MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 25, (1987)

# WYZNACZANIE MODELU STEROWANIA SAMOLOTEM ZAPEWNIAJĄCEGO ŚCISŁĄ REALIZACJĘ RUCHU PROGRAMOWEGO*

WOJCIECH BLAJER

*Wyższa Szkoła Inżynierska w Radomiu*

Praca podejmuje zagadnienie ścisłej realizacji programowego ruchu samolotu. Nakładając na ruch samolotu odpowiednie warunki, czyli więzy programowe, poszukiwano takiego modelu sterowania, który zapewniłby ścisłą ich realizację. Zadanie rozwiązano dla modelu samolotu sztywnego, sterowanego parametrycznie. Sformułowano kryteria realizowalności sterowania w założonym ruchu programowym. Warunki nakładane na układ przez więzy programowe przekształcono do odpowiednich równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na funkcje parametrów sterowania.

## 1. Wstęp

Najczęściej podejmowanym zagadnieniem numerycznej symulacji sterowanego ruchu samolotu jest badanie odpowiedzi zamodelowanego układu na narzucony model sterowania [2, 10, 12]. Z punktu widzenia symulacji konkretnego manewru czy figury akrobacji lotniczej, istotnym jest jednak przyjęcie odpowiedniego modelu sterowania. Najczęściej znane są tylko ogólne zasady sterowania samolotem przy wykonywaniu poszczególnych manewrów. Empiryczny dobór ścisłych przebiegów czasowych wartości parametrów sterowania, powodujących dokładną realizację założonego manewru, jest praktycznie niemożliwy. Oczywiście model sterowania można uściślić poprzez kolejne jego poprawki lub też zapewnienie sprzężeń pomiędzy parametrami sterowania i stanem symulowanego lotu (najczęściej odpowiada to modelowym reakcjom pilota lub autopilota na stan lotu). W każdym przypadku symulowany ruch odwzorowywać jednak będzie zamierzony manewr ze skończoną dokładnością.

W pracy podjęto się rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Przyjmując jako wyjściowe odpowiednie warunki nakładane na ruch samolotu, poszukiwano takiego modelu sterowania, który zapewniałby ścisłą realizację ruchu określonego tymi warunkami. Narzucone

---

*) Fragmenty pracy przedstawione były w formie referatu na XII Konf. „Drgania w układach fizycznych", Poznań—Błażejewko, 1986.

na układ warunki rozumieć należy jako więzy programowe [5, 6, 7], czyli analityczne związki czasu, współrzędnych układu oraz ich pochodnych. W takim rozumieniu ruch programowy, czyli ruch zgodny z więzami, jest ruchem, który w każdej chwili spełnia nałożone na niego więzy. Jak zostanie pokazane w pracy, postulat realizacji więzów programowych implikuje odpowiednie warunki, spełnienie których w każdej chwili czasu zapewni realizację założonego ruchu programowego. Warunki te przekształcone być mogą do postaci równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na funkcje parametrów sterowania. W ten sposób każdy z więzów nakłada odpowiedni warunek na model sterowania samolotem. Reasumując, każdy model sterowania wypełniający warunki nakładane przez narzucone więzy programowe stanowić będzie rozwiązanie zagadnienia podjętego w pracy.

Zagadnienie rozwiązano dla modelu samolotu sztywnego ze sztywnymi układami sterowania. Sterowanie realizowano uzalczniając prawe strony równań ruchu samolotu od poszczególnych parametrów sterowania. Do rozważań przyjęto przy tym równania ruchu wyprowadzone w quasi-współrzędnych dowolnego układu własnego samolotu.

Przedstawiona praca jest rozwinięciem i uogólnieniem zagadnień podjętych w [1, 3, 4. Prace te, a w szczególności [1], stanowią też przykład praktycznego wykorzystania teoretycznego modelu przedstawionego poniżej.

## 2. Równania ruchu samolotu swobodnego

W zagadnieniach dynamiki ruchu samolotu najczęściej stosowane są równania ruchu wyprowadzone w quasi-współrzędnych wybranego układu własnego. Równania te można zapisać jako [9, 10, 12]:

$$\mathbf{M}\dot{\omega}+\mathbf{B}\mathbf{M}\omega = Q^*, \tag{1}$$

gdzie zgodnie z cytowanymi powyżej pracami: $\mathbf{M}$ — stałowspółczynnikowa macierz bezwładności, $\omega$ — wektor quasi-prędkości, elementami którego są składowe prędkości liniowej i kątowej samolotu w przyjętym układzie odniesienia, B — macierz sprzężeń dynamicznych, której elementami są składowe wektora $\omega$, $Q^*$ — wektor sił uogólnionych na kierunkach quasi-współrzędnych.

Przyjmuje się, że źródłem zewnętrznych oddziaływań na samolot w locie są siły i momenty aerodynamiczne, siła ciężkości oraz siły i momenty od zespołu napędowego. Wartości tych oddziaływań zależą od aktualnego stanu lotu samolotu oraz, z wyjątkiem siły grawitacyjnej, od aktualnych wartości parametrów sterowania. Wektor sił uogólnionych zapisać można wówczas w formie:

$$Q^* = Q^*(\omega, q, s), \tag{2}$$

gdzie: $q$ — wektor współrzędnych uogólnionych samolotu, $s$ — wektor niezależnych parametrów sterowania. Najczęściej składowymi wektora $s$ są wartości wychyleń lotek, steru wysokości i kierunku oraz siła ciągu silnika (lub wymiennie prędkość kątowa obrotów silnika). Czasami jako parametry sterowania wyróżnia się też kąt wychylenia klap, wielkość wysunięcia hamulców aerodynamicznych i inne. Oczywistym jest, że przy wykonywaniu poszczególnych manewrów w locie, tylko część kanałów sterowania jest wykorzystywana. W dalszej części pracy przyjmowane będzie, że wektor $s$ jest $b$-elementowy.

Wektor prędkości uogólnionych $\dot{q}$ związany jest z wektorem quasi-prędkości $\omega$ poprzez zależność:

$$\dot{q} = A\omega, \tag{3}$$

gdzie $A$ — macierz o współczynnikach zależnych od $q$.

Wykorzystując wzory (1)-(3) oraz uwzględniając uwagi poczynione powyżej, pełne równania ruchu samolotu dla numerycznej symulacji lotu można zapisać w formie układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu o postaci normalnej:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= F(\omega, q, s), \\ q &= A(q)\omega, \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie $F = \mathbf{M}^{-1}(Q^* - \mathbf{B}\mathbf{M}\omega)$. Równania o powyższej postaci (wraz z odpowiednimi warunkami początkowymi) stanowią zwykle wyjście do numerycznej symulacji nieustalonych ruchów samolotu. Aktualne wartości wektora stanu $[\omega, q]^T$ zależą przy tym od nałożonego na układ modelu sterowania, czyli przebiegów zmian elementów wektora $s$. Najczęściej funkcje te przyjmuje się jako $s = s(\omega, q, t)$, gdzie $t$ — czas.

## 3. Więzy programowe i warunki nakładane przez więzy

W pracy przyjęto, że narzucony na ruch układu program, realizację którego postuluje się, opisany jest przez $a$ niezależnych od siebie związków analitycznych:

$$g^*(\omega, q, t) = 0. \tag{5}$$

Każdy ze związków $g_1, \ldots, g_a$ wyraża sobą jeden więz programowy, którego równanie ma być spełnione podczas symulowanego ruchu. Zakłada się, że funkcje więzów są co najmniej klasy $C^1$, a rząd macierzy $\partial g^*/\partial\omega$ w obszarze określoności $\omega$ i $q$ jest dla dowolnego czasu $t$ równy $a$. Pomijając na razie pełniejszą analizę co do maksymalnej ilości więzów programowych, wynika stąd, że nie może ona przekroczyć ilości stopni swobody układu. Indeks*, podobnie jak w równaniu (2), oznacza, że równania (5) nie zależą jawnie od prędkości uogólnionych. Można to zawsze uzyskać stosując podstawienie (3).

Równanie (5) reprezentuje zbiór więzów kinematycznych o dowolnej postaci. Objęty może też być tym przypadek dowolnej postaci więzu geometrycznego, czyli

$$f_i(q, t) = 0. \tag{6}$$

Postulując mianowicie, ażeby w chwili $t = 0$ układ spełniał warunek więzu, czyli $f_i(q_0, 0) = 0$, warunek (6) można przekształcić do jego równoważnej formy kinematycznej [7]

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial q}\right)^T A\omega + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, \tag{7}$$

która to forma jest równoważna zapisowi (5). W ten sposób dowolny zbiór więzów programowych geometrycznych i kinematycznych można zapisać w jednolitej formie. Oczywiście więzy geometryczne narzucają dodatkowe warunki na położenie układu w chwili $t = 0$, a równania ich muszą być co najmniej klasy $C^2$.

Jeśli układ ma realizować narzucony program, równania więzów (5) muszą być uwzględnione w procesie ruchu opisanego różniczkowymi równaniami [4]. W odróżnieniu od więzów materialnych, w przypadku których ruch zgodny z więzami wymuszany jest poprzez reakcje więzów [7], więzy programowe są czystymi związkami analitycznymi wyrażającymi warunki jakie winny spełnić rozwiązania odnośnych równań ruchu. W tym przypadku reakcje więzów programowych (traktowanych jako idealne więzy materialne), które mogłyby być traktowane jako dodatkowe siły sterujące [5, 6, 7], wymuszające ruch zgodny z więzami, nie mają fizycznego sensu. Ruch programowy winien przebiegać tak, by reakcje więzów programowych w sensie Appela-Czetajewa tożsamościowo równały się zeru. Fizycznie bowiem reakcji takich być nie może. Realizację narzuconego programu ruchu zapewnić można jedynie poprzez dobór odpowiedniego modelu sterowania. W pracy wykazano możliwość doboru takiego modelu.

Równania więzów programowych (5) narzucają ograniczenia również na quasi-przyspieszenia, mianowicie [5, 6, 7]:

$$\left(\frac{\partial g^*}{\partial \omega}\right)^T \dot{\omega}+\left(\frac{\partial g^*}{\partial q}\right)^T \dot{q}+\frac{\partial g^*}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Jeżeli założymy, że w chwili $t = 0$ układ spełnia nałożone więzy, czyli:

$$g^*(\omega_0, q_0, 0) = 0, \tag{9}$$

ruch programowy realizowany będzie jeśli w dowolnej chwili czasu $t$ spełnione będą zależności (8). Podstawiając do tych równań wartości na $\dot{\omega}$ i $\dot{q}$ zgodnie z (4), przekształcają się one do następującej postaci:

$$\left(\frac{\partial g^*}{\partial \omega}\right)^T \boldsymbol{F}+\left(\frac{\partial g^*}{\partial q}\right)^T \Lambda\omega+\frac{\partial g^*}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami, równania (10) są $a$ zależnościami, które można zapisać symbolicznie jako:

$$w^* = w^*(s, \omega, q, t) = 0. \tag{11}$$

Reasumując, jeśli w chwili początkowej $t = 0$ układ spełnia więzy, czyli prawdziwe są równania (9), ruch programowy opisany związkami (5) realizowany będzie ściśle gdy w każdej chwili czasu wypełniane będą warunki (11). Te ostatnie wynikają z ograniczeń nakładanych przez więzy na wektor stanu układu równań różniczkowych (4). W dalszej części pracy warunki (11) nazywane będą więzami dynamicznymi.

Wyrażenia (11) mają charakter ogólny. W szczególnym przypadku mogą one nie zależeć jawnie o niektórych lub nawet wszystkich parametrów sterowania [1, 3, 4]. Dotychczas nie dyskutowano też sprawy wzajemnych proporcji długości wektorów $s$ i $g^*$. Zagadnienia te rozpatrzone będą w następnym rozdziale.

## 4. Warunki więzów programowych jako ograniczenia nakładane na model sterowania samolotem

Traktując poszczególne parametry sterowania $s = [s_1, \ldots, s_b]^T$ jako dodatkowe zmienne, układ równań (4) oraz związki (11) traktować można jako $2n+a$ zależności na $2n+b$

zmiennych, gdzie $n$ — ilość stopni swobody. Wnioskować stąd można, że podstawowym warunkiem realizowalności sterowania w ruchu programowym jest, by ilość nałożonych więzów była nie większa niż ilość niezależnych kanałów sterowania. Wcześniej stwierdzono już, że ilość więzów programowych nie może przekroczyć ilości stopni swobody układu. Ostatecznie więc, najogólniejszy warunek konieczny realizowalności sterowania w ruchu programowym można sformułować następująco:

$$a \leqslant b \leqslant n. \tag{12}$$

Nie jest to oczywiście warunek wystarczający realizowalności sterowania. Z drugiej strony $a$ zależności typu (11) determinować będzie tylko $a$ parametrów sterowania. Pozostałe $b-a$ parametrów sterowania, z punktu widzenia realizacji programu (5), może być przyjęta dowolnie. Na funkcje zmian tych parametrów będą nakładane jedynie ograniczenia co do odpowiedniej klasy funkcji.

Rozważmy w pierwszym kroku przypadek, gdy układ warunków (11) zależy jawnie od co najmniej $a$ parametrów sterowania oraz daje się rozwikłać ze względu na a parametrów sterowania $\tilde{s} = [\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_a]^T$. Inaczej mówiąc, ze związków (11) można wyznaczyć $a$ zależności typu:

$$\tilde{s} = \tilde{s}(\omega, q, \tilde{\tilde{s}}, t), \tag{13}$$

gdzie $\tilde{\tilde{s}} = [\tilde{\tilde{s}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{s}}_{b-a}]^T$ — wektor pozostałych $b-a$ parametrów sterowania, którego elementy, z punktu widzenia realizacji więzów programowych (5), mogą być przyjęte dowolnie jako

$$\tilde{\tilde{s}} = \tilde{\tilde{s}}(\omega, q, t). \tag{14}$$

Uwzględniając powyższe, warunki (13) nakładane na $a$ kanałów sterowania, a wynikające bezpośrednio z równań więzów dynamicznych (11), są funkcjami typu:

$$\tilde{s} = \tilde{s}^*(\omega, q, t). \tag{15}$$

Przyjęte a priori funkcje $\tilde{\tilde{s}}$ muszą być przy tym co najmniej ciągłe w całym zakresie określoności.

W przypadku tym układ równań (4), odpowiedź którego realizować będzie ściśle program (5), przekształcić można do postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \mathbf{F}(\omega, q, \tilde{s}, \tilde{\tilde{s}}) = \mathbf{F}^*(\omega, q, t), \\ \dot{q} &= A(q)\omega, \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie $\mathbf{F}^*$ — funkcje prawych stron odpowiednich równań układu (4) po wstawieniu (14) i (15). Wartości początkowe wektora stanu układu (16) muszą być przy tym dobrane tak, ażeby zachowane były warunki (9). Tym samym związki (15) umożliwiają wyznaczenie ścisłego modelu sterowania zapewniającego realizację programu (5).

W przypadku ogólnym układ warunków (11) nie musi dać się efektywnie rozwikłać względem $a$ parametrów sterowania (nawet wówczas, gdy układ ten zależy jawnie od co najmniej $a$ parametrów sterowania). Warunki więzów dynamicznych mogą poza tym zależeć jawnie od mniejszej niż $a$ liczby parametrów sterowania (jak np. w pracach [1, 3, 4]). W końcu, zadanie sterowania w zadanym ruchu programowym może okazać się nierealizowalne. Poniżej starano się rozważyć to zagadnienie w miarę ogólnie. Na wstępie założono, że spełniony jest warunek $a \leqslant b \leqslant n$ oraz że układ równań (11), bez względu na powód, nie można efektywnie rozwikłać względem $a$ parametrów sterowania.

Narzucając warunek realizacji więzów dynamicznych w chwili $t = 0$, czyli:

$$w^*(s_0, \omega_0, q_0, 0) = 0, \tag{17}$$

ruch zgodny z więzami realizowany będzie wówczas, gdy w każdej chwili czasu spełniane będą zależności różniczkowe:

$$\frac{dw^*}{dt} = \left(\frac{\partial w^*}{\partial s}\right)^T \dot{s} + \left(\frac{\partial w^*}{\partial \omega}\right)^T \dot{\omega} + \left(\frac{\partial w^*}{\partial q}\right)^T \dot{q} + \frac{\partial w^*}{\partial t} = 0. \tag{18}$$

Jeśli dokonać analogicznych podstawień na $\dot{\omega}$ i $\dot{q}$ jak przy przejściu od wzoru (8) do (10), równania (18) można przedstawić jako ogólne zależności typu:

$$\dot{w}^*(\dot{s}, s, \omega, q, t) = 0. \tag{19}$$

Dokonując w analogiczny sposób $m$-krotnego różniczkowania wyjściowych zależności (11) otrzymać można:

$$w^{*(m)}(s_1, \ldots, s_1^{(m_1)}, \ldots, s_b, \ldots, s_b^{(m_b)}, \omega, q, t) = 0, \tag{20}$$

gdzie $m_1, \ldots, m_b \leqslant m$. Żądać należy przy tym, ażeby spełnione były następujące warunki początkowe:

$$w^{*(i)}(s_0, \dot{s}_0, \ldots, s_0^{(i)}, \omega_0, q_0, 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m-1. \tag{21}$$

Jeśli dla pewnego $m$ układ równań (20) da się rozwikłać względem najwyższych pochodnych $a$ parametrów sterowania, układ ten można przedstawić w postaci normalnej [8, 11]:

$$\tilde{s}_j^{(m_j)} = f_j(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_1^{(m_1-1)}, \ldots, \tilde{s}_a, \ldots, \tilde{s}_a^{(m_a-1)}, \tilde{\tilde{s}}_{a+1}, \ldots, \tilde{\tilde{s}}_{a+1}^{(m_{a+1})}, \ldots, \tilde{\tilde{s}}_b, \ldots, \tilde{\tilde{s}}_b^{(m_b)}, \omega, q, t),$$
$$j = 1, \ldots, a, \tag{22}$$

gdzie: $s$ i $\tilde{\tilde{s}}$ są definiowane analogicznie jak we wzorach (13) i (14). Warunkiem koniecznym umożliwiającym przejście od wzoru (20) do (22) jest przy tym, ażeby

$$\det\left(\frac{\partial w^{*(m-1)}}{\partial s}\right) \neq 0, \tag{23}$$

gdzie:

$$\left(\frac{\partial w^{*(m-1)}}{\partial s}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1^{*(m-1)}}{\partial s_1} & \ldots & \frac{\partial w_1^{*(m-1)}}{\partial s_a} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial w_a^{*(m-1)}}{\partial s_1} & \ldots & \frac{\partial w_a^{*(m-1)}}{\partial s_a} \end{bmatrix}.$$

Wynika z powyższego między innymi, że warunki $w^{*(m-1)}$ muszą zależeć jawnie od co najmniej $a$ parametrów sterowania.

Ponieważ parametry sterowania $\tilde{\tilde{s}}$ mogą być, z punktu widzenia realizacji więzów, dowolnymi funkcjami typu (14) (ale odpowiedniej klasy — $C^{m_k}$, gdzie $m_k = m_{a+1}, \ldots, m_b$), zależności (22) są w istocie następującymi:

$$\tilde{s}_j^{(m_j)} = f_j^*(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_1^{(m_1-1)}, \ldots, \tilde{s}_a, \ldots, s_a^{(m_a-1)}, \omega, q, t), \quad j = 1, \ldots, a. \tag{24}$$

Układ powyższy sprowadzić można do rzędu pierwszego oraz dołączyć do równań ruchu (4). Uwzględniając wcześniejsze uwagi, pełny układ równań różniczkowych samolotu realizującego narzucony ruch programowy zapisać można następująco:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= F^*(s_{j1}, \omega, q, t), \\
\dot{q} &= A(q)\omega, \\
\dot{\tilde{s}}_{j1} &= \tilde{s}_{j2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dot{\tilde{s}}_{jm_j-1} &= \tilde{s}_{jm_j}, \\
\dot{\tilde{s}}_{jm_j} &= f_j^*(\tilde{s}_{j1}, \dots, \tilde{s}_{jm_j}, \omega, q, t),
\end{aligned} \tag{25}$$

gdzie $j = 1, \dots, a$. Równania te stanowią układ $2n+\sum_{j=1}^{a} m_j$ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego o postaci normalnej. Wartości początkowe zmiennych układu spełniać przy tym muszą warunki (9), (17) i (21), czyli $a+a+m(a-1)$ równań algebraicznych. Niezbędnym jest więc, ażeby

$$k = 2n+\sum_{j=1}^{a} m_j-[a+a+m(a-1)] \geqslant 0. \tag{26}$$

Wynika z powyższego, że $k$ wartości początkowych wektora stanu układu (25) ustalonych może być dowolnie.

Jeśli w chwili $t = 0$ wektor stanu układu (25) spełnia niezbędne warunki początkowe, to niezależnie od doboru funkcji zmian wektora $\tilde{s}$ oraz niezależnie od doboru $k$ wartości początkowych układu, ruch samolotu opisany tymi równaniami realizować będzie ściśle narzucony program (5). Zmienne $\tilde{s}_{j1}(t)$ $(j = 1, \dots, a)$ stanowią przy tym poszukiwany model sterowania samolotem, zapewniający ścisłą realizację narzuconego układu więzów programowych.

Dotychczas nie dyskutowano wartości parametru $m$, czyli niezbędnej krotności różniczkowania więzów dynamicznych w celu uzyskania możliwości rozwikłania, przekształconych tak równań więzów, względem najwyższych pochodnych $a$ parametrów sterowania. W pracy nie dopracowano się kryterium pozwalającego na oszacowanie liczby $m$ w przypadku ogólnym. Można jedynie pokazać, że kolejne różniczkowanie warunków więzów programowych rzeczywiście może doprowadzić do rozwiązania zagadnienia. Jak wykazano wcześniej, warunkiem niezbędnym dla własności (23) jest jawna zależność przekształconych warunków więzów od co najmniej $a$ parametrów sterowania. Jeśli na danym kroku różniczkowania własność ta nie jest spełniona lub nie jest spełniony warunek (23), w kroku następnym, dzięki ewentualnemu pojawieniu się nowych elementów wektora $s$ (za quasi-przyspieszenia $\dot{\omega}$ podstawia się prawe strony równań z układu (4)), warunek (23) może być spełniony.

Jak przekonano się w pracach [1, 3, 4], w zagadnieniach praktycznych (choć nie można tego uogólniać) wystarcza trój-, a dzięki szczególnemu podejściu do zagadnienia, nawet dwukrotne różniczkowanie warunków więzów dynamicznych. Ma to o tyle istotne znaczenie, że każdy krok różniczkowania wydatnie komplikuje model matematyczny.

## 5. Wnioski

W pracy przedstawiono ogólny model matematyczny wyznaczania modelu sterowania samolotem w ruchu programowym. Zagadnienie może być rozszerzone również na inne układy sterowane parametrycznie. Sens metody nie uległby też zmianie gdyby równania ruchu układu wyprowadzone były w układzie współrzędnych uogólnionych.

Rozwiązanie podjętego zagadnienia oparto na specyficznym podejściu do zagadnienia więzów nałożonych na układ. W pojęciu klasycznym oddziaływanie więzów na układ realizuje się poprzez reakcje więzów, czyli dodatkowe siły (obok sił czynnych) wymuszające ruch zgodny z więzami. W podobny sposób potraktować można ruch programowy układu sterowanego siłami zewnętrznymi. Siły sterujące utożsamić należałoby w takim wypadku z siłami reakcji więzów programowych traktowanymi jako idealne więzy materialne. Zagadnienie to rozważone jest m.in .w pracach [5, 6]. W rozważanym przypadku ruchu samolotu, albo ogólniej układu sterowanego parametrycznie, podejście takie nie ma fizycznego sensu. Wartości parametrów sterowania wpływają bezpośrednio na wielkość oddziaływań zewnętrznych. Zadanie rozwiązać można jedynie poprzez odpowiedni dobór modelu sterowania, zapewniających taką kreację sił czynnych, że powodować one będą ruch ściśle realizujący nałożony program. Ostatni warunek wyrażają sobą równania więzów dynamicznych (11). Model matematyczny opisany w rozdziale 4 pozwala (jeśli sterowanie jest realizowalne) na wyznaczenie poszukiwanego modelu sterowania.

W pracy stwierdzono, że każdy krok różniczkowania więzów dynamicznych w istotny sposób komplikuje zapis odpowiednich warunków $w^{*(l)}$. W porównaniu z zaprezentowanym modelem, w pewnych przypadkach układ warunków $w^{*(m-1)}$ może dać się rozwikłać względem najwyższych pochodnych oraz funkcji $a$ parametrów sterowania $\bar{s}$. Uzyskany w ten sposób układ równań różniczkowych ze względu na część elementów wektora $\bar{s}$ oraz funkcji zmian pozostałych elementów tego wektora będzie równoważny układowi (22). Rząd równań różniczkowych obniżony będzie przy tym o jeden, a część parametrów sterowania wyznaczona będzie bezpośrednio. Odpowiedniemu uproszczeniu ulegną wówczas również różniczkowe równania ruchu samolotu realizującego program (5), czyli równania (25). Przypadek ten najlepiej pokazany jest w pracy [1].

Zaprezentowana metoda ma charakter czysto analityczny. Uzyskane tą drogą modele sterowania w zadanym ruchu programowym mogą nie być realizowalne w praktyce, tzn. mogą na przykład wykraczać poza eksploatacyjne zakresy zmian parametrów sterowania.

Podjęte zagadnienie może mieć szerokie zastosowanie przy symulacji nieustalonych ruchów samolotu. W szczególności dotyczy to prawidłowego modelowania figur akrobacji lotniczej oraz manewrów w locie. Pewną trudność stanowić może przy tym analityczne sformułowanie warunków więzów programowych.

### Literatura


1. W. BLAJER, *Numeryczna symulacja programowego ruchu samolotu w pętli pionowej*, Mech. Teoret. i Stos. 4, 25 (1987).
2. W. BLAJER, J. MARYNIAK, *Modelowanie matematyczne sterowanego ruchu samolotu w pętli*, zb. ref. XXIV Symp. „Modelowanie w mechanice", Gliwice — Szczyrk 1985.

3. W. BLAJER, J. MARYNIAK, J. PARCZEWSKI, *Modelowanie programowego ruchu samolotu w pętli*, zb. ref. XXV Symp. „Modelowanie w mechanice", Gliwice — Kudowa Zdr. 1986.
4. W. BLAJER, J. PARCZEWSKI, *Model matematyczny wyznaczania funkcji sterowania samolotem w pętli*, II Ogólnopolska Konf. „Mechanika w lotnictwie", Warszawa 1986, Mech. Teoret. i Stos., 1-2, 25 (1987).
5. DO SANH, *On the Equations of Motion of a Controlled Mechanical System*, Zag. Drgań Niel., 21 (1983).
6. DO SANH, *On the Motion of Controlled Mechanical Systems*, *Успехи Механики*, 2, 7 (1984).
7. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
8. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
9. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1975.
10. J. MARYNIAK, W. BLAJER, *Numeryczna symulacja korkociągu samolotu*, Mech. Teoret. i Stos., 2/3. 21 (1983).
11. J. MUSZYŃSKI, A. D. MYSZKIS, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa 1984.
12. Z. PATURSKI, M. ZŁOCKA, *Symulacja numeryczna sterowanego ruchu samolotu*, zb. ref. XXVI Symp. „Modelowanie w mechanice", Gliwice — Szczyrk 1985.

Р е з ю м е

## РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЁТОМ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЙ ТОЧНОЕ ВЫПОЛНЕНИЕ ПРОГРАМНОГО ДВИЖЕНИЯ

В работе рассматривается проблема точной реализации програмного движения самолёта. Программа движения была принята как комплекс кинематических связей произвольного вида. Представлен способ определения модели управления самолётом, обеспечивающей реализацию программы. Проблема решена для жёсткого самолёта, управляемого параметрами.

S u m m a r y

## DETERMINATION OF THE MODEL OF AIRPLANE CONTROL ENSURING THE EXACT REALIZATION OF A PROGRAM MOTION

In the paper the problem of exact realization of a program motion by an airplane has been considered. The program of motion was meant as a set of conditions imposed on the motion, or in other words a set of program constraints. The model of airplane control ensuring the simulated motion be consistent with the program constraint equations was determined. The problem was solved for a rigid airplane controlled by parameters. The criteria of control realizability in a certain program motion were also formulated. The program constraint conditions imposed on the system were transformed into the equivalent set of differential equations determining functions of control parameters.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 kwietnia 1986 roku.*