

ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ DYNAMICZNYCH W OBSZARACH NIEOGRANICZONYCH.*

RYSZARD GAJEWSKI

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

W numerycznej analizie zagadnień dynamicznych (zjawisko rozchodzenia się fal, problemy geotechniczne) wprowadzenie sztucznego brzegu powoduje wystąpienie nie-naturalnych odbić fal, zaburzających rozwiązanie. Z praktycznego punktu widzenia istotna jest więc umiejętność ich eliminacji i symulowanie nieograniczonego ośrodka. Najprostsze, ale jednocześnie chyba najkosztowniejsze, rozwiązanie polega na zbudowaniu modelu obliczeniowego o odpowiednio dużych wymiarach, pozwalającego na uzyskanie wyników przed wystąpieniem odbić.

Dla eliminacji tego zjawiska można na rozpatrywanym brzegu odcinającym skończony obszar zastosować odpowiednio dobrany system lepkich tłumików [6]. W wielu pracach wykorzystano rodzinę absorpcyjnych warunków brzegowych, opracowanych na podstawie uprzednio rozwiniętej teorii przez Engquista [2]. Znakomitym narzędziem do analizy tych zagadnień może być metoda elementów brzegowych [7], w której budowa nieskończonych elementów jest bardzo naturalna. Podobnie jak dla metody elementów skończonych w zagadnieniach statyki [8] można zbudować element nieskończony eliminujący odbicia lub rozwiązywać zadanie poprzez dokonanie odwzorowania obszaru nieograniczonego w obszar skończony.

W pracy przedstawiono trzy koncepcje eliminacji odbić poprzez przyjęcie absorpcyjnych warunków brzegowych typu Sommerfelda, superpozycję rozwiązań i przyjęcie dynamicznych warunków brzegowych. Proponowane algorytmy przetestowano na niewielkich zadaniach jedno- i dwuwymiarowych, wykorzystując mikrokomputer ZX Spectrum +, co umożliwiło wizualizację wyników.

* Praca prezentowana na I Ogólnopolskiej Konferencji „Mikrokomputery w Mechanice”, Warszawa 1986.

2. Absorpcyjne warunki brzegowe

Rozpatrzmy równanie falowe (1):

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}, \quad (1)$$

gdzie: $x \in [-a, 0]$, $t \in [0, \infty)$. Dla brzegu $x = 0$ poszukujemy takiego warunku, który dla fali o źródle w punkcie $x = -a$ poruszającej się w prawą stronę pozwoli na jej przejście przez brzeg $x = 0$ bez wywoływania odbić. Rozwiązanie równania (1) dane jest wzorem (2):

$$u = A \cdot \exp[i(\omega t - kx)] + B \cdot \exp[i(\omega t + kx)], \quad (2)$$

gdzie: ω — częstość kołowa, k — numer wektora falowego ($\omega = kc$), A — amplituda źródła, B — amplituda fali odbitej. Dokonując formalnego rozkładu operatora (1) otrzymamy (3):

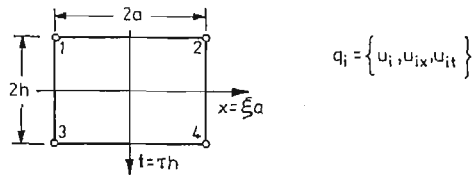
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (3)$$

Przyjmując dla $x = 0$ warunek brzegowy (4) zgodny z (3):

$$u_t + c \cdot u_x|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

łatwo stwierdzić, że podstawiając rozwiązanie (2) do (4) otrzymamy $B = 0$, co odpowiada eliminacji odbić. Wzór (4) zgodny jest z warunkiem wykorzystywanym przez Engquista, (dla fali poruszającej się w lewą stronę we wzorze (4) wystąpi znak $-$).

Proponowany warunek brzegowy może być wykorzystany nie tylko w metodzie różnic skończonych [2], ale także w metodzie elementów skończonych [1] lub metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych [4]. Wiąże się to jednak z koniecznością budowy elementów, dla których na rozpatrywanym brzegu mogą być wyrażone pochodne funkcji u .



Rys. 1. Element czasoprzestrzenny typu Hermite'a

Rozpatrzmy prostokątny element czasoprzestrzenny (rys. 1) o parametrach węzłowych (5)

$$\mathbf{q}_i = \{u_i, u_{ix}, u_{it}\}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5)$$

Macierz \mathbf{N} funkcji kształtu przyjmujemy w postaci wielomianów Hermite'a:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathbf{N}(x, t) \cdot \mathbf{q}_e, \\ \mathbf{N}(x, t) &= [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4]. \end{aligned} \quad (6)$$

Po przejściu na zmienne bezwymiarowe ξ , τ możemy N_i zapisać w postaci (7):

$$\mathbf{N}_i(\xi, \tau) = [\varrho(\xi_i \xi) \varrho(\tau_i \tau); a\omega(\xi_i \xi) \varrho(\tau_i \tau); h\varrho(\xi_i \xi) \omega(\tau_i \tau)], \quad (7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \varrho(\zeta_0, \zeta) &= 0.25(2 + 3\zeta_0 - \zeta_0^3), \\ \omega(\zeta_0, \zeta) &= -0.25\zeta_i(1 + \zeta_0 - \zeta_0^2 - \zeta_0^3), \\ \zeta_0 &= \zeta\zeta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \zeta = \xi, \tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Przyjmując:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \partial \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{d}{d\xi} \\ \frac{1}{h} & \frac{d}{d\tau} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (9)$$

wyznaczamy macierz $B_i = \partial N_i$. Macierz sztywności elementu czasoprzestrzennego wyznaczamy ze wzoru (10):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_j \cdot ah \cdot d\xi d\tau, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \\ \mathbf{K}_e &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{B}_e \\ \mathbf{C}_e & \mathbf{D}_e \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

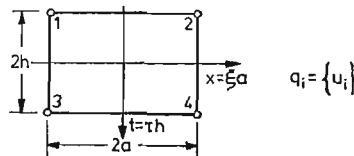
gdzie:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & -\varrho A \end{bmatrix}. \quad (11)$$

W otrzymanej tak macierzy \mathbf{K}_e podmacierze \mathbf{B}_e i \mathbf{C}_e są niesymetryczne, co w połączeniu z trzykrotnym wzrostem liczby niewiadomych w porównaniu do zadania rozwiązywanego tylko w wielkościach przemieszczeń znacznie obniża przydatność proponowanego algorytmu.

Spełnienie warunku (4) sprowadza się do kondensacji w macierzy sztywności elementu czasoprzestrzennego stopni swobody związanych z wielkościami u_x i u_t na brzegu odcinającym skończony obszar.

Ze względu na niską efektywność algorytmu wykorzystującego czworokątne elementy typu Hermite'a poszukiwano dla elementów czworokątnych z aproksymacją Lagrange'a pola przemieszczeń u (rys. 2) takich modyfikacji funkcji kształtu, aby na brzegu $\xi = \text{const}$



Rys. 2. Element czasoprzestrzenny typu Lagrange'a

spełniony był warunek (4). Modyfikacji poszukiwano w klasie wielomianów. Postulowano spełnienie warunku (4) na całym brzegu, w węzłach lub całkowo (12):

$$\begin{aligned} u(a, t)_i + c \cdot u(a, t)_x &= 0, \\ u_{tt} + c \cdot u_{tx} &= 0, \quad i = 2, 4, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int_{-h}^h [u(a, t)_i + c \cdot u(a, t)_x] dt = 0.$$

Analizę przeprowadzono wykorzystując mikrokomputer ZX Spectrum +. Uzyskane w ten sposób modyfikacje funkcji kształtu prowadziły do schematów niestabilnych lub o znacznie obniżonej granicy stabilności. W badaniu stabilności wykorzystano warunek (13) [5]:

$$B + C - A - D > 0. \quad (13)$$

Celowe więc wydaje się rozszerzenie klas funkcji modyfikujących na funkcje wymierne, logarytmiczne lub eksponentialne.

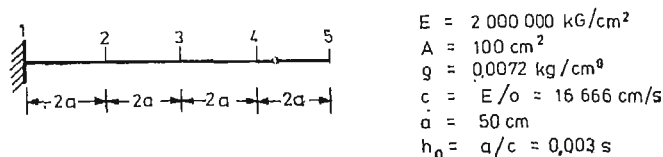
3. Metoda superpozycji rozwiązań

Rozpatrzmy ponownie równanie (1) i jego rozwiązanie (2). Przyjęcie na rozpatrywanym brzegu warunku (14):

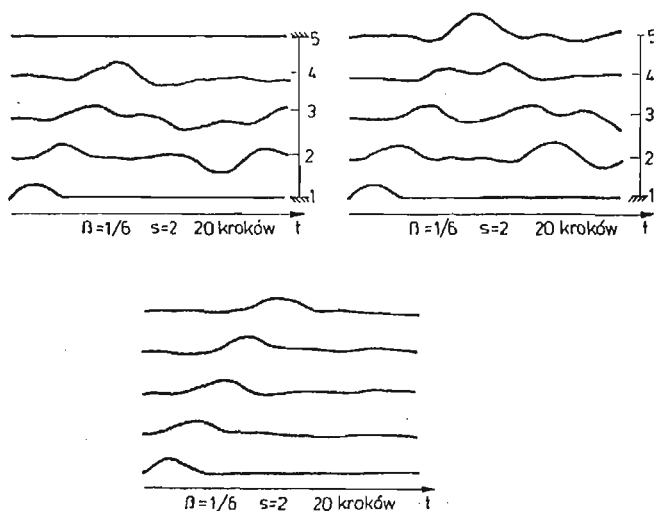
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad (14)$$

daje $B = -A$, zaś przyjęcie warunku (15):

$$u|_{x=0} = 0, \quad (15)$$



Rys. 3. Zagadnienie jednowymiarowe — drgania podłużne pręta



Rys. 4. Drgania podłużne pręta — superpozycja rozwiązań

daje $B = A$. Jak łatwo więc zauważyć superpozycja tych rozwiązań całkowicie eliminuje zjawisko odbicia fal.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić także dla zadania dwuwymiarowego (tarcza, membrana). Zwiększeniu ulega wtedy liczba superponowanych rozwiązań — należy uwzględnić wszystkie możliwe kombinacje warunków brzegowych w narożach.

Algorytm przetestowano na prostym zadaniu jednowymiarowym — drgań podłużnych pręta. (rys. 3). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4. Istotną wadą proponowanej metody jest wzrost czasu obliczeń i zapotrzebowania na pamięć, gdy superponowane zadania rozwiązywane są równoległe.

4. Dynamiczne warunki brzegowe

Do analizy dynamicznej nieograniczonego obszaru Ω wykorzystano β -algorytm metody elementów czasoprzestrzennych [3]. Macierze **A**, **B**, **C**, **D** mają budowę (16):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{D} = h(1-2\beta) \cdot \mathbf{S} - 1/2h \cdot \mathbf{M}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{C} = 2h \cdot \mathbf{S} + 1/2h \cdot \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie: $\beta \in [0, 1/2]$, $2h$ — krok całkowania, **S**, **M** — macierze sztywności i bezwładności. Układ równań metody elementów czasoprzestrzennych rozwiązujemy korzystając z zależności (17), (18):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_0 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{f}_0, \quad (17)$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{q}_{i-1} + (\mathbf{A} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{q}_i + \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{f}_i. \quad (18)$$

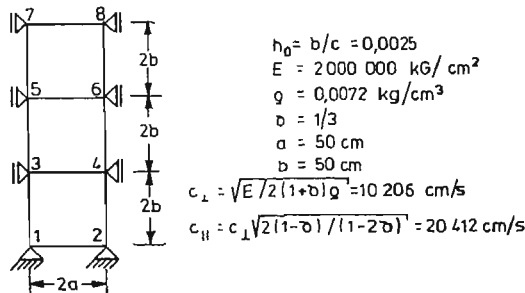
Wprowadzając dodatkowe oznaczenia (19):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^+ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_i + \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}_{i+1}, \\ \mathbf{f}_i^- &= -\mathbf{C} \cdot \mathbf{q}_{i-1} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{q}_i, \end{aligned} \quad (19)$$

równanie (18) można przekształcić do postaci (20):

$$\mathbf{f}_i^+ = \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^-. \quad (20)$$

Wielkości \mathbf{f}_i^- i \mathbf{f}_i^+ są wektorami pędów starym, obliczonym z przemieszczeń \mathbf{q}_{i-1} i \mathbf{q}_i oraz nowym, obliczonym z przemieszczeń \mathbf{q}_i i \mathbf{q}_{i+1} . Równanie (20) jest równaniem równowagi dynamicznej, zapisanym dla chwili i w wielkościach pędów. Wprowadźmy dodatkowy

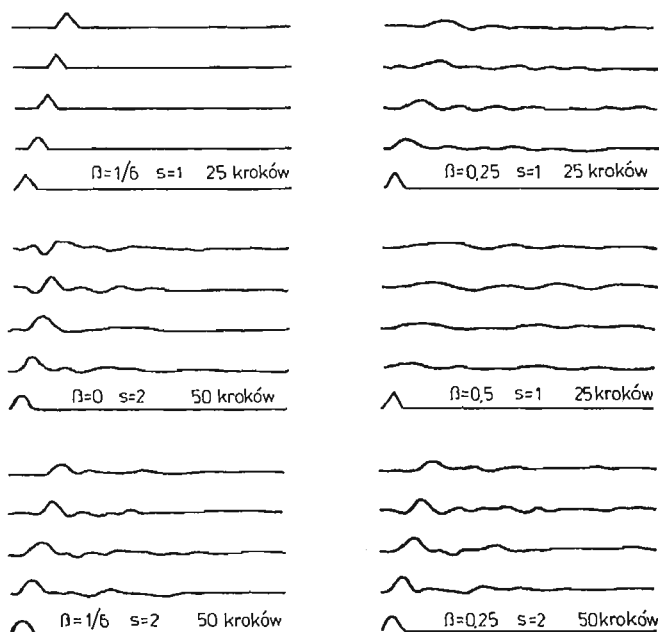


Rys. 5. Zagadnienie dwuwymiarowe — drgania tarczy

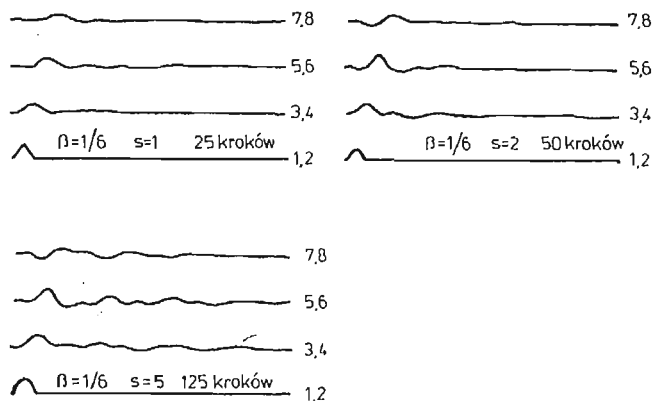
symbol $f_i^+|_\infty$ oznaczający składowe wektora f_i^+ na brzegu $\partial\Omega$ ograniczającym rozpatrywany skończony obszar Ω^* . Przyjmijmy, że węzły na brzegu $\partial\Omega$ są całkowicie nieobciążone i mają tylko ruchome stopnie swobody. Aby brzeg $\partial\Omega$ przy analizie obszaru Ω^* był w takich samych warunkach jak przy analizie Ω należy spełnić na nim dynamiczny warunek brzegowy (21):

$$f_i^+|_\infty = \mathbf{0}. \quad (21)$$

Przy przyjęciu $f_i|_\infty = \mathbf{0}$ odpowiada to warunkowi $f_i^-|_\infty = \mathbf{0}$. Jest on łatwy do spełnienia i wymaga niewielkich modyfikacji algorytmu. W równaniu (18) należy wyzerować składniki iloczynu $\mathbf{C} \cdot \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{q}_i$ odpowiadające stopniom swobody na brzegu $\partial\Omega$.



Rys. 6. Drgania podłużne pręta — dynamiczne warunki brzegowe



Rys. 7. Drgania tarczy — dynamiczne warunki brzegowe

Proponowany algorytm został sprawdzony na niewielkich zadaniach jedno- i dwuwymiarowych (drgania podłużne pręta- rys. 3, drgania tarczy- rys. 5). Obciążenie stanowił impuls kinematyczny. W obliczeniach wykorzystano mikrokomputer ZX Spectrum +. Wyniki obliczeń dla różnych wartości parametru β i skrócenia s ($s = h_0/h$) kroku całkowania przedstawiono na rys. 6 i rys. 7.

5. Uwagi końcowe

W rozwiązaniu i analizie postawionego problemu mikrokomputer ZX Spectrum + okazał się bardzo przydatnym narzędziem. Prosty program napisany w Basic-u umożliwił automatyzację badania różnych modyfikacji funkcji kształtu. Wyjście graficzne, choć bardzo niedoskonałe, pozwoliło na szybką wizualizację wyników i uniknięcie żmudnego wykonywania wykresów. Niewielka pojemność pamięci i bardzo wolny interpreter Basic-a uniemożliwiły rozwiązanie większych zadań. Proponowane algorytmy wymagają więc dalszych testów, możliwych do zrealizowania na profesjonalnym sprzęcie.

Literatura

1. B. ENGQUIST, H. O. KREISS, *Difference and finite element methods for hyperbolic differential equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 3, 581 - 596, 1979.
2. B. ENGQUIST, A. MAJDA, *Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves*, Proceedings of the National Academy Sciences of USA, 74, 5, 1765 - 1766, 1974.
3. Z. KACPRZYK, *Pewne uogólnienie metody czasoprzestrzennych elementów skończonych*, VI Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice, Tom 1, 251 - 256, Białystok 1983.
4. Z. KĄCZKOWSKI, *General formulation of stiffness matrix for space-time finite elements*, Archiwum Inżynierii Lądowej, 25, 3, 351 - 357, 1979.
5. T. LEWIŃSKI, *Stability analysis of a difference scheme for the vibration equation with a finite number of degrees of freedom*, Applicationes Mathematicae, 18, 3, 473 - 486, 1983.
6. J. LYSMER, R. L. KUHLEMEYER, *Finite dynamic model for infinite media*. Journal of the Engineering Mechanics Division, 95 EM4, 859 - 877, 1969.
7. D. M. MISLENOVIC, *Boundary element method and wave equation*, Applied Mathematical Modelling, 6, 3, 205 - 208, 1982.
8. O. C. ZIENKIEWICZ, C. EMSON, P. BETTES, *A novel boundary infinite element*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19, 3, 393 - 404, 1983.

Резюме

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В численном решении динамических задач в неограниченных областях появляются отражения. Очень важным является исключение этих отражений и симуляция неограниченного пространства. В работе представлено несколько новых методов решения этой задачи. Один из них суперпонирует решения задач Дирихлета и Неймана. Введены тоже динамические и абсорбционные граничные условия, которые можно употреблять в методе конечных временно-пространственных элементов.

S u m m a r y

SOLUTION OF DYNAMICAL PROBLEMS IN UNBOUNDED REGIONS

In numerical solutions of dynamical problems in unbounded regions the presence of typical boundaries introduces reflections. It is very important to be able to eliminate these reflections and to simulate an infinite region. Some new techniques are presented in the paper. One of them solves the problem by adding together the solutions of Dirichlet and Neumann problems. Dynamical and absorbing boundary conditions, which can be used in space-time finite elements, are also introduced.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 kwietnia 1986 roku.
