

ISTNIENIE CAŁKI ENERGII W WYBRANYCH OBSZARACH OPŁYWU PROFILU CIECZĄ DOSKONAŁĄ

M. J. CIAŁKOWSKI

Politechnika Poznańska

*Autor składa podziękowania Pani Dr. M. E. Klonowskiej-Prosnak
za dyskusję nad niniejszą pracą.*

Oznaczenia:

- z — zmienna zespolona w płaszczyźnie fizycznej
- \bar{z} — zmienna zespolona sprzężona do zmiennej zespolonej z
- ζ — zmienna zespolona w płaszczyźnie pomocniczej
- a — promień walca opływanego
- w — potencjał zespolony opływu profilu w płaszczyźnie fizycznej
- W — potencjał zespolony opływu walca w płaszczyźnie pomocniczej
- v_∞ — prędkość zespolona przepływu jednostajnego w nieskończoności
- Γ — cyrkulacja
- Φ — funkcja potencjału prędkości
- Ψ — funkcja potencjału prądu
- $\operatorname{Re}(z)$ — część rzeczywista liczby zespolonej z
- $\operatorname{Im}(z)$ — część urojona liczby zespolonej z
- Ω — obszar opływu profilu
- $\partial\Omega$ — brzeg obszaru Ω
- Ω' — obszar opływu walca (w płaszczyźnie pomocniczej)
- $\partial\Omega'$ — brzeg obszaru Ω'

1. Wstęp

W wielu zagadnieniach przepływowych używa się do opisu ruchu płynu rachunku wariacyjnego. Prowadzi to do ujęcia ruchu płynu w kategoriach energii [3]. Obszar, w którym poszukuje się rozwiązania może być nieskończony a ponadto profil może posia-

dać ostrze. W tych przypadkach należy zbadać zachowanie się pierwszej wariacji funkcjonału w otoczeniu ostrza oraz w obszarze nieskończonym. Badanie to wynika z następujących faktów

- dla cieczy doskonałej przy opływie ostrza prędkość staje się w otoczeniu ostrza nieskończenie duża [1, 2]
- przy opływie pojedynczego profilu całkowita energia kinetyczna w obszarze opływu jest nieskończona [1, s. 52]

Drugi fakt skłania do wydzielenia z całej płaszczyzny fizycznej tej części obszaru, w którym całka z energii kinetycznej będzie skończona. Ruch cieczy doskonałej opisany jest równaniem Laplace'a [2, 5]. Jeśli przyjmiemy, że na brzegu obszaru składowa normalna prędkości jest daną funkcją p to opis ten jest równoważny poszukiwaniu funkcji potencjału prędkości Φ , który nadaje minimum następującemu funkcjonałowi [3]

$$J(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \Phi \nabla \Phi \, dx \, dy - \int_{\partial \Omega} \Phi \cdot p(s) \, ds; \quad \Phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial \Omega). \quad (1)$$

Minimalizacja funkcjonału (1) prowadzi do minimalizacji całki $(-\int_{\Omega} p \, d\Omega)$ dla zadanych warunków brzegowych (jest to zasada Batemana [4]). Ze względu na to, że wymiar wyrażenia (1) jest $[J/kg]$, funkcjonal (1) bywa również nazywany funkcjonałem energii.

Do zależności (1) możemy wprowadzić potencjał zespolony $w(z)$ opływu profilu, wówczas:

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{dw}{dz} \frac{\overline{dw}}{dz} \, dx \, dy - \int_{\partial \Omega} \operatorname{Re}[w(z)] \cdot p(s) \cdot ds. \quad (2)$$

Ze względu na równość energii kinetycznych w odpowiadających sobie obszarach w płaszczyźnie fizycznej i pomocniczej [1, s. 66] do badania zachowania się funkcjonału (2) wygodniej będzie przejść do płaszczyzny pomocniczej, w której znana jest postać potencjału zespolonego $W(\zeta)$ cyrkulacyjnego opływu walca [2].

$$W(\zeta) = \bar{v}_{\infty} \zeta + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \cdot \ln \zeta + \frac{v_{\infty} a^2}{\zeta}; \quad |\zeta| \geq a.$$

Przy rozwiązywaniu zagadnienia opływu płynem ściśliwym jako pierwsze przybliżenie przyjmuje się rozwiązanie zagadnienia opływu cieczą doskonałą (równania różniczkowe rządzące przepływem płynu ściśliwego są nieliniowe [2] a pierwsza wariacja funkcjonału energii nie jest funkcjonałem liniowym). Dlatego zbadanie istnienia I wariacji funkcjonału (1) jest zagadnieniem podstawowym.

Zagadnienie istnienia I wariacji funkcjonału (1) przedstawiono na przykładzie profilu o kącie ostrza $\delta = 0$ (profil Żukowskiego) oraz profilu o kącie ostrza $\delta > 0$ (profil Kármána-Treffftza).

2. Badanie istnienia całki (2) w punkcie osobliwym profilu o jednej stycznej

Dla zobrazowania zagadnienia zajmiemy się profilami uzyskanymi z odwzorowania zewnątrz koła za pomocą funkcji Żukowskiego [2]

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\bar{\zeta}}; \quad |\zeta| \geq a, \quad (3)$$

dla której funkcja odwrotna jest postaci:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4a^2} \right); \quad |z| \geq 2a, \quad (4)$$

oraz

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{2} \frac{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}}{\sqrt{z^2 - 4a^2}}. \quad (5)$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \left(\bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \frac{1}{\zeta} - \frac{v_\infty a^2}{\zeta^2} \right) \cdot \frac{d\zeta}{dz}, \\ \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} &= \left(\bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \frac{1}{\zeta} - \frac{v_\infty a^2}{\zeta^2} \right) \cdot \left(v_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \frac{1}{\bar{\zeta}} - \frac{\bar{v}_\infty a^2}{\bar{\zeta}^2} \right) \cdot \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} = \\ &= f(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} = f(\zeta) g(z), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= v_\infty \bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \left[\frac{v_\infty}{\zeta} - \left(\frac{\bar{v}_\infty}{\bar{\zeta}} \right) \right] \cdot \left(1 + \frac{a^2}{\zeta \bar{\zeta}} \right) + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\zeta \bar{\zeta}} + \\ &\quad - \left[\frac{v_\infty^2 a^2}{\zeta^2} + \left(\frac{v^2 a^2}{\zeta^2} \right) \right] + \frac{v_\infty \bar{v}_\infty a^4}{(\zeta \bar{\zeta})^2}, \end{aligned}$$

gdzie funkcja $f(\zeta(z))$ jest rzeczywista i ograniczona w obszarze Ω . Natomiast funkcja $g(z)$ jest określona wzorem:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} = \frac{1}{4} \frac{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}}{\sqrt{z^2 - 4a^2}} \cdot \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}}{\sqrt{z^2 - 4a^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\bar{z}z + \bar{z} \cdot \sqrt{z^2 - 4a^2} + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + \sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{z^2 - 4a^2}}{\sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{z^2 - 4a^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

i jest funkcją rzeczywistą. Licznik funkcji $g(z)$ jest funkcją ograniczoną w obszarze ograniczonym, gdyż

$$\begin{aligned} \left| \bar{z}z + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + \sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{z^2 - 4a^2} \right| &\leq \\ &\leq \max_{x, y \in \Omega_e} \left| \bar{z}z + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + \sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{z^2 - 4a^2} \right| = A. \end{aligned}$$

Funkcja $g(z)$ posiada osobliwość w punkcie $(x, y) = (2a, 0)$. Zbadajmy teraz istnienie całki (2) w obszarze Ω_e (rys. 1) zawierającym punkt osobliwy $(x, y) = (2a, 0)$. Zatem

$$I_1 = \int_{\Omega_e} \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} dx dy = \int_{\Omega_e} f(\zeta(z)) \cdot g(z) \cdot dx \cdot dy \leq \max_{(x, y) \in \Omega_e} f(\zeta(z)) \cdot \max g_1(z) \cdot I_2, \quad (8)$$

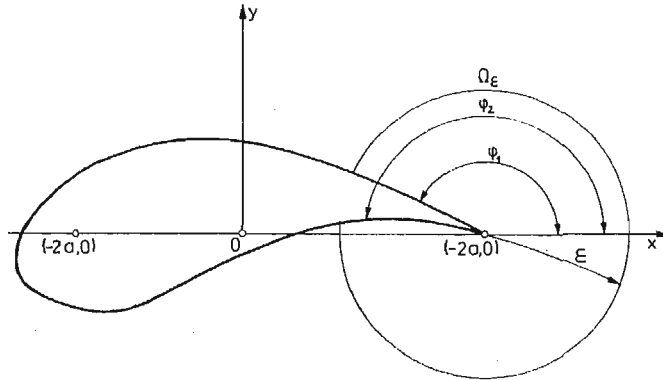
gdzie:

$$I_2 = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{dx \cdot dy}{\sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{\bar{z}^2 - 4a^2}}, \quad (9)$$

$$g_1(z) = \frac{1}{4} \left[z\bar{z} + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + (\bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2}) + \sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{\bar{z}^2 - 4a^2} \right],$$

$$\max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} |g_1(z)| = \frac{1}{4} A.$$

Zagadnienie istnienia całki I_1 sprowadziliśmy do badania istnienia całki I_2 . Dalsze roz-



Rys. 1.

ważania wygodniej będzie przeprowadzić w lokalnym układzie współrzędnych o początku w punkcie osobliwym (rys. 1), wtedy:

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, y) : x = 2a + \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi, \quad 0 \leq \varrho \leq \varepsilon, \\ 0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \quad \varphi_2 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$I_2 = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{dx \cdot dy}{\sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{\bar{z}^2 - 4a^2}} \int_0^\varepsilon \left(\int_0^{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}^{2\pi} \right) \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{\sqrt{\varrho^2(16a^2 + \varrho^2 + 8a\varrho \cos \varphi)}} = \\ = \int_0^{\varepsilon/4a} \left(\int_0^{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}^{2\pi} \right) \frac{d\varrho d\varphi}{\sqrt{1 + 2p \cos \varphi + p^2}}, \quad p = \frac{\varrho}{4a}. \quad (9a)$$

Stosując podstawienie $\varphi = 2\vartheta$ otrzymamy:

$$I_2 = \int_0^{\frac{\varepsilon}{4a}} \frac{2 \cdot dp}{1+p} \left(\int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} + \int_{\frac{\varphi_2}{2}}^{\pi} \right) \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = \int_0^{\frac{\varepsilon}{4a}} \frac{2dp}{1+p} \left(\int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} + \int_0^{\pi} - \int_0^{\frac{\varphi_2}{2}} \right) \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = \\ = \int_0^{\frac{\varepsilon}{4a}} \left[F\left(\frac{\varphi_1}{2}, k\right) + F(\pi, k) - F\left(\frac{\varphi_2}{2}, k\right) \right] \cdot \frac{2dp}{1+p}; \quad k^2 = \frac{4p}{1+p^2},$$

gdzie funkcje $F\left(\frac{\varphi_1}{2}, k\right)$, $F(\pi, k)$, $F\left(\frac{\varphi_2}{2}, k\right)$ są całkami eliptycznymi I rodzaju [6]. Dla $k^2 < 1$ całki eliptyczne I rodzaju posiadają wartość skończoną. Ponieważ $F(\pi, k) = 2F(\pi/2, k)$ oraz $\frac{\varphi_1}{2} \leq \frac{\varphi_2}{2} < \frac{\pi}{2}$, stąd $0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \pi - \varphi_1 < \pi$,

więc:

$$\begin{aligned} 0 &< 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + F\left(\frac{\varphi_1}{2}, k\right) - F\left(\frac{\varphi_2}{2}, k\right) \leq 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \\ I_2 &\leq \int_0^{\frac{\varepsilon}{4a}} 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \cdot \frac{2dp}{1+p} \leq 4 \cdot \max_{0 \leq p \leq \frac{\varepsilon}{4a}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \cdot \int_0^{\frac{\varepsilon}{4a}} \frac{dp}{1+p} = \\ &= 4 \max_{0 \leq p \leq \frac{\varepsilon}{4a}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{4a}\right). \end{aligned} \tag{9b}$$

Zatem na mocy monotoniczności funkcji $F\left(\frac{\pi}{2}, k(p)\right)$ mamy:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} f(\zeta(z)) \cdot \max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} g_l(z) \cdot 4 \cdot \max_{0 \leq p \leq \frac{\varepsilon}{4a}} F\left(\frac{\pi}{2}, k(p)\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{4a}\right) \\ &= \max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} f(\zeta(z)) \cdot \max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} g_l(z) \cdot 4F\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{4a}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{4 \cdot \frac{\varepsilon}{4a}}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{4a}\right)^2} = \frac{16a \cdot \varepsilon}{(4a + \varepsilon)^2} < 1.$$

Dla $k = 1$ ($p = 1$, $\varrho = 4a$) funkcja podcałkowa w (9a) przyjmuje postać

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2p \cos \varphi + p^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi)}}$$

i posiada osobliwość dla $\varphi = \pi$. Punkt o współrzędnych:

$$\begin{aligned} x &= 2a + \varrho \cos \varphi|_{(4a, \pi)} = -2a, \\ y &= \varrho \cdot \sin \varphi|_{(4a, \pi)} = 0, \end{aligned}$$

jest drugim punktem osobliwym profilu. Punkt $(x, y) = (-2a, 0)$ leży we wnętrzu profilu ($\varphi_1 < \pi$, $\varphi_2 > \pi$) jeśli koło w płaszczyźnie pomocniczej ma środek poza początkiem układu współrzędnych. Całka I_2 jest wtedy ograniczona. Jeśli koło w płaszczyźnie pomocniczej ma środek w początku układu współrzędnych, wówczas profil redukuje się do odcinka mającego końce w punktach $(-2a, 0)$ i $(2a, 0)$ [6]. Musimy zatem zbadać zachowanie się całki w otoczeniu punktu $(-2a, 0)$. Dla profilu o wielu punktach osobliwych nie

leżących we wnętrzu profilu obszar Ω_ε dzielimy na podobszary Ω_{ε_i} , $i = 1, 2, \dots, N$ z których każdy zawiera tylko jeden punkt osobliwy i badamy zachowanie się całki I_2 w obszarze $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N \Omega_{\varepsilon_i}$. Dla powyższego przypadku obszar Ω_{ε_1} jest określony następująco:

$$\Omega_{\varepsilon_1} = \{(x, y): x = -2a + \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi, \quad 0 \leq \varrho \leq \varepsilon_1, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\Omega_{\varepsilon_2} = \Omega_\varepsilon, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq 4a,$$

przeto:

$$I_2 = \int_0^{\varepsilon_1} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{\sqrt{\varrho^2(16a^2 + \varrho^2 - 8a\varrho \cos \varphi)}} = \int_0^{\frac{\varepsilon_1}{4a}} \int_0^{2\pi} \frac{dp d\varphi}{\sqrt{1 - 2p \cos \varphi + p^2}} = \\ = \int_0^{\frac{\varepsilon_1}{4a}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp d\vartheta}{\sqrt{1 + 2p \cos \vartheta + p^2}} = 2 \int_0^{\frac{\varepsilon_1}{4a}} \int_0^{\pi} \frac{dp d\vartheta}{\sqrt{1 + 2p \cos \vartheta + p^2}} = \\ = 2 \int_0^{\frac{\varepsilon_1}{4a}} \frac{2dp}{1+p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = \int_0^{\frac{\varepsilon_1}{4a}} 2F\left(\frac{\pi}{2}, k(p)\right) \cdot \frac{2dp}{1+p}. \quad (11)$$

Ponieważ $\varepsilon_1 < 4a$ a stąd $k < 1$, więc całka (11) jest ograniczona i zachodzi oszacowanie (10).

3. Badanie istnienia całki (2) w otoczeniu punktu osobliwego profilu z ostrzem o dwóch stycznych

Przykładem profilu mającego w ostrzu dwie styczne jest profil Kármána-Trefftza (profil sierpowy), którego ostrza są położone symetrycznie względem osi urojonej i leżą na osi odciętych w punktach $(-mc, 0)$ i $(mc, 0)$ [2].

Profile Kármána-Trefftza otrzymuje się przez odwzorowanie zewnątrz koła o środku na osi urojonej według funkcji:

$$\frac{z - mc}{z + mc} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right)^m, \quad m > 1, \quad (13)$$

dla której funkcja odwrotna jest postaci:

$$\zeta = c \cdot \frac{(z + mc)^{\frac{1}{m}} + (z - mc)^{\frac{1}{m}}}{(z + mc)^{\frac{1}{m}} - (z - mc)^{\frac{1}{m}}}, \quad (14)$$

oraz:

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{4c^2}{(z^2 - m^2c^2)^{1 - \frac{1}{m}} [(z + mc)^{\frac{1}{m}} - (z - mc)^{\frac{1}{m}}]^2} = \frac{h(z)}{(z^2 - m^2c^2)^{1 - \frac{1}{m}}},$$

gdzie funkcja $h(z)$ jest równa:

$$h(z) = \frac{4c^2}{[(z+mc)^{\frac{1}{m}} - (z-mc)^{\frac{1}{m}}]^2}$$

i jest funkcją ograniczoną na zewnątrz profilu.

Zatem analogicznie do (6) mamy:

$$\frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{dz} = f(\zeta(z)) \cdot \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{\zeta}}{dz} = f(\zeta(z)) \cdot q(z),$$

gdzie funkcja $q(z)$ jest rzeczywista

$$q(z) = \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{\zeta}}{dz} = \frac{h(z) \cdot \overline{h(z)}}{(z^2 - m^2c^2)^{1-\frac{1}{m}} (z^2 - m^2c^2)^{1-\frac{1}{m}}} \leq A \cdot q_1(z),$$

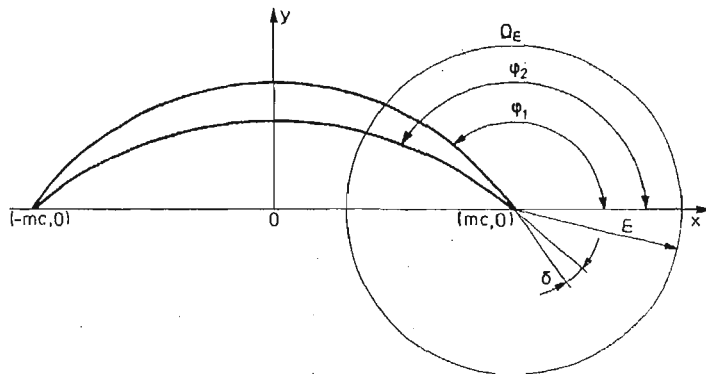
oraz

$$A = \max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} (h(z) \cdot \overline{h(z)}, q_1(z(x,y))) = \frac{1}{[(x^2 - y^2 - m^2c^2)^2 + 4x^2y^2]^{1-\frac{1}{m}}}.$$

Podobnie jak poprzednio zbadamy istnienie pierwszej całki w zależności (2) w otoczeniu punktu osobliwego. Ze względu na to, że funkcje $f(\zeta(z))$ i $h(z) \cdot \overline{h(z)}$ są ograniczone w obszarze Ω_ε (rys. 2) wystarczy zbadać istnienie całki

$$I_3 = \int_{\Omega_\varepsilon} q_1(z) dx dy \tag{15}$$

w obszarze Ω_ε zawierającym punkt osobliwy.



Rys. 2.

Dla ułatwienia rozważań zastosujemy lokalny układ współrzędnych (ϱ, φ) w obszarze Ω_ε , wtedy obszar Ω_ε jest określony następująco:

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, y): x = m \cdot c + \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Całką (15) przyjmie zatem postać:

$$I_3 = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \left(\int_0^{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}^{2\pi} \right) \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{\{\varrho^2[\varrho^2 + 2\varrho \cdot 2mc \cdot \cos \varphi + (2mc)^2]\}^{1-\frac{1}{m}}} =$$

$$= \frac{1}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \left(\int_0^{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}^{2\pi} \right) \frac{p^{\frac{2}{m}} dp d\varphi}{(1+2p \cos \varphi + p^2)^{1-\frac{1}{m}}}; \quad p = \frac{\varphi}{2mc}. \quad (15a)$$

Stosując dalej podstawienie $\varphi = 2\vartheta$ otrzymujemy:

$$I_3 = \frac{1}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \frac{2p^{\frac{2}{m}-1} dp}{(1+p)^{2-\frac{2}{m}}} \left(\int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} + \int_{\frac{\varphi_2}{2}}^{\pi} \right) \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{1-\frac{1}{m}}}.$$

Całki wewnętrzne możemy przekształcić następująco:

$$\int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} + \int_{\frac{\varphi_2}{2}}^{\pi} = \int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} + \int_0^{\pi} - \int_0^{\frac{\varphi_2}{2}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} - \int_0^{\frac{\varphi_2}{2}},$$

więc:

$$I_3 = \frac{1}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \frac{2p^{\frac{2}{m}-1} dp}{(1+p)^{2-\frac{2}{m}}} \cdot \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} - \int_0^{\frac{\varphi_2}{2}} \right) \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{1-\frac{1}{m}}}.$$

Ponieważ $\varphi_2 \geq \varphi_1$ oraz funkcja podcałkowa jest dodatnia, przeto:

$$\left(\int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} - \int_0^{\frac{\varphi_2}{2}} \right) \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{1-\frac{1}{m}}} \leq 0,$$

a stąd:

$$I_3 \leq \frac{1}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \frac{2p^{\frac{2}{m}-1} dp}{(1+p)^{2-\frac{2}{m}}} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{1-\frac{1}{m}}}.$$

Parametr m określa kąt δ w ostrzu, $\delta = (2-m) \cdot \pi$, spełnia więc nierówność $1 < m \leq 2$ oraz na mocy monotoniczności funkcji podcałkowej mamy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{1-\frac{1}{m}}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &\leq \frac{1}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \frac{2p^{\frac{2}{m}-1}}{(1+p)^{2-\frac{2}{m}}} dp \leq \\
 &\leq \frac{4}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \cdot \max_{0 \leq p \leq \frac{\varepsilon}{2mc}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \cdot \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \frac{p^{\frac{2}{m}-1}}{(1+p)^{2-\frac{2}{m}}} dp \leq \\
 &\leq \frac{4}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \cdot \max_{0 \leq p \leq \frac{\varepsilon}{2mc}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \cdot \begin{cases} \frac{m}{2-m} \cdot \left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{2mc}\right)^{\frac{2}{m}-1} - 1 \right] & 0 < m < 2 \\ \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{4c}\right) & m = 2 \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Pokazaliśmy więc, że również dla profilu o dwóch stycznych w ostrzu całka (2) jest ograniczona. Dla $m = 2$ wynik (16) jest identyczny z (9b), gdyż profil Kármána-Treffftza jest modyfikacją profilu Żukowskiego i dla $m = 2$ funkcje (3) i (13) są identyczne.

4. Badanie istnienia całki (2) w obszarze nieorganicznym

Całka

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \frac{\frac{dW}{d\zeta} \left(\frac{d\bar{W}}{d\bar{\zeta}} \right)}{\frac{dz}{d\zeta} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} \right)} \cdot J \cdot d\zeta \cdot d\eta = \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\bar{W}}{d\bar{\zeta}} d\zeta d\eta \tag{17}$$

wyraża energię kinetyczną cieczy doskonałej. C. Witoszyński pokazał [1], że energia kinetyczna w obszarze nieskończonym na zewnątrz walca (przy pominięciu energii kinetycznej pochodzącej od przepływu jednostajnego) jest nieskończenie duża. Rozważania nasze przeprowadzimy dla potencjału zespolonego z pominięciem członu odpowiadającego przepływowi jednostajnemu, wtedy:

$$\begin{aligned}
 \hat{W}(\zeta) &= W(\zeta) - \bar{v}_{\infty} \cdot \zeta = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \ln \zeta + \frac{v_{\infty} a^2}{\zeta}, \\
 \hat{w}(z) &= \Phi(x, y) - \text{Re}(\bar{v}_{\infty} z) + i[\psi(x, y) - \text{Im}(\bar{v}_{\infty} z)] = \\
 &= \Phi(x, y) - u(x, y) + i[\psi(x, y) - V(x, y)] = \hat{\Phi}(x, y) + i\hat{\Psi}(x, y), \\
 u(x, y) &= \text{Re}(\bar{v}_{\infty} z) = x \cdot v_x + y \cdot v_y, \quad V(x, y) = \text{Im}(\bar{v}_{\infty} z) = y \cdot v_x - x \cdot v_y.
 \end{aligned}$$

Stąd funkcjonał energii ma postać:

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \cdot dx \cdot dy - \int_{\partial\Omega} \hat{\Phi} \cdot \hat{p}(s) \cdot ds =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d\hat{W}}{dz} \frac{d\bar{\hat{W}}}{dz} \cdot dx \cdot dy - \int_{\partial\Omega} \operatorname{Re}[\hat{w}] \cdot \hat{p}(s) \cdot ds = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \frac{d\hat{W}}{d\xi} \frac{d\bar{\hat{W}}}{d\bar{\xi}} d\xi \cdot d\eta - \int_{\partial\Omega'} \operatorname{Re}[\hat{W}] \cdot P(S) \cdot dS,
 \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie:

$$P(S) = \frac{\partial}{\partial n} [\operatorname{Re}(\hat{W})],$$

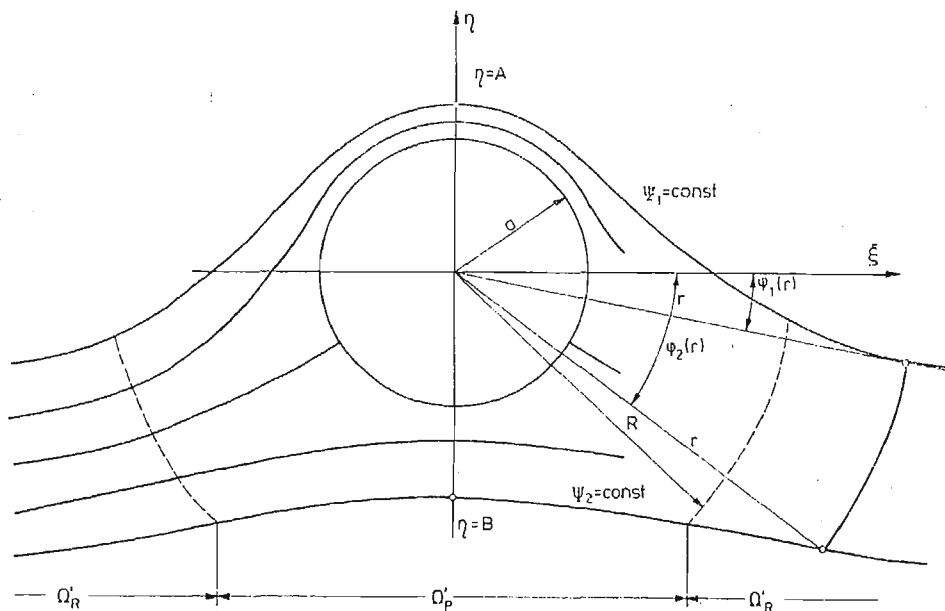
n -normalna zewnętrzna do brzegu

Zajmiemy się teraz zbadaniem istnienia pierwszej całki zależności (18)

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \frac{d\hat{W}}{d\xi} \frac{d\bar{\hat{W}}}{d\bar{\xi}} \cdot d\xi \cdot d\eta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \left[\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + \frac{\Gamma a^2}{2\pi \cdot i} \left(\frac{v_\infty}{\xi} - \frac{\bar{v}_\infty}{\bar{\xi}} \right) + \frac{v_\infty \bar{v}_\infty}{\xi \bar{\xi}} a^4 \right] \frac{d\xi d\eta}{\xi \bar{\xi}}.
 \end{aligned}$$

Zachodzi pytanie czy w pasie nieskończonym zawierającym profil, całka (18) będzie miała wartość skończoną. Dla uproszczenia rozważań podzielimy obszar na dwie części $\Omega' = \Omega'_p \cup \Omega'_R$, gdzie Ω'_p jest obszarem zawartym między liniami prądu Ψ_1 i Ψ_2 (rys. 3) i promieniem $r < R$ natomiast obszar Ω'_R zawarty jest między liniami prądu Ψ_1 i Ψ_2 i $r \geq R$. W obszarze skończonym Ω'_p na mocy poprzednich rozważań całka (18) jest ograniczona. Zatem wystarczy zbadać całkę I_4 tylko w obszarze Ω'_p określonym zależnościami

$$\Omega'_p = \{(r, \varphi) : \varphi_2(r) \leq \varphi \leq \varphi_1(r), \quad r \geq R > a\}.$$



Rys. 3.

Dla uproszczenia przyjmijmy $v_\infty = \bar{v}_\infty^{\frac{1}{2}}$. Całkę I_4 zbadamy w biegunowym układzie współrzędnych (rys. 3)

$$\xi = r \cdot \cos \varphi, \quad \eta = r \cdot \sin \varphi, \quad \text{stąd: } \zeta = r \cdot e^{i\varphi},$$

wtedy:

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2} \int_R^\infty \int_{\varphi_2(r)}^{\varphi_1(r)} \left[\frac{\Gamma^2}{4 \cdot \pi^2} + \frac{\Gamma a^2}{2 \cdot \pi} \frac{-2v_\infty \sin \varphi + \frac{v_\infty^2 a^4}{r^2}}{r} \right] \frac{r \cdot dr \cdot d\varphi}{r^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_R^\infty \left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + \frac{v_\infty^2 a^4}{r^2} \right) \frac{\varphi_2(r) - \varphi_1(r)}{r} \cdot dr - \frac{\Gamma \cdot a^2 v_\infty}{2 \cdot \pi} \int_R^\infty \int_{\varphi_2(r)}^{\varphi_1(r)} \frac{\sin \varphi}{r^2} d\varphi \cdot dr. \quad (19) \end{aligned}$$

Druga całka w zależności (19) ma wartość skończoną gdyż:

$$\begin{aligned} \int_R^\infty \int_{\varphi_2(r)}^{\varphi_1(r)} \frac{\sin \varphi}{r^2} \cdot d\varphi \cdot dr &\leq \int_R^\infty \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} \frac{d\varphi \cdot dr}{r^2} = \int_R^\infty \frac{\varphi_1(r) - \varphi_2(r)}{r^2} dr \leq \\ &\leq \max_{R \leq r < \infty} [\varphi_1(r) - \varphi_2(r)] \cdot \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{R} \max_{R \leq r < \infty} [\varphi_1(r) - \varphi_2(r)]. \end{aligned}$$

Również drugi składnik pierwszej całki w zależności (19) daje całkę skończoną

$$\frac{1}{2} \int_R^\infty \frac{v_\infty^2 a^4}{r^2} \frac{\varphi_1(r) - \varphi_2(r)}{r} dr \leq \frac{1}{4} \frac{v_\infty^2 a^4}{R^2} \max_{R \leq r < \infty} [\varphi_1(r) - \varphi_2(r)],$$

zatem o skończoności całki I_5 decydować będzie całka:

$$I_5 = \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{4 \cdot \pi^2} \int_0^\infty \frac{\varphi_1(r) - \varphi_2(r)}{r} dr \leq \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{4 \cdot \pi^2} \int_R^\infty \frac{|\varphi_1(r) - \varphi_2(r)|}{r} dr. \quad (20)$$

Całka I_5 będzie skończona tylko wtedy gdy:

$$|\varphi_1(r) - \varphi_2(r)| = H(r) < \frac{c}{r^\alpha}, \quad c > 0, \quad \alpha > 0.$$

Dla każdej funkcji $H(r)$ spełniającej powyższy warunek całka (20) będzie skończona. Dla $c = 2\pi$ i $\alpha = 0$ otrzymujemy całkę rozbieżną zgodną z wynikiem uzyskanym przez Witoszyńskiego [1]. Wyznamy teraz kąt widzenia $\varphi_2(r) - \varphi_1(r)$ przekroju o promieniu r zawartego między liniami prądu Ψ_1 i Ψ_2 , które przechodzą przez punkty A i B (rys. 3). Równanie linii prądu jest następujące [2]:

$$\psi = v_\infty \cdot \eta - v_\infty a^2 \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Zatem równania linii prądu przechodzących przez punkty A i B wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} \psi_1: v_\infty A - \frac{v_\infty a^2}{A} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln |A| &= v_\infty \cdot \eta - v_\infty a^2 \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ \psi_2: v_\infty B - \frac{v_\infty a^2}{B} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln |B| &= v_\infty \cdot \eta - v_\infty a^2 \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \end{aligned}$$

lub we współrzędnych biegunowych:

$$\varphi_1: v_\infty(A - r \cdot \sin \varphi) - v_\infty a^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{\sin \varphi}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \ln \frac{|A|}{r} = 0,$$

$$\varphi_2: v_\infty(B - r \cdot \sin \varphi) - v_\infty a^2 \left(\frac{1}{B} - \frac{\sin \varphi}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \ln \frac{|B|}{r} = 0.$$

Stąd:

$$\sin \varphi_1(r) = \frac{A - \frac{a^2}{A}}{r - \frac{a^2}{r}} - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot v_\infty} \frac{\ln \frac{|A|}{r}}{r - \frac{a^2}{r}}; \lim_{r \rightarrow \infty} \sin \varphi_1(r) = 0, \quad (21)$$

$$\sin \varphi_2(r) = \frac{B - \frac{a^2}{B}}{r - \frac{a^2}{r}} - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot v_\infty} \frac{\ln \frac{|B|}{r}}{r - \frac{a^2}{r}}; \lim_{r \rightarrow \infty} \sin \varphi_2(r) = 0, \quad (22)$$

$$\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 = 2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} =$$

$$= \frac{B - A - a^2 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right)}{r - \frac{a^2}{r}} - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot v_\infty} \frac{\ln \frac{|B|}{A}}{r - \frac{a^2}{r}},$$

$$2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \frac{B - A - a^2 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot v_\infty} \ln \frac{|B|}{A}}{r - \frac{a^2}{r}} = \frac{D}{r - \frac{a^2}{r}}.$$

Dla dostatecznie dużych wartości r zachodzi nierówność $0 \leq \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$. Pozwala to na wykorzystanie następującej nierówności:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \leq \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\pi} \cdot \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}.$$

Zatem:

$$\begin{aligned} I_5 &\leq \frac{\Gamma^2}{4 \cdot \pi^2} \int_R^\infty \frac{1}{r} \left| \frac{\varphi_2(r) - \varphi_1(r)}{2} \right| dr \leq \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \int_R^\infty \frac{1}{r} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2 \left| \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right|} \frac{|D|}{r - \frac{a^2}{r}} dr \leq \\ &\leq \frac{\Gamma^2}{4\pi^3} \frac{|D|}{\min_{R \leq r < \infty} \left| \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right|} \cdot \int_R^\infty \frac{dr}{r^2 - a^2} = D_1 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2 - a^2} = \frac{D_1}{2} \ln \frac{R+a}{R-a}, \end{aligned}$$

Zbadajmy teraz drugą całkę w (18). Wyznaczmy funkcję $P(S)$, $P(S) = v_\xi \cdot \cos \alpha + v_\eta \cdot \sin \alpha$, gdzie kąt α zawarty jest między normalną zewnętrzną do $\partial\Omega'$ a osią x . Prędkość zespolona wynosi:

$$\frac{d\hat{W}}{d\zeta} = v_\xi - i \cdot v_\eta = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \zeta} - \frac{v_\infty a^2}{\zeta^2},$$

stąd:

$$v_\xi = -\frac{\Gamma \cdot \eta}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{v_\infty a^2 (\xi^2 - \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} \cdot \frac{1}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$v_\eta = -\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{2 \cdot \xi \cdot \eta \cdot v_\infty}{(\xi^2 + \eta^2)^2},$$

oraz

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v_\xi = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v_\eta = 0,$$

$$\hat{P}(S) \cdot \text{Re}[\hat{W}] = \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \text{arctg} \frac{\eta}{\xi} + \frac{v_\infty a^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2} \right) \cdot (v_\xi \cdot \cos \alpha + v_\eta \cdot \sin \alpha). \quad (23)$$

Dla dostatecznie dużych wartości ξ mamy [7]:

$$\text{arctg} \frac{\eta}{\xi} = \frac{\eta}{\xi} - \frac{1}{3} \left(\frac{\eta}{\xi} \right)^3 + \dots, \quad \left| \frac{\eta}{\xi} \right| < 1,$$

$$v_\xi \cdot \text{Re}[\hat{W}] = B_1 \frac{1}{\xi^3} + B_2 \frac{1}{\xi^5} + \dots, \quad B_1, B_2 \neq 0, \quad (24)$$

$$v_\eta \cdot \text{Re}[\hat{W}] = C_2 \frac{1}{\xi^2} + C_3 \frac{1}{\xi^4} + \dots, \quad C_1, C_2 \neq 0, \quad (25)$$

oraz linie Ψ_1 i Ψ_2 są równoległe do osi x (zależność (21), (22)) a całka

$$\int_{\partial\Omega'} \text{Re}[\hat{W}] \cdot \hat{P}(S) dS = \int_{\Psi_2} \text{Re}[\hat{W}] \hat{P}(S) dS + \int_{\Psi_1} \text{Re}[\hat{W}] \hat{P}(S) dS$$

jest skończona wtedy i tylko wtedy gdy funkcja podcałkowa posiada oszacowanie

$$|\text{Re}[\hat{W}] \cdot \hat{P}(S)| \leq \frac{E}{\xi^\beta}, \quad E > 0, \quad \beta > 1, \quad (26)$$

co na mocy (23)–(25) jest zachowane. Zatem całka po brzegu z zależności (18) w pasie nieskończonym obejmującym profil jest skończona. Pokazaliśmy więc, że dla różnych wartości cyrkulacji Γ całka (18) w pasie nieskończonym zawartym między dwoma liniami prądu obejmującymi profil ma wartość skończoną.

5. Uwagi końcowe

Przedstawione rozważania dotyczyły wybranych dwóch profili, o jednej oraz o dwóch stycznych w ostrzu. Zachodzi zatem naturalne pytanie o istnienie całki energii w przypadku dowolnych profili mających ostrze. W takich przypadkach całka energii będzie

istnieć, co wynika z następującego rozumowania. Dla profilu o jednej stycznej ostrze jego może być aproksymowane ostrzem profilu Żukowskiego i w otoczeniu ostrza funkcja odwzorowania Żukowskiego odwzorowuje aproksymowany profil na krzywą styczną do koła w punkcie odpowiadającym ostrzu. Ograniczoność całki energii dla profilu aproksymowanego w otoczeniu ostrza będzie wynikać z ograniczoności całki energii dla profilu Żukowskiego, co zostało już wykazane. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla profilu o dwóch stycznych w ostrzu. Do tego celu można wykorzystać przedstawione rozważania dotyczące profilu Kármána-Trefftza.

Przedstawione rozważania dotyczyły opływu pojedynczego profilu. Interesujące staje się zatem rozważanie problemu istnienia całki energii dla profilu znajdującego się w palisadzie profilów. Prędkość zespolona przepływu w palisadzie profilów rozłożonych równomiernie wzdłuż osi urojonej jest wyrażona zależnością [10, 11]

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_m + \frac{1}{2it} \int_L \bar{v}(\zeta) \cdot \operatorname{ctgh} \left[\frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right], \quad L \text{—kontur profilu,}$$

stąd sprzężona prędkość przepływu odniesiona do prędkości w nieskończoności wynosi:

$$\begin{aligned} V(z) &= \bar{v}(z) - \bar{v}(z = \infty) = \frac{1}{2it} \int_L \bar{v}(\zeta) \cdot \left[\operatorname{ctgh} \frac{\pi}{t} (z - \zeta) - 1 \right] d\zeta = \\ &= \frac{1}{2it} \int_L \bar{v}(\zeta) \cdot \frac{2}{e^{\frac{\pi}{t}(z-\zeta)} - 1} d\zeta. \end{aligned} \quad (27)$$

Funkcja $V(z)$ jest funkcją okresową $V(z) = V(z + i \cdot n \cdot t)$, $n = 1, 2, \dots$, zatem istnienie całki energii można badać nie w pasie nieograniczonym zawierającym się między dwoma liniami prądu lecz w pasie nieograniczonym zawierającym się między dwoma prostymi równoległymi oddalonymi od siebie o podziałkę palisady t . Dla dostatecznie dużych wartości $|z| \geq x_0$, $\left| \exp \left[\frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right] - 1 \right| \approx \left| \exp \left[\frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right] \right|$ więc:

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{i \cdot t} e^{-\frac{\pi}{t} z} \cdot \int_L \bar{v}(\zeta) \cdot e^{\frac{\pi}{t} \zeta} d\zeta, \\ V(z) \cdot \overline{V(z)} &= \frac{1}{t^2} e^{-\frac{2\pi}{t} x} \cdot \int_L \bar{v}(\zeta) e^{\frac{\pi}{t} \zeta} d\zeta \cdot \int_L \overline{v(\zeta) \cdot e^{\frac{\pi}{t} \zeta}} d\zeta = \frac{A}{t^2} e^{-\frac{\pi^2}{t} x}, \end{aligned}$$

oraz:

$$\int_{x_0}^{\infty} \int_y^{y+t} V(z) \cdot \overline{V(z)} dx dy = \frac{A}{t} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi}{t} x} dx = \frac{A}{2\pi} e^{-\frac{2\pi}{t} x_0} \quad (28)$$

Pokazaliśmy więc, że również dla palisady profili całka energii (17) ma wartość skończoną a ponadto wyrównanie się pola prędkości następuje szybciej niż dla profilu pojedynczego co ujawnia się szybszą zbieżnością całki (17).

Niniejsze rozważania można uogólnić na palisady wielokrotne zawierające układ profilów [8, 9]. W tych przypadkach prędkość zespolona (27) będzie zawierać sumę całek po każdym konturze profilu z układu profilów zawartych między dwoma liniami periodyczności. Charakter zbieżności całki energii (17) będzie analogiczny do (28).

Literatura

1. C. WITOSZYŃSKI., *Aerodynamika*, Warszawa 1928.
2. W. J. PROSNAK, *Mechanika płynów*. Tom I. PWN Warszawa 1970.
3. S. G. MICHELIN, *Variationsmethoden der mathematischen Physik*. Akademie-Verlag-Berlin 1962.
4. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*. PWN Warszawa 1969 (tłumaczenie z angielskiego).
5. B. ŚREDNIAWA, *Hydrodynamika i teoria sprężystości*, PWN Warszawa 1977.
6. F. OBERHETTINGER, W. MAGNUS, *Zastosowania funkcji eliptycznych w fizyce i technice*. PWN Warszawa 1963.
7. I. M. RYŻYK, I. S. GRADSTEJN, *Tablica całek, sum, szeregów i iloczynów*. PWN Warszawa 1964.
8. W. J. PROSNAK, *Teoria układów profilów lotniczych*. Wszechnica Polskiej Akademii Nauk. Zakład Narodowy im. Ossolińskich. Wyd. Polskiej Akademii Nauk 1981.
9. W. J. PROSNAK, *On a Method of Computing the Plane Steady Flow around a Profile Situated between Straight Parallel Lines*. Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences. Serie des sciences techniques. Vol. XX, No. 4 - 1972.
10. Г. Ю. СТЕПАНОВ, *Гидродинамика решеток турбомашин*, Изд. Физико-Матем. Литературы, Москва 1962.
11. T. CHMIELNIAK, *Zagadnienia cieplnych maszyn przepływowych. Teoria palisad*. Skrypt uczelniany Politechniki Śląskiej. Nr 783. Gliwice 1979.

Niniejsza praca powstała na podstawie prac przeprowadzonych w ramach stypendium im. A. v. Humboldta w Institut für Strahlantriebe und Turboarbeitsmaschinen der RWTH Aachen. Dir. Prof. Dr.-Ing. H. E. Gallus.

Резюме

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ В ИЗБРАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе исследовано существование интеграла энергии для идеальной жидкости вблизи профиля с одной или двумя касательными в его задней кромке.

Исследовано тоже существование интеграла энергии в неограниченной полосе между двумя линиями тока обтекающими профиль.

Summary

EXISTENCE OF THE ENERGY INTEGRAL IN SELECTED INCOMPRESIBLE FLUID FLOW AROUND THE PROFILE

Existence of the energy integral in the incompressible fluid flow around the profile with the sharp single and double tangential trailing edge has been considered in the paper. Existing of the energy integral in an infinite band situated between the two stream lines with a profile in it has been also considered.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 kwietnia 1985 roku.