

## IDENTYFIKACJA PARAMETRYCZNA MODELU MATEMATYCZNEGO SAMOLOTU

WŁADYSŁAW JAROMINEK

*Polska Akademia Nauk, Warszawa*

TADEUSZ STEFAŃSKI

*Politechnika Świętokrzyska, Kielce*

### 1. Wprowadzenie

Jednym z podstawowych problemów syntezy układu stabilizacji samolotu jest problem identyfikacji, którego zadaniem jest otrzymanie niezbędnych informacji o charakterystykach statycznych i dynamicznych samolotu. Problem ten posiada szczególnie istotne znaczenie w przypadku samolotu naddźwiękowego, gdzie informacje o aktualnych zmianach jego parametrów muszą być ciągle w czasie lotu korygowane. Identyfikacja obiektów niestacjonarnych — a takim jest samolot — sprowadza się głównie do założenia quasi-stacjonarności w pewnym dopuszczalnym przedziale czasu  $\Delta T$  i na znalezieniu takiego algorytmu identyfikacji, którego czas procesu przejściowego jest mniejszy od czasu  $\Delta T$ .

W niniejszym artykule do syntezy algorytmów identyfikacji parametrów modelu matematycznego samolotu w kanale podłużnym zastosowano metodę najmniejszych kwadratów. Metoda ta wykazuje w tym przypadku wiele istotnych zalet, w tym: otrzymanie algorytmu identyfikacji w postaci układu równań normalnych lub w postaci rekurencyjnej — prostej i wygodnej do obliczeń numerycznych, możliwość uwzględnienia szumów pomiarowych lub zakłóceń działających na samolot, wysoka zbieżność i dokładność identyfikacji parametrów modelu matematycznego. Ponieważ przedstawione algorytmy pozwalają identyfikować parametry dyskretnego modelu matematycznego samolotu, w pracy przedstawiono także problem określania parametrów ciągłego modelu matematycznego na podstawie modelu dyskretnego.

### 2. Model matematyczny samolotu

W wielu praktycznych zastosowaniach, np. w przypadku stabilizacji układu pilotażu ręcznego samolotu w kanale podłużnym, istotne znaczenie ma ruch krótkookresowy. Wynika to z faktu, że pierwszą reakcją na wychylenie steru wysokości jest zmiana kąta natarcia, podczas gdy zmiana prędkości lotu zachodzi znacznie później.

Liniowy model matematyczny krótkookresowego ruchu podłużnego samolotu, dla ustalonego lotu poziomego, ma postać [2]:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \dot{\alpha} + P_{\alpha}\alpha + P_{\delta}\delta + P_w \\ \ddot{\vartheta} &= M_{\alpha}\alpha + M_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + M_{\dot{\vartheta}}\dot{\vartheta} + M_{\delta}\delta + M_w \\ n &= \frac{V}{57,3g}(\dot{\vartheta} - \dot{\alpha})\end{aligned}\quad (1)$$

gdzie:  $\alpha$  — kąt natarcia;  $\vartheta$  — kąt pochylenia;  $\delta$  — wychylenie steru;  $n$  — przyspieszenie normalne;  $V$  — prędkość lotu;  $g$  — przyspieszenie ziemskie;  $P_{\alpha}$ ,  $P_{\delta}$ ,  $M_{\dot{\vartheta}}$ ,  $M_{\alpha}$ ,  $M_{\dot{\alpha}}$ ,  $M_{\delta}$  — współczynniki zależne od geometrii, kinematyki i parametrów lotu;  $P_w$ ,  $M_w$  — zakłócenia działające na samolot.

Z równań (1) otrzymano transmitancje wiążące sygnały wyjściowe  $\dot{\vartheta}$  i  $n$  z wejściowym sygnałem sterującym  $\delta$  dla  $P_w = 0$  oraz  $M_w = 0$ , które mają postać:

$$G_{\dot{\vartheta}}(s) = \frac{\dot{\vartheta}(s)}{\delta(s)} = \frac{K_{\dot{\vartheta}}(1 + T_1 s)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad (2)$$

$$G_n(s) = \frac{n(s)}{\delta(s)} = \frac{K_n(1 - T_2^2 s^2)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad (3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{M_{\dot{\vartheta}} + P_{\alpha} + M_{\dot{\alpha}}}{2\sqrt{M_{\alpha} + M_{\dot{\vartheta}}P_{\alpha}}}, & T_1 &= \frac{M_{\delta} - M_{\dot{\alpha}}P_{\delta}}{M_{\delta}P_{\alpha} - M_{\alpha}P_{\delta}} \\ T &= \frac{1}{\sqrt{M_{\alpha} + M_{\dot{\vartheta}}P_{\alpha}}}, & T_2 &= \sqrt{\frac{P_{\delta}}{M_{\delta}P_{\alpha} + M_{\alpha}P_{\delta}}} \\ K_{\dot{\vartheta}} &= \frac{M_{\delta}P_{\alpha} - M_{\alpha}P_{\delta}}{M_{\alpha} + M_{\dot{\vartheta}}P_{\alpha}}, & K_n &= K_{\dot{\vartheta}} \frac{V}{57,3g}\end{aligned}$$

Współczynniki transmitancji (2) i (3) są zmienne i zależne od prędkości  $V$  oraz wysokości  $H$  lotu; ogólnie stwierdza się, że są funkcją czasu.

Układ równań (1) można zapisać w postaci macierzowej

$$\dot{\underline{x}}(t) = A_c \underline{x}(t) + B_c \delta(t) + W_c \quad (4)$$

przy czym:

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= [x_1(t), x_2(t)]^T = [\dot{\vartheta}(t), \alpha(t)]^T \\ A_c &= \begin{bmatrix} -M_{\dot{\vartheta}} - M_{\dot{\alpha}} & -M_{\alpha} + M_{\dot{\alpha}}P_{\alpha} \\ 1 & -P_{\alpha} \end{bmatrix}, & B_c &= \begin{bmatrix} M_{\delta} - M_{\dot{\alpha}}P_{\delta} \\ P_{\delta} \end{bmatrix}, & W_c &= \begin{bmatrix} M_w - M_{\dot{\alpha}}P_w \\ P_w \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Również w tym przypadku parametry modelu (4), tj. macierze  $A_c$ ,  $B_c$  i  $W_c$  są funkcjami czasu.

### 3. Algorytmny identyfikacji

Samolot jest obiektem, którego właściwości statyczne i dynamiczne zmieniają się w czasie lotu, na ogół jednak zmiany są powolne. Z tych też względów dopuszczalne jest założenie, że istnieje przedział czasu  $\Delta T$ , w którym parametry modelu matematycznego

(2) lub (4) nie ulegają istotnym zmianom. Do identyfikacji parametrów modelu matematycznego należy wówczas zastosować metodę, której proces przejściowy nie będzie dłuższy niż  $\Delta T$ . Tak postawiony problem rozwiązany zostanie przy pomocy metody najmniejszych kwadratów, której algorytmy cechują się wysoką zbieżnością i dokładnością identyfikacji.

W warunkach quasistacjonarności, dyskretna postać równania (4) określona jest następująco

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\delta(k) + W \quad (5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= \exp(A_c T) \\ B &= A_c^{-1} (\exp(A_c T) - I) B_c \\ W &= A_c^{-1} (\exp(A_c T) - I) W_c \end{aligned}$$

W przypadku małej wartości okresu impulsowania  $T$  można ograniczyć się do przybliżenia liniowego rozwinięcia macierzy  $\exp(A_c T)$  w szereg potęgowy i wówczas

$$\begin{aligned} A &= I + A_c T \\ B &= B_c T \\ W &= W_c T \end{aligned} \quad (6)$$

Identyfikację parametrów modelu matematycznego (5) można przeprowadzić w oparciu o pomiar  $\delta(k)$  i  $\dot{\theta}(k)$  lub w oparciu o pomiar  $\delta(k)$  oraz  $\underline{x}(k)$ .

W metodzie bazującej na pomiarze skalnych sygnałów (tj.  $\delta(k)$  i  $\dot{\theta}(k)$ ) konieczne jest przedstawienie modelu (5) w postaci kanonicznej Frobeniusa. Dla kwadratowego wskaźnika jakości algorytm identyfikacji ma postać:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(k) &= \hat{\varphi}(k-1) + P(k) G^T(k) Q(k) [\dot{\theta}(k) - G(k) \hat{\varphi}(k-1)] \\ P(k) &= P(k-1) - P(k-1) G^T(k) [Q^{-1}(k) + G(k) P(k-1) G^T(k)]^{-1} G(k) P(k-1) \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:  $\hat{\varphi}(k)$  — estymator macierzy parametrów  $\varphi$ ,

$$\varphi = [a_1, a_2, c_1, c_2],$$

$$G(k) = [\dot{\theta}(k-1), \dot{\theta}(k-2), \delta(k-1), \delta(k-2)]^T,$$

$Q(k)$  — współczynnik wagi.

Identyfikowane elementy macierzy  $\varphi$  powiązane są z elementami macierzy stanu  $A$  i macierzy sterowania  $B$  modelu (5) zależnościami:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}, & a_2 &= a_{11} + a_{22} \\ c_1 &= b_1, & c_2 &= b_1(a_{11} - a_{12} - a_{22}) + b_2 a_{22} \end{aligned} \quad (8)$$

Algorytm (7), uzupełniony warunkami początkowymi  $\hat{\varphi}(0)$  i  $P(0)$ , pozwala określić wartości parametrów równania (5) z minimalnym średniokwadratowym błędem, spowodowanym szumami pomiarowymi i zakłóceniami działającymi na samolot. Algorytm ten posiada dobrą zbieżność i dokładność identyfikacji, jeśli parametry identyfikowanego obiektu w czasie trwania procesu identyfikacji są stałe lub niewiele zmieniające się. Jeśli

natomiast zmieniają się — algorytm ten traci zbieżność. Wówczas lepsze wyniki uzyskuje się stosując następujący algorytm:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(k) &= \hat{\phi}(k-1) + P(k)G^T(k)Q(k)[\hat{\theta}(k) - G(k)\hat{\phi}(k-1)] \\ P(k) &= R(k) - R(k)G^T(k)[Q^{-1}(k) + G(k)R(k)G^T(k)]^{-1}G(k)R(k)\end{aligned}\quad (9)$$

przy czym najczęściej przyjmuje się  $R(k) = \gamma I$ , gdzie  $I$  jest macierzą jednostkową a  $\gamma$  współczynnikiem o dużej wartości (rzędu  $10^3 \div 10^5$ ). Zbieżność tego algorytmu można dodatkowo poprawić dobierając eksperymentalnie ciąg wartości współczynników wagi  $Q(k)$ .

W przypadku, gdy niestacjonarność identyfikowanych parametrów jest silna, algorytmy rekurencyjne najczęściej są rozbieżne. Lepsze wyniki osiąga się stosując tzw. układ równań normalnych. Niech  $\Delta T$  będzie przedziałem czasu, w którym parametry obiektu nie ulegają istotnym zmianom. Dla tego przedziału estymator identyfikowanych parametrów, uzyskany metodą najmniejszych kwadratów ma postać

$$\hat{\phi} = [G^T(N)G(N)]^{-1}G^T(N)\bar{y}(N)\quad (10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}G(N) &= [G^T(1)|G^T(2)|\dots|G^T(N)]^T \\ \bar{y}(N) &= [\hat{\theta}(1), \hat{\theta}(2), \dots, \hat{\theta}(N)]\end{aligned}$$

Idea tej metody polega na tym, że w każdym przedziale czasu  $\Delta T$  należy dokonać  $N$  pomiarów sygnału wejściowego  $\delta(k)$  i wyjściowego  $\hat{\theta}(k)$  w chwilach dyskretnych  $k$ , przy czym  $N \geq 4$ , a następnie przetwarzać je zgodnie z zależnością (10). Najczęściej równania (10) rozwiązuje się w oparciu o dekompozycję macierzy, np. metodą ortogonalizacji Householdera lub metodą SVD. Zwiększenie ilości pomiarów  $N$  ma duże znaczenie w przypadku działania na układ zakłóceń i szumów pomiarowych. Wpływ wymienionych zjawisk na dokładność identyfikacji można zmniejszyć stosując odpowiednią filtrację.

Identyfikacji parametrów modelu matematycznego samolotu można także dokonać poprzez pomiar sygnału wejściowego  $\delta(k)$  oraz wektora stanu  $\underline{x}(k)$ . Wówczas algorytm identyfikacji ma postać:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^T(k) &= \hat{\psi}^T(k-1) + P(k)S(k)Q(k)[\underline{x}^T(k) - S^T(k)\hat{\psi}^T(k-1)] \\ P(k) &= P(k-1) - P(k-1)S(k)[Q^{-1}(k) + S^T(k)P(k-1)S(k)]^{-1}S^T(k)P(k-1)\end{aligned}\quad (11)$$

przy czym:

$$\psi = [A^T|B], \quad S(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}(k-1) \\ \delta(k-1) \end{bmatrix}$$

Również w tym przypadku macierz kowariancji  $P(k-1)$  można zastąpić macierzą  $R(k)$ , analogicznie jak w algorytmie (9). Zaletą algorytmu (11) jest wyższa, niż algorytmu (9), zbieżność i dokładność identyfikacji, wadą — konieczność pomiaru kąta pochylenia  $\hat{\theta}(k)$  i kąta natarcia  $\alpha(k)$ . Gdy zmiany parametrów są szybkie, zamiast algorytmu rekurencyjnego (11) należy zastosować układ równań normalnych, wynikających z metody najmniejszych kwadratów.

W wielu przypadkach zachodzi konieczność określania parametrów ciągłego modelu matematycznego. Ciągły model matematyczny obiektu można uzyskać jako przypadek

graniczny modelu dyskretnego, przyjmując, że okres impulsowania  $T$  dąży do zera. Wówczas macierze  $A_c$  i  $B_c$  równania (4) można określić z zależności (6)

$$\begin{aligned} A_c &= (A - I)T^{-1} \\ B_c &= BT^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

Jeżeli okres impulsowania  $T$  ma dużą wartość, człony wyższego rzędu rozwinięcia macierzy  $\exp(A_c T)$  mają duży wpływ na  $A$  (nie są jeszcze bliskie zeru) i zależności (12) nie można stosować, gdyż błąd obliczenia macierzy  $A_c$  i  $B_c$  jest zbyt duży. Również bardzo mała wartość  $T$  nie jest wskazana, przy stosowaniu tych zależności, gdyż błąd identyfikacji parametrów modelu dyskretnego silnie przenosi się na wartości parametrów modelu ciągłego.

Macierze  $A_c$  i  $B_c$  określić można ze stosunkowo małym błędem, korzystając z równań (5) i tak:

$$\begin{aligned} A_c &= \frac{1}{T} \ln A \\ B_c &= [\exp(A_c T) - I]^{-1} A_c B \end{aligned} \quad (13)$$

Zasadniczą trudność sprawia tu obliczenie macierzy  $A_c$ . Jeśli wartości własne  $\lambda_j$  macierzy  $A$  spełniają warunek

$$|\lambda_j - 1| < 1 \quad j = 1, 2 \quad (14)$$

to słuszna jest zależność

$$A_c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (A - I)^k}{kT} \quad (15)$$

Dla układów stabilnych i  $\lambda_j > 0$  warunek (14) jest zawsze spełniony. Macierz  $B_c$  wyznaczyć można z zależności (13), uprzednio określając macierz  $\exp(A_c T)$ , lub też z zależności przybliżonej

$$B_c = \left[ - \sum_{k=0}^{\infty} A^k \right] A_c B \quad (16)$$

#### 4. Badania symulacyjne algorytmów identyfikacji

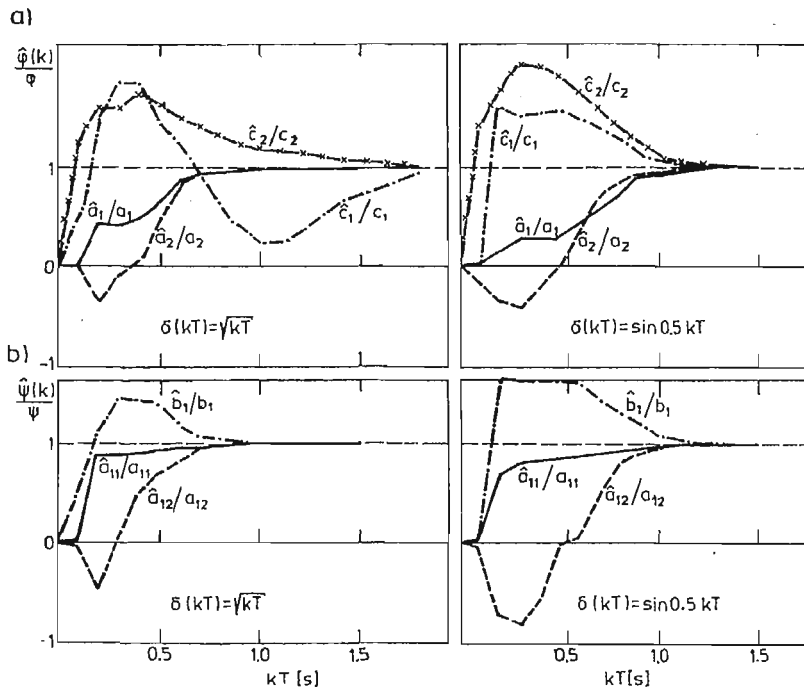
Przedstawione algorytmy identyfikacji przetestowano na EMC w celu oceny ich zbieżności i dokładności identyfikacji. Analizy dokonano dla stacjonarnego oraz niestacjonarnego modelu matematycznego. W pierwszym przypadku badano podstawowe właściwości algorytmów identyfikacji, w drugim — przydatność tych algorytmów do identyfikacji modeli niestacjonarnych.

Symulowany obiekt identyfikacji określony został przez model matematyczny (4); parametry tego modelu dla zakresu prędkości lotu  $Ma = 0,5 \div 1,8$  i zakresu wysokości lotu  $H = 0 \div 13500$  m zaczerpnięto z pracy [4].

Przyjęto następujące wartości parametrów identyfikowanego obiektu stacjonarnego

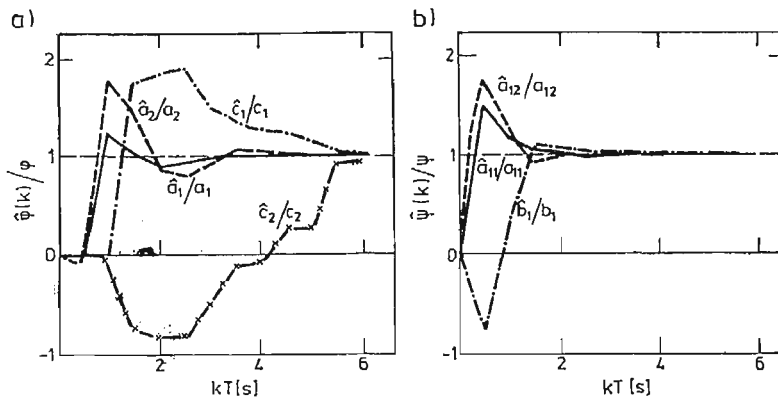
$$A = \begin{bmatrix} 0,95 & -0,2 \\ 0,1 & 0,95 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0,28 \\ 0,26 \end{bmatrix}$$

W wyniku symulacji stwierdzono (rys. 1), że algorytm (11) wykazuje dużo lepszą zbieżność niż algorytm (7). Również w przypadku uwzględnienia szumów pomiarowych (rys. 2)



Rys. 1. Zbieżność procesu identyfikacji dla obserwacji:

- a) — skalarnego sygnału wyjściowego,  
b) — pełnego wektora stanu.

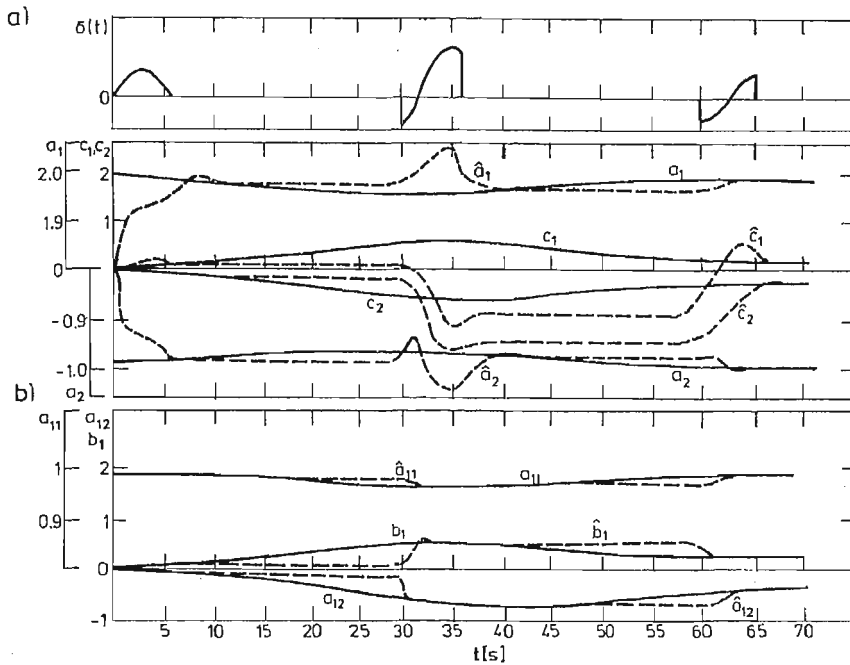


Rys. 2. Zbieżność procesu identyfikacji w przypadku uwzględnienia szumów pomiarowych dla obserwacji:

- a) — skalarnego sygnału wyjściowego,  
b) — pełnego wektora stanu.

— wniosek jest identyczny. Podczas symulacji przyjęto, że szумы pomiarowe są sygnałami losowymi o zerowych wartościach oczekiwanych i maksymalnych amplitudach nie przekraczających 10% amplitud mierzonych sygnałów.

Zbieżność algorytmu identyfikacji dla obiektu niestacjonarnego przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Identyfikacja obiektu niestacjonarnego przy obserwacji:  
a) — skalarne sygnału wyjściowego,  
b) — pełnego wektora stanu.

Podczas symulacji procesu identyfikacji założono, że samolot nabiera prędkości do wartości 2Ma i wysokości do 15000 m w ciągu 75s. Linią ciągłą oznaczono zmiany wartości parametrów obiektu, natomiast liniją przerywaną — zmiany wartości parametrów samolotu otrzymanych z procesu identyfikacji. Również w tym przypadku dużo wyższą zbieżność i dokładność identyfikacji wykazuje algorytm (11). Algorytm (7) przy dużej szybkości zmian parametrów obiektu utracił zbieżność. Oczywiście lepsze wyniki uzyska się stosując algorytm (8) lub (10).

## 5. Podsumowanie

Przedstawione algorytmy identyfikacji można z powodzeniem wykorzystać do identyfikacji parametrów stacjonarnego i niestacjonarnego modelu matematycznego. Jeśli jest możliwość obserwacji kąta natarcia  $\alpha(k)$  zaleca się stosować algorytmy bazujące na pełnej obserwacji wektora stanu modelu matematycznego samolotu, gdyż stabilność algorytmów (7) i (8) jest bardziej wrażliwa na zmiany parametrów obiektu niż algorytmu

(11). Trudno tu jest sformułować warunki graniczne, które określałyby dopuszczalną prędkość zmian parametrów. Proces identyfikacji jest tylko możliwy podczas trwania procesu przejściowego i musi odbywać się cyklicznie, tzn. wyniki uzyskane w poprzednim cyklu będą warunkami początkowymi dla nowego cyklu. Taki sposób postępowania istotnie podwyższa zbieżność i dokładność identyfikacji.

#### Literatura

1. A. P. SAGE, J. L. SELSA, *Estimation Theory with Application to Communication and Control*. New York, Mc Graw-Hill 1971.
2. T. STEFAŃSKI, *Zagadnienie syntezy dyskretnego, adaptacyjnego układu sterowania samolotu w kanale podłużnym*. Rozprawa doktorska, Kraków, AGH 1978.
3. V. STREJC, *Least Squares Parameter Estimation*. Automatica, No 3, 1980.
4. Ю. И. Топчеев, В. Г. Потемкин, *Системы стабилизации*. Машиностроение, Москва, 1974.

#### Резюме

#### ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ САМОЛЁТА

В работе рассматривается проблема параметрической идентификации дискретной математической модели в продольном канале методом наименьших квадратов. Показано что идентификация параметров нестационарной математической модели самолёта возможна в реальном времени на основе пассивного эксперимента, осуществляя измерения входного сигнала и тоже одной или всех переменных состояния этой модели. Проанализировано сходимость полученных алгоритмов идентификации, а тоже проблему определения непрерывной математической модели на основе дискретной модели, полученной в результате параметрической идентификации.

#### Summary

#### PARAMETRIC IDENTIFICATION OF MATHEMATICAL MODEL OF AIRCRAFT

The present paper deals with the problem of parametric identification of discrete mathematical model of aircraft in the oblong channel solved by means of the method of least squares. It is shown that identification of parameters of non-stationary mathematical model is possible in the real time basing upon passive experiment consisting of measurement of input signal as well as one or all variables of the state of the model. The convergence of the identification algorithms being obtained and the problem of determining of continuous mathematical model on the basis of discrete model resulting from parametric identification has been analysed.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 marca 1986 roku.*