из волокнистых композитов.

2. Особо следует отметить одну из наиболее ярких публикаций Х. М. Муштари „Качественное исследование..." [6], в которой дана классификация задач теории оболочек. Не останавливаясь на всех деталях этой малой по объему, но очень содержательной работы, остановимся на отдельных вопросах, представляющих особый интерес. Отправляясь от уравнений равновесия

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} - (b^{\beta}_{\alpha.} + \varkappa^{\beta}_{\alpha.}) N^\alpha + q^\beta = 0, \tag{2.1}$$

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\alpha\beta} + (b_{\alpha\beta} + \varkappa_{\alpha\beta}) T^{\alpha\beta} + q = 0, \tag{2.2}$$

и условий совместности деформаций

$$c^{\beta\gamma}[\nabla_\gamma \varkappa_{\alpha\beta} - (b^{\omega}_{\beta.} + \varkappa^{\omega}_{\beta.})(\nabla_\gamma \varepsilon_{\alpha\omega} + \nabla_\beta \varepsilon_{\gamma\omega} - \nabla_\omega \varepsilon_{\alpha\gamma})] = 0, \tag{2.3}$$

$$c^{\alpha\varrho} c^{\beta\gamma} \left(\nabla_\alpha \nabla_\beta \varepsilon_{\varrho\gamma} + b_{\alpha\beta} \varkappa_{\varrho\gamma} + \frac{1}{2} \varkappa_{\alpha\beta} \varkappa_{\varrho\gamma} \right) - \varepsilon^{\alpha}_{\alpha.} K = 0, \tag{2.4}$$

и сведя все величины к безразмерным путем умножения на величины $E^m L^n$, где m и n — соответствующие степени, E — модуль Юнга, L — характерный поперечный размер оболочки или пластины, Х. М. Муштари подвергает уравнения нелинейной теории упругих оболочек качественному анализу. В качестве основного параметра, с которым сравниваются порядки всех величин, вводится некоторое допустимое значение деформации удлинения ε_p, которое имеет порядок деформации на пределе пропорциональности. Введение этого параметра в качестве базового оправдано тем, что в реальных условиях приходится иметь дело с объектами, которые предназначены для того, чтобы нести некоторые реальные нагрузки, уровень которых определяется допускаемыми величинами напряжений или деформаций, последние из которых имеют порядок ε_p. Попытка оправдать линейную теорию оболочек принятием предположения о том, что „будем рассматривать бесконечно малые перемещения", не выдерживает критики, так как это может привести к очень низкому уровню допускаемых к рассмотрению на основе таких уравнений нагрузок и напряженно-деформированное состояние, которое с достоверностью описывается этими уравнениями, будет очень далеко от реально допускаемых материалом оболочки.

В работе рассматриваются два вида напряженного состояния. Первое считается медленно изменяющимся и для него операции дифференцирования функций, описывающих напряженно-деформированное состояние, удовлетворяют условию

$$f_{,\alpha} \sim f,$$

то есть операция дифференцирования не меняет порядка функции. Другой вид напряженного состояния таков, что

$$f_{,\alpha} \sim \lambda f,$$

где λ — показатель изменяемости напряженного состояния. В процессе выполнения качественного анализа считается, что

$$T^{\alpha\beta} = 2EhA^{\alpha\beta\varrho\gamma}\varepsilon_{\varrho\gamma}, \qquad M^{\alpha\beta} = -\frac{2Eh^3}{3}A^{\alpha\beta\varrho\gamma}\varkappa_{\varrho\gamma},$$

или после обезразмеривания

$$T^{\alpha\beta} \sim hA^{\alpha\beta\varrho\gamma}\varepsilon_{\varrho\gamma}, \qquad M^{\alpha\beta} \sim h^3A^{\alpha\beta\varrho\gamma}\varkappa_{\varrho\gamma},$$

где $2h$ — отнесенная к L толщина, $T^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$ — отнесенные к EL и EL^2 усилия и моменты, $\varkappa_{\alpha\beta}$ — умноженные на L параметры изменения кривизн, знак $\sim$ указывает на одинаковость порядков сопоставляемых величин.

Классификация оболочек по геометрии предложена следующая:

$$b_{\alpha\beta} \sim b \lesssim \varepsilon_p \text{ — пластины малой кривизны,}$$

$$b_{\alpha\beta} \sim b \sim \sqrt{\varepsilon_p} \text{ — оболочки малой крвизны,}$$

$$b_{\alpha\beta} \sim b \sim \varepsilon_p^{1/4} \text{ — пологие оболочки,}$$

$$b_{\alpha\beta} \sim b \sim 1 \text{ — оболочки конечной кривизны.}$$

Характер деформированного состояния Х. М. Муштари классифицирует следующим образом ($\varkappa_{\alpha\beta} \sim \varkappa$, $\omega_\alpha \sim \omega$):

$$\varkappa \sim \varepsilon_p(\omega \sim \varepsilon_p) \text{ — слабый изгиб,}$$

$$\varkappa \sim \sqrt{\varepsilon_p}\left(\omega \sim \sqrt{\varepsilon_p}\right) \text{ — средний изгиб,}$$

$$\varkappa \sim 1 \text{ — сильный изгиб.}$$

При малом изгибе и медленно изменяющемся напряженном состоянии

$$\varkappa \leqslant \varepsilon_p, \qquad \varkappa_{,\alpha} \sim \varkappa, \qquad \varepsilon_{,\alpha} \sim \varepsilon$$

Для оболочек конечной кривизны $b \sim 1$(тип 1а) с погрешностью порядка ε_p в сравнении с единицей приходим к общеизвестным уравнениям линейной задачи о безмоментном напряженном состоянии

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} + q^\beta = 0, \qquad b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + q = 0. \tag{2.5}$$

Для пластин малой кривизны $b \lesssim \varepsilon_p$ (тип 1в) условия совместности приводятся к виду

$$c^{\alpha\varrho}c^{\beta\omega}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varepsilon_{\varrho\omega} = 0, \qquad c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\varkappa_{\beta\gamma} = 0, \tag{2.6}$$

и возможно введение функции прогиба

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\nabla_\beta w, \tag{2.7}$$

тогда как уравнениям (2.5) при $q^\beta = 0$ можно с погрешностью ε_p удовлетворить, полагая

$$T^{\alpha\beta} = c^{\alpha\mu}c^{\beta\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi. \tag{2.8}$$

В итоге уравнения, решающие задачу, примут вид

$$A_1^{\alpha\beta\varrho\gamma}\nabla_\alpha\nabla_\beta\frac{1}{2h}\nabla_\varrho\nabla_\gamma\Phi = 0, \tag{2.9}$$

$$-\frac{2}{3}A_2^{\lambda\delta\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla_\delta(h^3\nabla_\mu\nabla_\nu w) + c^{\mu\beta}c^{\nu\alpha}(\nabla_\alpha\nabla_\beta w + b_{\alpha\beta})\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi + q = 0. \tag{2.10}$$

Здесь обозначено

$$A_1^{\alpha\beta\varrho\gamma} = a^{\alpha\varrho}a^{\beta\gamma} - \sigma c^{\alpha\varrho}c^{\beta\gamma},$$

$$A_2^{\alpha\beta\mu\nu}(1-\sigma^2) = \sigma a^{\alpha\beta}a^{\mu\nu} + (1-\sigma)\, a^{\alpha\mu}a^{\beta\nu},$$

σ — коэффициент Пуассона.

Для оболочки малой кривизны $b \sim \sqrt{\varepsilon_p}$ (тип 1с) условия совместности с погрешностью $\sqrt{\varepsilon_p}$ примут вид

$$c^{\alpha\varrho}c^{\beta\gamma}(\nabla_\alpha \nabla_\beta\, \varepsilon_{\varrho\gamma} + b_{\varrho\gamma}\varkappa_{\alpha\beta}) = 0, \qquad c^{\beta\gamma}\nabla_\gamma \varkappa_{\alpha\beta} = 0.$$

Здесь опять возможно представление (2.7), а первые два уравнения равновесия (2.5_1) при $q^\beta = 0$ удовлетворяются постановкой (2.8). Таким образом, в этом случае имеем систему двух нелинейных уравнений вида (2.9), (2.10).

При среднем изгибе $\varkappa \sim \sqrt{\varepsilon_p}$ и при медленном изменении напряженного состояния ($\varkappa_{,\alpha} \sim \varkappa$, $\varepsilon_{,\alpha} \sim \varepsilon$, $\varkappa h \lesssim \varepsilon_p$) для оболочки конечной кривизны $b \sim 1$ (тип IIа) уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} + q^\beta = 0, \qquad (b_{\alpha\beta} + \varkappa_{\alpha\beta})T^{\alpha\beta} + q = 0,$$

и допускают линеаризацию в последнем уравнении лишь с погрешностью $\sqrt{\varepsilon_p}$, а условия совместности линеаризуются с погрешностью ε_p. до вида

$$\nabla_\gamma G^{\delta\gamma} = 0,\; b_{\delta\gamma} G^{\delta\gamma} = 0,$$

где:

$$G^{\delta\gamma} = -c^{\alpha\delta}c^{\beta\gamma}\varkappa_{\alpha\beta}.$$

Для оболочки малой кривизны $\left(b \lesssim \sqrt{\varepsilon_p}\right)$ (тип 2в) с погрешностью ε_p в сравнении с единицей условия совместности Кодацци (2.6_2) и первые два уравнения (2.5_1) позволяют ввести функцию прогиба w и функцию усилий Φ, тогда как оставшиеся уравнения принимают вид

$$-\frac{2}{3} A_1^{\alpha\beta\varrho\gamma}\nabla_\alpha \nabla_\beta (h^3\nabla\;\; \nabla_\gamma w) + (b_{\alpha\beta} + \varkappa_{\alpha\beta})\, c^{\alpha\mu}c^{\beta\nu}\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + q = 0,$$

$$A_1^{\alpha\beta\varrho\gamma}\nabla_\alpha \nabla_\beta \left(\frac{1}{2h}\nabla_\varrho \nabla_\gamma \Phi\right) + c^{\alpha\varrho}c^{\beta\gamma}(\nabla_\varrho \nabla_\gamma w + b_{\varrho\gamma})\nabla_\alpha \nabla_\beta w = 0.$$

Эти уравнения не удается линеаризовать даже пренебрегая величинами порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$.

Особенно интересны выводы по качественному анализу краевого эффекта, где, как оказалось, нелинейности в ряде случаев играют существенную роль.

Пусть линия $x_1 = \mathrm{const}$ совпадает с линией границы срединной поверхности и не касается асимптотической линии этой поверхности и

$$b_{22} \sim \varepsilon_p^\beta, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta,2} \sim \varepsilon_{\alpha\beta} \sim \varepsilon_p^m, \qquad \varkappa_{11} \sim \varepsilon_p^{n}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta,1} \sim \varepsilon_{\alpha\beta}\,\varepsilon_p^{-s},$$

$$\beta \geqslant 0, \qquad m \geqslant 1, \qquad n \geqslant 0, \qquad s \geqslant 1/4.$$

Пусть при этом

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \sim h\varkappa_{11}\,\varepsilon_p^t \qquad \text{или} \qquad h \sim \varepsilon_p^{m-n-t}.$$

Из уравнения изгиба (2.2) следует, что

$$\beta = m-n-2s-t,$$

тогда как из условия совместности деформаций (2.4) (условие Гаусса) следует, что

$$\beta = m-n-2s.$$

Сопоставляя эти два последние равенства, имеем

$$\beta = m-n-2s, \quad t = 0.$$

Таким образом, в зоне краевого эффекта

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \sim h\varkappa_{11},$$

4 мембранные деформации одного порядка с изгибными. Из первых двух уравнений равновесия (2.1) и условий совместности Кодацци (2.3) следует, что

а) для цилиндрических и близких к ним оболочек

$$T_{11} \sim T_{12}\,\varepsilon_p^s \sim T_{22}\,\varepsilon_p^{2s}, \quad \varkappa_{22} \sim \varkappa_{12}\,\varepsilon_p^s \sim \varkappa_{11}\,\varepsilon_p^{2s},$$

б) для нецилиндрических оболочек

$$T_{11} \sim T_{12} \sim T_{22}\,\varepsilon_p^s, \quad \varkappa_{22} \sim \varkappa_{12} \sim \varkappa_{11}\,\varepsilon_p^s.$$

Таким образом, при $s \geqslant 1/4$

$$T_{22} \gg T_{11}, \quad \varkappa_{11} \gg \varkappa_{22}.$$

Для оболочек конечной кривизны $b \sim 1$ ($\beta = 0$) при $\varepsilon_{\alpha\beta} \sim \varepsilon_p$ ($m = 1$) и при $h \sim \varepsilon_p$ (тонкая оболочка) имеем

$$\beta = m-n-2s = 0, \quad m-n-t = 1.$$

откуда в силу $m = 1$, $t = 0$ следует, что $n = 0$,$s = 1/2$. Таким образом,

$$\varkappa_{22} \sim \varepsilon_p \quad \text{для цилиндрических оболочек,}$$

$$\varkappa_{22} \sim \sqrt{\varepsilon_p} \sim \sqrt{h} \quad \text{для нецилиндрических оболочек.}$$

В обоих случаях с погрешностью не более $\sqrt{\varepsilon_p}$ в уравнениях можно положить $b_{22}+\varkappa_{22} \simeq b_{22}$ и тем самым линеаризовать к уравнения в усилиях и деформациях. Отметим, что в обоих случаях

$$\omega^2 \sim (\varkappa_{11}\,\varepsilon_p^s)^2 \sim \varepsilon_p^{2s} \sim \varepsilon_p,$$

и выражение деформации через перемещения должно быть сохранено в нелинейном виде

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}+E_{\beta\alpha}+\omega_\alpha\omega_\beta.$$

В случае пологой оболочки $b \sim \varepsilon_p^{1/4}$ при $h \sim \varepsilon_p$ (тонкая оболочка) получим $n = 0$, $s = 3/8$:

а) $\varkappa_{22} \sim \varepsilon_p^{3/8}$ для нецилиндрических оболочек и $\varkappa_{22}/b_{22} \sim \varepsilon_p^{1/8}$, следовательно, уравнение изгиба следует писать в нелинейном виде (2.2), так как пренебрежение величиной порядка $\varepsilon_p^{1/8}$ в сравнении с единицей внесет большую погрешность;

б) $\varkappa_{22} \sim \varepsilon_p^{3/4}$ для цилиндрических оболочек и $\varkappa_{22}/b_{22} \sim \sqrt{\varepsilon_p}$ Таким образом, в этом случае линеаризация уравнений возможна с погрешностью $\sqrt{\varepsilon_p}$. Отметим, что линеаризация выражения ε_{11} через перемещения возможна лишь с погрешностью $\varepsilon_p^{1/4}$.

Таким образом, в общем случае задача о краевом эффекте оказывается нелинейной.

В 1965 году в статье [31] была дана классификация задач теории оболочек, где в качестве малого параметра использовалась величина

$$\Theta = \max\left(\frac{h}{L}, \quad \sqrt{\frac{h}{R}}, \quad \sqrt{\varepsilon_p}\right).$$

В 1972 г. в работе [32] эта классификация была развита введением еще одного параметра и

$$\Theta = \max\left(\frac{h}{l}, \quad \frac{h}{L}, \quad \sqrt{\frac{h}{R}}, \quad \sqrt{\varepsilon_p}\right),$$

где l — длина волны изпенения напряженного состояния. Очевидно, что это дало возможность вложить в предложенную классификацию и явления типа краевого эффекта. О преимуществах перед этими классификациями введения как основного малого параметра величины $\varepsilon_{\alpha\beta} \sim \varepsilon_p$ сказано выше.

В 1980 году в статье [33] В. Петрашкевичем предложено расширение классификации характера изгибания, рассмотренного Х. М. Муштари, и предложено считать

$$\omega \leqslant 0(\Theta^2) \text{ — малое вращение,}$$
$$\omega = 0(\Theta) \text{ — среднее вращение,}$$
$$\omega = 0(\sqrt{\Theta}) \text{ — большое вращение,}$$
$$\omega = 0(1) \text{ — конечное вращение}$$

Эта классификация при $\Theta^2 \sim \varepsilon_p$ представляется корректной и введение большего вращения условием $\omega = 0(\sqrt{\Theta}) = 0(\varepsilon_p^{1/4})$ выделяет в особый класс пологие оболочки при их большом изгибе.

3. В последние годы в Казани развивается теория построения определяющих соотношений для анизотропных оболочек, в частности, для композитных, образованных из монослоев однонаправленно армированной структуры [22]. Этими исследованиями восполянется пробел в нелинейной механике тонких оболочек в части построения общей теории для определяющих (физических) соотношений, тогда как вопросы теории геометрической нелинейности на сегодня достаточно глубоко разработаны. В части развития исследований нелинейных задач, связанных с конечными вращениями, следует отметить успехи Польской школы механики оболочек во главе с проф. В. Петрашкевичем.

а. На поверхности приведения S_0 в недеформированном состоянии введем систему лагранжевых координат $x^\alpha (\alpha = 1, 2)$ с метрическим тензором $a_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{\rho}_\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta)$ и координатными векторами $\boldsymbol{\rho}_\alpha = \partial\boldsymbol{\rho}/\partial x^\alpha$. На эквидистантных по нормальной к S_0 координате $z = x^3$ поверхностях S_z с ортом нормали $\boldsymbol{m}$ координаты x^α имеют метрический тензор $g_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\beta)$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} + z\boldsymbol{m}$, и координатные векторы $\boldsymbol{r}_\alpha = \partial\boldsymbol{r}/\partial x^\alpha$ При этом $g_{33} = 1$, $g_{\alpha 3} = 0$. В деформированном состоянии на S_0^* имеем $a_{\alpha\beta}^* = (\boldsymbol{\rho}_\alpha^* \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta^*)$, $\boldsymbol{\rho}_\alpha^* = \partial\boldsymbol{\rho}^*/\partial x^\alpha$, $\boldsymbol{\rho}^* = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{u}$, а на S_z^* имеем

$$g_{\alpha\beta}^* = (\boldsymbol{r}_\alpha^* \cdot \boldsymbol{r}_\beta^*), \quad \boldsymbol{r}_\alpha^* = \partial\boldsymbol{r}^*/\partial x^\alpha, \quad \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u},$$

$$g^*_{\alpha 3} = (r^*_\alpha \cdot r^*_3), \quad g^*_{33} = (r^*_3 \cdot r^*_3),$$
$$u = U|_{z=0}.$$

Характеристика деформации Грина

$$\varepsilon_{ik} = (g^*_{ik} - g_{ik})/2$$

отнесена к начальному состоянию и образует тензор

$$\underline{\underline{E}} = \varepsilon_{ik} r^i r^k.$$

Тензор напряжений Коши $\underline{\underline{\Sigma}}$ имеет составляющие σ^{ik} в деформированном базисе и

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \sigma^{ik} r^*_i r^*_k,$$

а тензор условных напряжений $\underline{\underline{T}}$ имеет в недеформированном базисе r_i составляющие t^{ik} и $\underline{\underline{T}} = t^{ik} r_i r_k$ при выполнении условий $t^{ik} = \sigma^{ik}/\varrho_*$,, где ϱ_* — плотность среды в деформированном состоянии. В статье [22] показано, что в случае полного рассеяния в виде тепла работы внутренних напряжений на приращениях деформаций ползучести $\delta\varepsilon^{(c)}_{ik}$ и пластических деформаций $\delta\varepsilon^{(p)}_{ik}$ имеет место обобщение формул Грина

$$t^{ik} = \frac{\partial F}{\partial e_{ik}}$$

где $\delta e_{ik} = d\varepsilon_{ik} - \delta\varepsilon^{(p)}_{ik} - \delta\varepsilon^{(c)}_{ik}$, ε_{ik} — полные деформации, F — свободная энергия, δe_{ik} — приращения упругих деформаций. Здесь знак $\delta(\ldots)$ указывает на то, что приращение соответствующей величины не есть полный дифференциал, а полное приращение соответствующей величины зависит от пути, по которому протекает процесс.

Формула (3.1), обощающая формулу Грина на случай наличия неупругих приращений деформаций и следует из того, что для плотности свободной энергии F а случае наличия тепловых процессов имеем

$$\begin{aligned} \varrho_* dF &= \sigma^{ik} d\varepsilon_{ik} - \varrho_* s\, dT - \sum_j P^j d\chi_j, \\ \varrho_* T ds &= (\varrho_* r - \nabla i q^i_*) dt + \sum_j P^j d\chi_j, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где s — плотность энтропии, T — абсолютная температура, r — интенсивность источников тепла, $q = q^i_* r^*_i$ — вектор потока тепла, P^j — составляющие обобщенных сил, χ_j — обобщенные перемещения, на которых силы P^j производят работу, рассеиваемую в виде тепла. В исследовании [34] показано, что не менее 90% механической работы на пластических деформациях переходят в тепловую энергию. Так как механизм деформации при ползучести однаков с механизмом пластического деформирования, то и при ползучести следует ожидать перехода работы внутренних напряжений на деформациях ползучести в тепло. Таким образом, предположим, что механическая энергия $\sigma^{ik}\delta\varepsilon^{(p)}_{ik}$ и энергия $\sigma^{ik}\delta\varepsilon^{(c)}_{ik}$ переходят в тепло. Тогда согласно (3.2)

$$\varrho_* dF = \sigma^{ik}(d\varepsilon_{ik} - \delta\varepsilon^{(p)}_{ik} - \delta\varepsilon^{(c)}_{ik}) - \varrho_* s\, dT,$$

где принято

$$P^1 d\chi_1 = \sigma^{ik}\delta\varepsilon_{ik}^{(p)}, \qquad P^2 d\chi_2 = \sigma^{ik}\delta\varepsilon_{ik}^{(c)}.$$

Из сказанного следует (1).

в. Функция F зависит от инвариантов деформированного состояния, температуры T и, может быть, от других параметров процесса. В качестве инвариантов деформированного состояния выберем величины [22]

$$\begin{gathered} I_1 = e^{\alpha}_{\alpha.} + A^{\alpha\beta}_{(1)} e_{\alpha\beta}, \qquad I_2 = e_{\alpha\beta} e^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(e^{\alpha}_{\alpha.})^2 - \frac{1}{2}(A^{\alpha\beta}_{(1)} e_{\alpha\beta})^2, \\ I_3 = e^{\alpha}_{\alpha.} - A^{\alpha\beta}_{(1)} e_{\alpha\beta}, \qquad I_4 = \gamma^{\alpha}\gamma_{\alpha} + A^{\alpha\beta}_{(2)}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}, \\ I_5 = \gamma^{\alpha}\gamma_{\alpha} - A^{\alpha\beta}_{(2)}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}, \qquad I = e_{33}, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $A^{\alpha\beta}_{(i)} g_{\alpha\beta} = 0$, $\gamma_{\alpha} = 2e_{\alpha 3}$. Касательная к S_z плоскость есть плоскость симметрии механических свойств. В этом случае для t^{ik} согласно (3.1) имеем

$$\begin{gathered} \varrho t^{\alpha\beta} = A_1(g^{\alpha\beta} + A^{\alpha\beta}_{(1)}) + 2A_2\left(e^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} e^{\varrho}_{\varrho.} - \frac{1}{2} A^{\alpha\beta}_{(1)} A^{\varrho\omega}_{(1)} e_{\varrho\omega}\right) + A_3(g^{\alpha\beta} - A^{\alpha\beta}_{(1)}), \\ \varrho t^{\alpha} = 2A_4(\gamma^{\alpha} + A^{\alpha\beta}_{(2)}\gamma_{\beta}) + 2A_5(\gamma^{\alpha} - A^{\alpha\beta}_{(2)}\gamma_{\beta}); \; \varrho t^{33} = \varrho \frac{\partial F}{\partial e_{33}} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $t^{\alpha} = t^{\alpha 3}$, $A_i = \varrho \partial F/\partial I_i$. Для ортотропного материала $A^{\alpha\beta}_{(1)} = A^{\alpha\beta}_{(2)} = A^{\alpha\beta}$ и в осях ортотропии $A_{12} = 0$.

Для тонких оболочек $t^{33} \ll t^{11}, t^{22}$ и, следовательно, $\partial F/\partial e_{33} \simeq 0$. Таким образом, F от e_{33} не зависит. Полагая поперечную сдвиговую деформацию малой ($\gamma_{\alpha} \simeq 0$) получим

$$F = F(I_1, I_2, I_3, T)$$

В осях ортотропии для локальных координат с характеристиками $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$ имеем $A_{11} = -A_{22} = 1$, $A_{12} = 0$

$$I_1 = 2e_{11}, \qquad I_3 = 2e_{22}, \qquad I_2 = 2e_{12}^2.$$

Примем, что система напряжений $t^{\alpha\beta}$ равновесная, приращения $\delta e_{\alpha\beta}$ кинематически возможные.

В силу того, что $\delta e_{\alpha\beta}$ — деформации упругие при $\varrho\delta t^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\varrho\gamma}\delta e_{\varrho\gamma}$ имеем

$$\delta t^{\alpha\beta}\delta e_{\alpha\beta} \geqslant 0.$$

Пусть $\varrho\delta t^{\alpha\beta}\delta e_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\varrho\gamma}\delta e_{\alpha\beta}\delta e_{\varrho\gamma} = \sum\limits_{i,k} A_{ik}\delta e_i \delta e_k$, где $e_{11} = e_1$, $e_{22} = e_2$, $e_{12} = e_3$. Матрица коэффициентов A_{ik} порождает положительно определенную квадратичную форму. Обозначим

$$A_{11} = \tilde{E}_1, \qquad A_{12} = \tilde{\mu}_{12}\tilde{E}_1, \qquad A_{13} = \tilde{\mu}_{13}\tilde{E}_1 \text{ и т.д.}.$$

Тогда матрица $\|A_{ik}\|$ примет вид

$$\|A_{ik}\| = \begin{Vmatrix} \tilde{E}_1, & \tilde{\mu}_{12}\tilde{E}_1, & \tilde{\mu}_{13}\tilde{E}_1 \\ \tilde{\mu}_{21}\tilde{E}_1, & \tilde{E}_2, & \tilde{\mu}_{23}\tilde{E}_2 \\ \tilde{\mu}_{31}\tilde{E}_3, & \tilde{\mu}_{23}\tilde{E}_3, & \tilde{E}_3 \end{Vmatrix},$$

где $\tilde{\mu}_{ik}$, $\tilde{E}_i$ — условные модули упругости. При этом $\tilde{E}_1$ имеет порядок модуля на растяжение E_1, $\tilde{E}_2$ — порядка модуля E_2, $\tilde{E}_3$ — порядка модуля сдвига G_{12}: $\tilde{E}_1 \sim E_1$, $\tilde{E}_2 \sim E_2$, $\tilde{E}_3 \sim G_{12}$.

Обозначим

$$E_2/E_1 = \eta^2, \quad G_{12}/E_2 \sim \varkappa^2.$$

Условие симметрии матрицы $||A_{ik}||$ дает $\tilde{\mu}_{ik}\tilde{E}_i = \tilde{\mu}_{ki}\tilde{E}_k$; $i, k = 1, 2, 3$ (не суммировать), а условие положительной определенности квадратичной формы $\sum_{i,k} A_{ik}\,\delta e_i\,\delta e_k$ — к условиям $\tilde{E}_i > 0$, $\tilde{\mu}_{ik}\tilde{\mu}_{ki} < 1$; $i, k = 1, 2, 3$ (не суммировать) Например, из условий $\tilde{\mu}_{12}\tilde{\mu}_{21} < 1$, $\tilde{\mu}_{12}\tilde{E}_1 = \tilde{\mu}_{21}\tilde{E}_2$ следует, что

$$\tilde{\mu}_{12} \leqslant \eta, \ \tilde{\mu}_{12}\tilde{E}_1 = \tilde{\mu}_{21}\tilde{E}_2 \sim \eta E_1.$$

Выполняя подобные оценки для всех членов матрицы $||A_{ik}||$, получим, что можно записать следующее соотношение порядков

$$||A_{ik}|| \sim E_1 \begin{Vmatrix} 1, & \eta, & \varkappa\eta \\ \eta, & \eta^2, & \varkappa\eta^2 \\ \varkappa\eta, & \varkappa\eta^2, & \varkappa^2\eta^2 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, если $B_i = \varrho\partial F/\partial e_i$, то

$$\frac{\partial B_1}{\partial e_1} \sim E_1, \quad \frac{\partial B_1}{\partial e_2} \sim \eta E_1, \quad \frac{\partial B_1}{\partial e_3} \sim \varkappa\eta E_1,$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial e_1} \sim \eta E_1, \quad \frac{\partial B_2}{\partial e_2} \sim \eta^2 E_1, \quad \frac{\partial B_2}{\partial e_3} \sim \varkappa\eta^2 E_1,$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial e_1} \sim \varkappa\eta E_1, \quad \frac{\partial B_3}{\partial e_2} \sim \varkappa\eta^2 E_1, \quad \frac{\partial B_3}{\partial e_3} \sim \varkappa^2\eta^2 E_1.$$

Асимптотически при $\eta \to 0$ имеем, что существенным будет лишь один член

$$\partial B_1/\partial e_1 \sim E_1. \tag{3.5}$$

Асимптотика $\varkappa \to 0$ дает существенные члены

$$\frac{\partial B_1}{\partial e_1} \sim E_1, \quad \frac{\partial B_1}{\partial e_2} \sim \eta E_1, \quad \frac{\partial B_2}{\partial e_1} \sim \eta E_1, \quad \frac{\partial B_2}{\partial e_2} \sim \eta^2 E_1. \tag{3.6}$$

Случай (3.5) соответствует нитяной модели однонаправленно армированного слоя. Случай (3.6) соответствует ортогонально армированному слою с нулевой сдвиговой жесткостью. Для стеклопластиков однонаправленного армирования в направлении оси $0x_1$; $E_1 \simeq 4600$ МПa, $E_2 \simeq 18000$ МПa, $G_{12} \simeq 4500$ МПa и, следовательно,

$$\eta^2 \sim 1/3, \quad \varkappa^2 \sim 1/3, \quad \eta \sim \varkappa.$$

Хотя 1/3 и не мало в сравнении с единицей, однако в силу асимптотического подхода по малому параметру приведенные оценки корректны.

Для $\eta \sim \varkappa$ из (3) следует, что $\partial B_1/\partial e_1$ в асимптотическом разложении начинается с членов, содержащих η в нулевой степени, $\partial B_1/\partial e_2$ — с членов, содержащих первые степени η, $\partial B_1/\partial e_3$ — с членов, содержащих квадраты η. Следовательно,

$$B_1 = \varphi_0(e_1) + \eta\varphi_1(e_1, e_2) + \eta^2\varphi_2(e_1, e_2, e_3, \eta)$$

Здесь φ_2 в асимптотическом разложении по η начинается с членов, содержащих η в нулевой степени:

$$\varphi_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2,k}\eta^k.$$

Аналогично

$$B_2 = \eta\psi_1(e_1)+\eta^2\psi_2(e_1, e_2)+\eta^3\psi_3(e_1, e_2, e_3, \eta)$$

$$B_3 = \eta^2\chi_2(e_1)+\eta^3\chi_3(e_1, e_2)+\eta\chi_4(e_1, e_2, e_3, \eta)$$

$$\psi_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{3,k}\eta^k, \qquad \chi_4 = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{4,k}\eta^k.$$

В асимптотическом разложении для функций B_i ограничимся случаем $\varphi_{2,k} = \psi_{3,k} = \chi_{4,k} = 0$ при $k \geqslant 1$. Из условий

$$\frac{\partial B_i}{\partial e_j} = \frac{\partial B_j}{\partial e_i}$$

с учетом того, что при e_{12} деформации e_{11}, e_{22} не могут вызвать напряжений t_{12}, заключаем, что

$$\varrho t_{11} = B_{11}(e_{11}, e_{22})e_{11}+B_{12}(e_{11}, e_{22})e_{22},$$

$$\varrho t_{22} = B_{21}(e_{11}, e_{22})e_{11}+B_{22}(e_{11}, e_{22})e_{22},$$

$$\varrho t_{12} = B_3(e_{12})$$

Если в асимптотических разложениях для B_1 и B_2 ограничиться двумя первыми членами, то определяющие соотношения должны быть представлены в виде

$$\varrho t_{11} = B_{11}(e_{11})e_{11}+B_{12}(e_{11})e_{22},$$

$$\varrho t_{22} = B_{21}(e_{11})e_{11}+B_{22}(e_{22})e_{22},$$

$$\varrho t_{12} = B_{33}(e_{12})e_{12}$$

В простейшем случае, когда в разложении для B_1 сохраняется один член, то есть $B_1 = \varphi_0(e_1)$, определяющие соотношения приводятся к виду

$$\varrho t_{11} = B_{11}(e_{11})e_{11}, \quad \varrho t_{22} = B_{22}(e_{22})e_{22}, \quad \varrho t_{12} = B_{33}(e_{12})e_{12}.$$

Последние совпадают с соотношениями, предложенными в работе [35].

с. Опишем процедуру экспериментального определения функций $A_i(I_j)$ при ограничениях $\gamma_\alpha \simeq 0$, $\delta\varepsilon_{ik}^{(p)} = 0$, $\delta\varepsilon_{ik}^{(c)} = 0$, т.е. в случае малых поперечных сдвигов. Для усилий, отнесенных к начальному недеформированному состоянию и в недеформированной площади, получим

$$T^{11} = \int_{-h}^{h} \varrho t^{11}dz, \quad T^{22} = \int_{-h}^{h} \varrho t^{22}dz, \quad T^{12} = \int_{-h}^{h} \varrho t^{12}dz, \tag{3.7}$$

где $2h$ — толщина оболочки. Пусть цилиндрическая оболочка изготовлена намоткой однонаправленно армированной лентой при углах намотки $\varphi_k = \pm\varphi$, где φ_k — углы, которые образуют направления армирования с образующей цилиндра, при равном количестве слоев в обоих направлениях. При этом для случая $e_{12} = 0$ из (3.3) имеем

$$I_1^{\pm} = 2(e_{11}\cos^2\varphi + e_{22}\sin^2\varphi), \quad I_3^{\pm} = 2(e_{11}\sin^2\varphi + e_{22}\cos^2\varphi),$$
$$2I_2^{\pm} = (e_{11} - e_{22})^2\sin^2 2\varphi,$$
$$\Lambda_{11}^k = -\Lambda_{22}^k = \cos 2\varphi_k, \quad \Lambda_{12}^k = \sin 2\varphi_k$$

Так как I_j от номера слоя не зависят, то согласно (3.4), (3.7)

$$\begin{aligned} T_{11} &= 2h[A_1\cdot(1+\cos 2\varphi) + A_3\cdot(1-\cos 2\varphi)] + 2hA_2\cdot(e_{11}-e_{22})\sin^2 2\varphi, \\ T_{22} &= 2h[A_1(1-\cos 2\varphi) + A_3(1+\cos 2\varphi)] - 2hA_2(e_{11}-e_{22})\sin^2 2\varphi. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для определения $A_2(I_2)$ отсюда при $\varphi = \pi/4$ получим формулу

$$4hA_2(e_{22} - e_{11}) = T_{22} - T_{11} \tag{3.9}$$

В пределах точности рассмотренного ранее асимптотического приближения A_2 зависит лишь от I_2, для которого при $\varphi = \pi/4$ имеем

$$2I_2 = (e_{11} - e_{22})^2.$$

При T_{11}—$T_{22} > 0$ из (3.9) для A_2 получим

$$A_2(I_2) = \frac{T_{11} - T_{22}}{4h\sqrt{2I_2}}.$$

В пределах той же асимптотической точности $A_1 = A_1(I_1, I_3)$, $A_3 = A_3(I_1, I_3)$. Для определения этих функций из (3.8) при $\varphi \neq \pi/4$ и известной функции $A_2(I_2)$ имеем

$$\begin{aligned} 4hA_1\cos^2\varphi &= T_{11}\cos^2\varphi - T_{22}\sin^2\varphi - 2hA_2(e_{11}-e_{22})\sin^2 2\varphi, \\ 4hA_3\cos^2\varphi &= -T_{11}\sin^2\varphi + T_{22}\cos^2\varphi + 2hA_2(e_{11}-e_{22})\sin^2 2\varphi. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь все входящие явно e_{11}, e_{22}, I_2 следует выразить через I_1 и I_3 согласно (3.3), то есть

$$2e_{11}\cos 2\varphi = I_1\cos^2\varphi - I_3\sin^2\varphi,$$
$$2e_{22}\cos 2\varphi = I_3\cos^2\varphi - I_1\sin^2\varphi,$$
$$8I_2\cos^2 2\varphi = (I_1 - I_3)^2\sin^2 2\varphi$$

Для экспериментального определения функций A_1, A_2, A_3 необходимо установить связь между замеряемыми в эксперименте величинами относительного удлинения

$$\Delta_1 = \frac{ds_1^* - ds_1}{ds_1}, \quad \Delta_2 = \frac{ds - ds_2}{ds_2}$$

и величинами e_{11}, e_{22}, которая дается в виде

$$(\Delta_1 + 1)^2 = 1 + 2e_{11}, \quad (\Delta_2 + 1)^2 = 1 + 2e_{11}$$

С другой стороны, если к цилиндру приложена осевая растягивающая сила P и внутреннее давление q, то полная осевая сила при закрытых днищах $Q = P + \pi R_*^2 q$ создает в цилиндре истинные напряжения

$$\sigma_{11}^{\text{физ}} = \frac{Q}{2\pi R_*\cdot 2h_*}, \quad \sigma_{22}^{\text{физ}} = \frac{qR_*}{2h_*}.$$

Здесь $R_* = R(1+\Delta_2)$, $h_* = h(1+\Delta_3)$. С учетом перехода

$$\iint\limits_{S_*}(\ldots)dS_* = \iint\limits_{S}(\ldots)\sqrt{\frac{a_*}{a}}\,dS$$

из вариационного уравнения принципа возможных перемещений при выполнении уравнений равновесия получим

$$\iint\limits_{S}\left[P_*^s\sqrt{\frac{a_*}{a}} - \varrho t^{ik}\left(r_i + \frac{\partial u}{\partial x^i}\right)n_k\right]\delta u\, dS = 0.$$

Здесь P_*^s — вектор напряжения на срезе с границей S_*. Отсюда следует, что в случае $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$

$$\sigma_{11}^{физ}(1+\Delta_2)(1+\Delta_3) - \varrho t^{11}(1+\Delta_1) = 0$$

а в случае $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$

$$\sigma_{22}^{физ}(1+\Delta_1)(1+\Delta_3) - \varrho t^{22}(1+\Delta_2) = 0$$

Таким образом,

$$T_{11} = \int_{-h}^{h} \varrho t_{11}\, dt = \frac{P}{2\pi(R1+\Delta_1)} + \frac{qR(1+\Delta_2)}{2(1+\Delta_1)},$$

$$T_{22} = \int_{-h}^{h} \varrho t_{22}\, dt = qR(1+\Delta_1),$$

что дает возможность входящие в (3.9) и (3.10) величины T_{11}, T_{22} выразить через замеряемые в эксперименте P, q, Δ_1, Δ_2.

Статья написана по материалам доклада, зачитанного на IУ Польской конференции „Оболочечные конструкции, теория и припомения", XI 1986 г., Шклярска Порэмба, ПНР.

Литература

1. Х. М. Муштари, *Некоторые обобщения теории тонких и оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия*, Известия физ. -мат. общества при КГУ, т. XI, сер. 3, стр. 71 - 150, Казань, 1938.
2. Х. М. Муштари, *Некоторые обобщения теории тонких оболочек*, ПММ, т. II, № 4, стр. 439 - 456, 1939.
3. Х. М. Муштари, *Об области применимости приближенной теории оболочек*. ДАН СССР, т. 58, 1947.
4. Х. М. Муштари, *Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа-Лява*. ПММ, т. XI, № 5, 1947.
5. Х. М. Муштари, *Об определении деформаций срединной поверхности оболочки при произвольных изгибах*. Тр. КХТИ, № 13, 1948, Казань.
6. Х. М. Муштари, *Качественное исследование напряженного состояния упругой оболочки при малых деформациях и произвольных смещениях*. ПММ, т. XIII, № 2, 1949.
7. К. З. Галимов, *Уравнения равновесия теории упругости при конечных перемещениях и их приложения к теории упругости*. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ. -мат. наук, № I, 1948.

8. К. З. Галимов, *Общая теория упругих оболочек при конечных перемещениях.* Там же., № 2, 1950.
9. К. З. Галимов, *К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях.* ПММ, т. ХУ, № 6, 1951.
10. К. З. Галимов, *К вариационным методам решения задач нелинейной теории пластин и оболочек.* Изв. Казанского филлала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 10, 1956.
11. Х. М. Муштари, К. З. Галимов, *Нелинейная теория упругих оболочек.* Таткнигоиздат, 1957.
12. К. З. Галимов, Р. Г. Суркин, *О работах Казанских ученых по теории пластин и оболочек.* Сб. „Иссл. по теории пластин и оболочек'', № 5, Изд. КГУ, Казань, 1967.
13. К. З. Галимов, *О некоторых направлениях развития механики деформируемого тела в Казани.* Сб. „Исследования по теории пластин и оболочек'', № 9, Изд. КГУ, Казань, 1972.
14. К. З. Галимов, *О некоторых направлениях развития механики деформируемого твердого тела в Казани.* Сб. „Исследования по теории пластин и оболочек'', вып. 14, 1979, стр. II - 82.
15. М. С. Корнишин, *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения.* Изд. „Наука'', М., 1964.
16. М. С. Корнишин, Ф. С. Исанбаева, *Гибкие пластины и панели.* М. „Наука'', 1968.
17. И. Г. Терегулов, *Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести.* М. „Наука'', 1969.
18. М. А. Ильгамов, *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ.* М. „Наука'', 1969.
19. М. А. Ильгамов, В. А. Иванов, Б. В. Гулин., *Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем.* М. „Наука'', 1977.
20. И. В. Свирский, *Методы типа Бубнова-Галеркина и последовательных приближений.* М. „Наука'', 1968.
21. К. З. Галимов, *К теории конечных деформаций.* Уч. записки КГУ, т. 109, кн. I, 1949, стр. 35 - 71. Казань.
22. И. Г. Терегулов, *Определяющие соотношения для физически нелинейных анизотропных и композитных оболочек при конечных деформациях.* Часть I, Известия ВУЗов, серия „Математика'', № 5, 1985, стр. 33 - 41, часть П, там же, № 6, 1985, стр. 54 - 62.
23. И. Г. Терегулов, *К вариационным методам в нелинейной теории упругости.* ДАН СССР, 1962, 143, № 3.
24. Х. М. Муштари, И. Г. Терегулов, *К теории оболочек средней толщины.* ДАН СССР, т. 128, № 6, 1959.
25. Х. М. Муштари, И. Г. Терегулов, *К теории пологих анизотропных оболочек средней толщины.* Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и машиностроение, № 6, 1959.
26. Х. М. Муштари, *О применимости различных теорий трехслойных пластин и оболочек.* Изв. АН СССР, ОНТ, мех.и машиностроение, № 2, 1961.
27. К. З. Галимов, *Основы нелинейной теории тонких оболочек (учебное пособие).* Изд. Казанского ун-та, 1975, стр. 326.
28. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Изд. КГУ, Казань, 1977, 211 стр.
29. К. З. Галимов, В. Н. Паймушин, *Теория оболочек сложной геометрии.* Казань, Изд. Казанского ун-та, 1985, 163 стр.
30. К. З. Галимов, В. Н. Паймушин, И. Г. Терегулов, *Основания нелинейной теории оболочек.* Казань, КГУ, 1986.
31. F. John, *Estimates for the derivatives of the stresses a thin shell and interior shell equations.* Comm Pure and Applied Mathematics, 18, 235 - 267, 1965.
32. W. I. Koiter, J. G. Simmonds, *Foundations of shell theory.* Theoretical and Appl. Mech., Proc. IUTAM Congr., Moscow 1972 Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
33. W. Pietraszkiewicz, *Finite rotations in nonlinear theory of thin shells.* CISM Congress Courses and Lectures No. 240, International Centre for Mechanical Sciences, Springer-Verlag, Wien-New York, 1980.
34. Taylor, G. Ingram, W. S. Farren, *The heat developed during plastic extension of metals.* Proc. Soc. Ser. A-107, London, 1925.

35. И. Ф. Образцов, В. В. Васильев, *Нелинейные феноменологические модели деформирования волокнистых композитных материалов*, Механика композитных материалов, № 3, 1982, с. 390 - 393.

Streszczenie

ROZWÓJ NIELINIOWEJ MECHANIKI POWŁOK W PRACACH SZKOŁY KAZAŃSKIEJ

Praca zawiera szeroki przegląd prac i monografii kazańskiej szkoły dotyczących liniowej i nieliniowej mechaniki płyt i powłok. Podano w niej klasyfikację zagadnień ze względu na charakter deformacji oraz geometrię powłoki. Omówiono również wyniki otrzymane dla zagadnień powłok anizotropowych, termosprężystych, plastycznych oraz z materiałów kompozytowych.

Summary

DEVELOPMENT OF NONLINEAR MECHANICS OF SHELLS IN THE KAZAN SCHOOL

The paper presents a wide review of Kazan school publications and monographs on the linear and nonlinear mechanics of plates and shells. The classification of the problems with respect to the geometry and deformation of shells is given. The results obtained for the problem of anisotropic, thermoelastic, plastic as well as composite shells are discussed.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 stycznia 1987 roku.