

## ZJAWISKA REZONANSÓW WEWNĘTRZNYCH W NIELINIOWYCH UKŁADACH DRGAJĄCYCH

JÓZEF BAJKOWSKI

WANDA SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA

IPPT PAN, Warszawa

### 1. Wstęp i przegląd literatury

Terminem „rezonans wewnętrzny” przyjęto określać te szczególne zjawiska, które pojawiają się w drgających układach nieliniowych o  $n$  stopniach swobody wtedy, gdy istnieją liczby całkowite  $k_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, p$ , nie wszystkie równe zero, takie że między częstościami własnymi układu  $\omega_1, \dots, \omega_p$  zachodzi związek typu:

$$\sum_{s=1}^p k_s \omega_s = 0, \quad p \leq n, \quad (1)$$

tzn. gdy częstości te są współmierne. W teorii pierwszego przybliżenia częstości  $\omega_s$  są częstościami własnymi układu liniowego, tj. układu w którym człony nieliniowe zostały odrzucone.

Szczególnie interesującym jest przypadek kiedy w układzie występuje jednocześnie rezonans zewnętrzny, tj. gdy istnieją liczby całkowite  $m_1, \dots, m_p$  nie wszystkie równe zero i liczba  $m_p$  takie, że spełniony jest warunek:

$$\sum_{s=1}^p m_s \omega_s + m_p \nu = 0, \quad p \leq n, \quad (2)$$

gdzie  $\nu$  — częstość siły wzbudzającej,  $m_p = 1, 2, 3, \dots$ , oraz gdy wśród częstości  $\omega_1, \dots, \omega_p$  są częstości współmierne, a więc spełniony jest warunek (1).

W przypadku gdy rezonansem zewnętrznym jest rezonans główny, tj. gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu jednej z częstości własnych,

$$\nu \approx \omega_k, \quad (3)$$

efektem współmierności częstości własnych jest „wciąganie” do rezonansu oprócz rezonansowej współrzędnej normalnej  $\xi_k$ , również innych współrzędnych  $\xi_s$  odpowiadających częstościom własnym  $\omega_s$  współmiernym z  $\omega_k$ . W rezultacie zamiast jednopostaciowej odpowiedzi rezonansowej, w której dominuje składowa harmoniczna o częstości  $\nu$ , może pojawić się odpowiedź wielopostaciowa, w której równoważną rolę odgrywają również

składowe harmoniczne o częstościach odpowiadających częstościom własnym współrzędnych  $\xi_s$ .

Efekty współmierności częstości własnych w nieliniowych autonomicznym i zachowawczym układzie o dwóch stopniach swobody, po raz pierwszy zostały zbadane przez Gorelika i Witta [1]. Układem tym było wahadło matematyczne zawieszone na sprężynie, a opisane układem dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu sprzężonych tylko poprzez człon nieliniowy. Stwierdzili oni, że gdy częstość drgań wzdłuż długości wahadła jest podwojoną częstością drgań obrotowych wahadła, to charakter drgań ulega jakościowej zmianie i pojawiają się drgania, w których następuje przepływ energii z jednej postaci do drugiej i z powrotem.

Układ ten analizowało teoretycznie i doświadczalnie wielu autorów, między innymi Kane i Kahn [2], van der Burgh [3, 4], Srinivasan i Sankar [5], Evan-Iwanowski [6], Minorsky [7].

Zjawisko przepływu energii między poszczególnymi postaciami w układach nieliniowych autonomicznych, a wywołane współmiernością częstości własnych i znane również w literaturze pod nazwą drgania „autoparametryczne”, badane było również dla innych układów, np. belki i wahadła — Sevin [8], Struble [9, 10, 11, 12], Struble i Heinbockel [13].

Fakt, że jedna postać może wytłumiać drgania innej postaci wykorzystali Haxton i Barr [14] budując autoparametryczny tłumik drgań. Natomiast Barr i Nelson [15] stwierdzili, że efektem rezonansu wewnętrznego, tj. wzajemnego oddziaływania między postaciami, może być np. to, że wymuszone drgania jednej postaci mogą spowodować wykładniczy wzrost amplitudy drgań innej postaci.

Efekty sprzężenia i oddziaływania międzypostaciowego w różnego typu układach, lecz bez uwzględnienia możliwości wystąpienia rezonansu wewnętrznego, analizują w swoich pracach Mac Donald [16], Atluri [17], Dowell [18], Morino [19], Bennet i Eisley [20], Bennet [21], Tseng i Dugundji [22].

W pracach poświęconych efektom współmierności częstości własnych szczególna uwaga została zwrócona na przypadek, gdy jedna z częstości jest dwukrotnie większa od drugiej tj.

$$2\omega_i = \omega_j. \quad (4)$$

Zależność tego typu prowadzi do zjawiska rezonansu wewnętrznego gdy nieliniowość w układzie jest typu kwadratowego. Próbę ogólnej analizy i klasyfikację tego typu układów o  $n$  stopniach swobody podjął po raz pierwszy Sethna [23]. W zależności od wartości częstości wymuszenia  $\nu$  i amplitudy siły wymuszającej, autor wprowadził następujące typy układów:

- 1 — autonomiczny z rezonansem wewnętrznym,
- 2 — nieautonomiczny z rezonansem zewnętrznym bez rezonansu wewnętrznego,
- 3 — nieautonomiczny z rezonansem zewnętrznym i wewnętrznym:
  - (a) przypadek superharmoniczny — gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej,
  - (b) przypadek subharmoniczny — gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej.

Dla przypadku (3a) jednym rozwiązaniem jest rozwiązanie nietrywialne dwuczęstościowe z amplitudami:  $a_1 \neq 0$  dla współrzędnej rezonansowej i  $a_2 \neq 0$  dla współrzędnej wciąż

ganej do rezonansu. Dla przypadku (3b) możliwe są dwa typy rozwiązań: jednoczęstościowe —  $a_1 = 0$  i  $a_2 \neq 0$ , oraz dwuczęstościowe z amplitudami  $a_1 \neq 0$  dla współrzędnej wciąganej do rezonansu i  $a_2 \neq 0$  dla współrzędnej rezonansowej.

Podobne wyniki i wnioski możemy znaleźć w pracy Piszcza [24]. Rozpatruje on drgania ustalone płaskiej belki, podpartej na końcach przy pomocy sztywnych podpór sprężyste zamocowanych do podłoża. W środku belki umieszczono obciążenie oraz masę na mimośrodku.

Układy z nieliniowością typu kwadratowego i rezonansem wewnętrznym typu  $2\omega_i = \omega_j$  są również przedmiotem badań szeregu prac Tondla [25, 26, 27, 28]. W pracach [25, 26] bada on układ o dwóch stopniach swobody wzbudzony siłą harmoniczną o amplitudzie proporcjonalnej do kwadratu częstości wymuszenia. W przypadku gdy częstość wymuszenia jest bliska pierwszej częstości własnej, drgania charakteryzują się wciąganiem do rezonansu drugiej współrzędnej i mamy rozwiązanie dwuczęstościowe ze składowymi harmonicznymi  $\nu$  i  $2\nu$ . W przypadku gdy częstość wymuszenia jest bliska wyższej częstości własnej, wciągana do rezonansu jest pierwsza współrzędna i również mamy rozwiązanie dwuczęstościowe, ze składowymi harmonicznymi  $\nu$  i  $\nu/2$ . W [27] układ wzbudzany jest siłą okresową zawierającą pierwszą i drugą harmoniczną. W tym przypadku, zarówno gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej jak i wyższej częstości własnej, możliwe są dwa typy rozwiązań: (a) — półtrywialne, kiedy mamy tylko drgania drugiej współrzędnej, są to drgania dwuczęstościowe z częstościami siły wymuszającej, (b) — nietrywialne, kiedy pierwsza współrzędna drga harmonicznie ze swoją częstością własną, drgania drugiej współrzędnej są dwuczęstościowe z częstościami siły wymuszającej.

Z innych publikacji poświęconych rezonansom wewnętrznym typu  $2\omega_i = \omega_j$  w układach z nieliniowością typu kwadratowego, na uwagę zasługują prace Barr'a i Nelson'a [15] oraz Sethna i Bajaj'a [29].

Ten sam typ rezonansu wewnętrznego, tj.  $2\omega_i = \omega_j$ , badany był w układach zawierających nieliniowość typu kwadratowego i sześciennego łącznie. Tondl w [28] rozpatruje przypadek rezonansu  $\omega_1 = 2\omega_2$ , kiedy częstości wymuszenia  $\nu$  jest bliska  $\omega_1$ . Autor stwierdza istnienie dwóch typów rozwiązań: jednoczęstościowego o częstości wymuszenia oraz dwuczęstościowego ze składowymi harmonicznymi o częstościach  $\nu$  i  $\nu/2$ . Szczegółowa analiza poświęcona jest rezonansowi dwuczęstościowemu. W pracy tej wyznaczono także obszary przyciągania, tj. obszary warunków początkowych prowadzących do rozwiązania jedno- lub dwuczęstościowego.

Yamamoto i Yasuda [30] oraz Yamamoto, Yasuda i Nagasaka [31] również badają rezonans  $\omega_2 = 2\omega_1$  gdy nieliniowość zawiera człony kwadratowe i sześciennie. Stwierdzają oni, że gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej [30], jedynym rozwiązaniem jest rozwiązanie dwuczęstościowe ze składowymi harmonicznymi o częstościach: wymuszenia i podwojonej częstości wymuszenia. Autorzy pokazują, że w pewnym zakresie częstości wymuszenia  $\nu$ , drgania okresowe dwuczęstościowe przechodzą w drgania prawie-okresowe ze składowymi harmonicznymi o częstościach:  $\nu$  i bliskiej  $2\nu$ . Drgania te są bardzo wrażliwe na tłumienie. Badając układ w pobliżu wyższej częstości własnej [31], autorzy stwierdzają możliwość wystąpienia dwóch typów rozwiązań: jednoczęstościowego o częstości wymuszenia  $\nu$ , a więc takiego jak bez rezonansu wewnętrznego, i dwuczęstościowego ze składowymi harmonicznymi o częstościach  $\nu$  i  $\nu/2$ . Podobnie jak

poprzednio, stwierdzają oni istnienie pewnego przedziału częstości wymuszenia, w którym występują drgania prawie-okresowe.

Omawiane w pracach [13 - 31] problemy dotyczyły układów nieautonomicznych, z nieliniowością typu kwadratowego bądź kwadratowego i sześciennego łącznie i rezonansiem wewnętrznym  $2\omega_i = \omega_j$ .

Klasycznym przykładem nieliniowości sprężystej, występującej w wielu układach fizycznych jest nieliniowość aproksymowana przez funkcję typu sześciennego. Z tą klasą funkcji nieliniowych wiąże się rezonans wewnętrzny typu:

$$3\omega_i = \omega_j. \quad (5)$$

Zagadnieniu temu poświęcają swoje prace między innymi: Sethna [32], Nayfeh, Mook i Sridhar [33], Nayfeh, Mook, i Lobitz [34], Lau, Cheung i Wu [35], Croll [36, 37], Bajkowski [38], Bajkowski i Szemplińska-Stupnicka [39].

W pracy [32] rozważany jest układ o dwóch stopniach swobody z rezonansiem wewnętrznym  $\omega_2 = 3\omega_1$ . Autor stwierdza, że gdy częstość wymuszenia jest bliska niższej częstości własnej, w rozwiązaniu daje zauważyć się bardzo silny udział trzeciej harmonicznej. W przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej w odpowiedzi nie stwierdzono istnienia składowej subharmonicznej.

Nayfeh, Mook i Sridhar [33] znajdują rezonans wewnętrzny przy badaniu drgań poprzecznych belki podlegającej dużym odkształceniom. W przypadku gdy belka z jednej strony jest utwierdzona, a z drugiej zamocowana przegubowo, autorzy zwracają uwagę na jeden z możliwych przypadków współmierności częstości własnych, a mianowicie  $\omega_2 \cong 3\omega_1$ . Gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej, jedynym rozwiązaniem jest rozwiązanie dwuczęstościowe ze składowymi harmonicznymi o częstościach: wymuszenia i potrojonej częstości wymuszenia. Amplituda postaci wciąganej w rezonans jest bardzo mała i w rozwiązaniu praktycznie dominuje pierwsza postać. W przypadku gdy częstość wymuszenia jest bliska wyższej częstości własnej, możliwe są dwa różne rozwiązania: jednoczęstościowe o częstości wymuszenia  $\nu$  i dwuczęstościowe ze składowymi harmonicznymi o częstościach  $\nu$  i  $\nu/3$ . Warto zauważyć, że w przypadku drgań dwuczęstościowych, udział składowej o częstości  $\nu/3$  (pierwszej postaci), może być bardzo duży, nawet sześciokrotnie większy niż podstawowej. Z podobnymi wynikami możemy spotkać się w pracy [34]. Lau, Cheung i Wu [35] analizując podobny typ układu pokazują, że oprócz drgań okresowych mogą wystąpić drgania prawie-okresowe.

Także Croll [36, 37] analizuje drgania powłok z uwzględnieniem rezonansu wewnętrznego. W [36] badane są rezonanse wewnętrzne  $\omega_1 = 2\omega_2$  i  $\omega_1 = 3\omega_2$  zaś w [37] rezonanse  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $\omega_1 = 2\omega_2$  i  $\omega_1 = 4\omega_2$ .

Bajkowski i Szemplińska-Stupnicka [38, 39] badają przydatność metod Ritza i uśrednienia do badania efektów rezonansu wewnętrznego  $\omega_2 = 3\omega_1$  w układzie z nieliniowością typu sześciennego.

W pracach [23 - 39] omawiany był rezonans wewnętrzny typu  $\omega_i = 2\omega_j$  bądź  $\omega_i = 3\omega_j$ , mieliśmy więc przypadek rozwiązania dwupostaciowego, w którym oprócz współrzędnej rezonansowej, w rezonans wciągana była jeszcze jedna współrzędna o częstości współmiernej z rezonansową.

W układach o więcej niż dwu stopniach swobody, w przypadku gdy występują więcej

niż dwie częstości współmierne, mogą wystąpić rezonanse wewnętrzne wielopostaciowe zwane kombinowanymi.

Barr i Nelson [15] badają kombinowany rezonans wewnętrzny typu  $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$  analizując zachowanie się elementów konstrukcji pod działaniem harmonicznego wymuszenia zewnętrznego i nieliniowości typu kwadratowego. Autorzy wykazują możliwość wystąpienia dwóch typów rozwiązań: jednopostaciowego o częstości wymuszenia i trzypostaciowego, w którym oprócz współrzędnej rezonansowej, do rezonansu zewnętrznego wciągane są dwie współrzędne, których częstości są współmierne z rezonansową.

Sridhar, Mook i Nayfeh [40, 41] badają drgania utwierdzonych okrągłych płyt obciążonych siłami harmonicznymi uwzględniając efekt rezonansu wewnętrznego. W [40] przeprowadzają analizę uwzględniając rezonans trzypostaciowy, natomiast w [41] rezonans czteropostaciowy typu  $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ . W przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu jednej z niższych częstości własnych wciąganych w rezonans, ustalona odpowiedź układu może mieć postać fali stojącej. Natomiast gdy wymuszenie jest w pobliżu najwyższej ze współmiernych częstości własnych, ustalona odpowiedź układu może mieć dwie postacie: jako superpozycja fal stojących wszystkich postaci wciąganych w rezonans, albo jako superpozycja fal stojących trzech niższych postaci z falą biegnącą najwyższej postaci. Lobitz, Nayfeh i Mook [42] rozważają drgania rezonansowe płyt eliptycznych w przypadku obciążenia harmonicznego i rezonansów wewnętrznych. Analizują oni dwa typy rezonansów: trzypostaciowy  $\omega_4 = 2\omega_3 - \omega_1$  i czteropostaciowy  $\omega_5 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ . Wykazują, że wszystkie pięć postaci mogą uczestniczyć w rozwiązaniu, pomimo że tylko jedna z postaci jest bezpośrednio wzbudzana, poza tym dominującą w rozwiązaniu może być inna niż bezpośrednio wzbudzona postać.

W omawianych uprzednio pracach badano wpływ rezonansu wewnętrznego na zewnętrzne rezonanse główne. O wpływie rezonansu wewnętrznego na rezonans zewnętrzny kombinowany typu  $\nu = \omega_1 + \omega_2$  mówią prace Asmis'a i Tso [43] oraz Nayfeh'a [44]. W [43] badany jest układ o dwóch stopniach swobody, z nieliniowością typu sześciennego i rezonansem wewnętrznym  $\omega_1 = \omega_2$ . Natomiast w [44] badany jest ten sam typ rezonansu zewnętrznego, w przypadku układu z nieliniowością typu kwadratowego i sześciennego łącznie, przy rezonansach wewnętrznych  $\omega_2 = 2\omega_1$  i  $\omega_2 = 3\omega_1$ . Autor stwierdza, że obecność rezonansów wewnętrznych wpływa na zwiększenie amplitud drgań, z tym że większy jest wpływ rezonansu  $\omega_2 = 3\omega_1$ . Należy nadmienić, że równania tego typu mogą opisywać drgania: akceleratorów indukcyjnych, wirujących wałów, powłok, wyginanych elementów konstrukcji, statycznie obciążonych konstrukcji.

Szczegółowe omówienie i wyniki prac [15, 23, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33] można znaleźć w przeglądowej pracy Bajkowskiego i Szemplińskiej-Stupnickiej [45].

W przedstawionych pracach [23 - 44] analizowano drgania układów o wzbudzeniu zewnętrznym harmonicznym. Omówimy teraz niektóre z prac, w których analizowano drgania układów o wzbudzeniu parametrycznym bądź parametrycznym i zewnętrznym harmonicznym.

Ibrahim i Barr [46, 47] badają drgania układu złożonego ze zbiornika częściowo napełnionego cieczą i sprężyscie zamocowanego. Nieliniowość jest tu typu kwadratowego, a układ może być wzbudzany parametrycznie, bądź przez autoparametryczne sprzężenie pomiędzy poszczególnymi postaciami elementów konstrukcji a pierwszą postacią falującą;

cieczy. W [46] rozważają przypadek rezonansu wewnętrznego  $\omega_2 = 2\omega_1$ , gdzie  $\omega_2$  — drgania własne konstrukcji,  $\omega_1$  — drgania własne falującej cieczy. W [47] badają przypadek rezonansu wewnętrznego trzypostaciowego typu sumy lub różnicy. Stwierdzają, że typ ten rozwiązania jest możliwy tylko wtedy, gdy tłumienie dwóch niższych postaci jest równe zero bądź jest bliskie zera.

Analizę podobnego układu przeprowadzili Nayfeh, Mook i Marshal [48] badając rozwiązanie w przypadku rezonansu  $\omega_2 = 2\omega_1$ , a także Nayfeh i Mook [49] dla rezonansu wewnętrznego typu kombinowanego. W obu przypadkach otrzymali analitycznie stany ustalone lecz bez żadnych ograniczeń jeśli chodzi o tłumienie.

Tso i Asmis [50] analizowali odpowiedź nieliniowego układu drgającego o dwóch stopniach swobody, z nieliniowością typu sześciennego i harmonicznym wzbudzeniu parametrycznym, lecz bez rezonansu wewnętrznego. Podobny układ opisujący drgania boczne kolumn przy udziale zewnętrznego obciążenia harmonicznego z uwzględnieniem rezonansu wewnętrznego badali Tezak, Mook i Nayfeh [51]. Natomiast Nayfeh w [52] bada odpowiedź układu o dwóch stopniach swobody, wzbudzeniu parametrycznym, z rezonansem wewnętrznym, w przypadku nieliniowości typu kwadratowego.

Hatwal, Mallik i Ghosh [53] analizują podobny układ jaki badali Haxton i Barr [15], a więc układ masa-wahadło z nieliniowością typu kwadratowego. Stwierdzają oni, że efektem rezonansu wewnętrznego  $\omega_2 = 2\omega_1$  jest wzbudzenie parametryczne, a dla dostatecznie dużych amplitud wymuszenia możliwość wystąpienia drgań prawie-okresowych.

Nayfeh w [54] bada układ o wielu stopniach swobody z nieliniowością typu kwadratowego i sześciennego łącznie, z wymuszeniem parametrycznym i rezonansem wewnętrznym  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Nieliniowość może być typu geometrycznego bądź sprężystego, a równania mogą opisywać drgania wirujących wałów, sklepień, powłok i płyt, sprzężone poprzeczne i wzdłużne drgania kolumn, drgania zbiorników częściowo napełnionych cieczą i zamocowanych sprężystości.

Z analizą układów z wielokrotnymi częstościami własnymi i wzbudzanych parametrycznie możemy spotkać się między innymi w pracach [55, 56, 57, 68]. Fu i Nemat-Nasser [55, 56] rozpatrują układy liniowe, nietłumione w przypadku występowania dwóch częstości wielokrotnych. Natomiast Tezak, Nayfeh i Mook [57] rozwijają analizę przeprowadzoną przez Fu i Nemat-Nasser'a włączając do układu tłumienie i nieliniowość typu sześciennego, a jako przykład podają badanie flatteru powłok w obecności obciążenia harmonicznego. Także Nayfeh [58] rozważa układ o wielu stopniach swobody z wielokrotnymi częstościami własnymi, a szczegółowej analizie poddaje układ o czterech stopniach swobody, w którym trzy pierwsze częstości własne są takie same. Badania koncentruje na rezonansach parametrycznych:  $2\omega_1$ ,  $\omega_1 + \omega_4$  i  $\omega_1 - \omega_4$ .

Ogólniejszą teorię i klasyfikację rezonansów wewnętrznych można także znaleźć w pracach Sethna [59], Czesankowa [60, 61, 62], Samojlenki i Momota [63, 64], Nayfeh'a i Mook'a [65].

W przeważającej większości omawianych prac wyniki teoretyczne uzyskane były za pomocą jednej z technik perturbacyjnych, najczęściej za pomocą klasycznej metody uśrednienia, a weryfikacja tych wyników przeprowadzana była przez symulację równań ruchu na maszynach cyfrowych lub analogowych.

W nielicznych tylko pracach np. [27, 35, 53], stosowana była metoda bilansu harmo-

nicznych, ale nie podejmowano analizy, która z metod przybliżonych jest adekwatna dla danego układu i danego typu rezonansu.

O ile rezonansowi wewnętrznemu typu  $2\omega_i = \omega_j$  poświęcona jest obszerna literatura i w wielu pracach wyniki teoretyczne zostały całkowicie potwierdzone przez badania symulacyjne, to zachowanie się układu przy rezonansie typu  $3\omega_i = \omega_j$  nie jest w pełni wyjaśnione. W szczególności dotychczasowe wyniki nie dają wyczerpującej odpowiedzi na pytania:

- czy rozwiązanie pierwszego przybliżenia metod perturbacyjnych daje wiarygodne jakościowo wyniki zgodne z wynikami symulacji komputerowej,
- jakich zmian w charakterze drgań rezonansowych możemy oczekiwać gdy parametry układu, przy których nie jest spełniony warunek istnienia rezonansu wewnętrznego, zmienić tak że będzie spełniony warunek:

$$3\omega_i = \omega_j.$$

Bezpośrednim bodźcem do podjęcia prac nad tym typem rezonansu wewnętrznego były badania teoretyczne i analogowe prowadzone na prostym przykładzie modelu układu o dwóch stopniach swobody z nieliniowością typu sześciennego i wzbudzanego siłą harmoniczną (rys. 1).

Drgania rezonansowe tego układu zarówno przy rezonansach głównych jak i pobocznych bez rezonansu wewnętrznego, oraz studia porównawcze różnych metod przybliżonych, były przedmiotem wcześniejszych studiów autorów [66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73]. W pracach tych, oprócz analizy zjawisk drgań rezonansowych pojawiających się w układach nieliniowych posiadających więcej niż jeden stopień swobody, zwracano baczną uwagę na problem doboru przybliżonej metody analitycznej, adekwatnej do danego typu badanego zjawiska i badanego układu. W szczególności analizowano metody perturbacyjne w pierwszym przybliżeniu i metodę Ritza (metodę bilansu harmonicznym), porównując rozwiązania mające tą samą formę jako funkcję czasu.

W obecnej pracy dobrano parametry układu tak, by spełniony był warunek występowania rezonansu wewnętrznego typu  $\omega_2 = 3\omega_1$ . W przeprowadzonych badaniach analogowych nie uzyskano tych wyników jakie przewiduje teoria pierwszego przybliżenia metody uśrednienia, natomiast uzyskano efekty, których ta teoria nie przewiduje.

Problem został rozwiązany, gdy w rozważaniach teoretycznych zastosowano metodę Ritza, przy niezmięnionej formie rozwiązania jako funkcji czasu.

## 2. Ogólne równania i badanie rezonansów wewnętrznym metodą uśrednienia i metodą Ritza

Rozważamy równania ruchu nieliniowych układów drgających o skończonej liczbie stopni swobody, zapisane w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{P}\cos\gamma t = 0, \quad (6)$$

gdzie  $\mathbf{q} = \text{col}[q_1, \dots, q_n]$  — współrzędne uogólnione,  $\mathbf{A} = \text{diag}[m_i]$  — macierz bezwładności,  $\mathbf{C}$  — macierysz tywności, kwadratowa, symetryczna, dodatnio określona,  $\mathbf{f} = \text{col}[f_1,$

$\dots, f_n]$  — reprezentuje nieliniową część sił sprężystych,  $\boldsymbol{\varphi} = \text{col}[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$  — reprezentuje siły tłumienia.

Układy ciągle opisane będą równaniami cząstkowymi w postaci,

$$m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L(w) + L_1(w) + N(w) - p(x) \cos \nu t = 0, \quad (7)$$

z warunkami brzegowymi,

$$B(w) = 0 \text{ na brzegu } \Gamma,$$

gdzie  $L(w)$  i  $L_1(w)$  — odpowiednio liniowy i nieliniowy operator zmiennych przestrzennych odpowiadający liniowej i nieliniowej części sił sprężystych,  $N(w)$  — operator tłumienia,  $p(x)$  — amplituda siły wymuszającej.

Obydwa modele matematyczne (6) i (7) sprowadzamy do układu równań modalnych przez wprowadzenie współrzędnych normalnych  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Dla układu (6) współrzędne te wprowadzamy za pomocą transformacji:

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{0ij} \xi_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

gdzie  $b_{0ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , są współczynnikami postaci własnych układu (6) dla  $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{P} = \mathbf{0}$ , a dla układów ciągłych (7) przez przyjęcie przybliżenia,

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j(x) \xi_j(t), \quad (9)$$

gdzie:  $\psi_j(x)$  — znane liniowe funkcje  $x$  (postacie własne układu (7) przy  $L_1(w) = N(w) = p(x) = 0$ ), oraz zastosowanie metody Galerkina.

Dla obu układów (6) i (7) otrzymamy równania ruchu w formie:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) - \mathbf{Q} \cos \nu t = 0, \quad (10)$$

gdzie:  $\mathbf{M} = \text{diag}[M_j]$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}[M_j \omega_{0j}^2]$ ,  $M_j$  — uogólniona masa,  $\omega_{0j}$  — częstość własna  $j$ -tej postaci. Elementy kolumnowej macierzy  $\mathbf{F}$  są funkcjami wszystkich współrzędnych,  $F_j = F_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , zaś elementy macierzy  $\mathbf{H}$  są zależne od wszystkich współrzędnych i ich pochodnych,  $H_j \equiv H_j(\xi_1, \dots, \xi_n, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n)$ . Ponadto mamy:

$$M_j = \sum_{i=1}^n m_i b_{0ij}^2, \quad F_j = \sum_{i=1}^n f_i b_{0ij}, \quad H_j = \sum_{i=1}^n \varphi_i b_{0ij}, \quad Q_j = \sum_{i=1}^n P_i b_{0ij}, \quad (11)$$

— dla układu równań (6),

$$\begin{aligned} M_j &= \int_0^l m(x) \psi_j^2(x) dx, & F_j &= \int_0^l L_1 \left[ \sum_{s=1}^n \psi_s(x) \xi_s(t) \right] \psi_j(x) dx, \\ H_j &= \int_0^l N \left[ \sum_{s=1}^n \psi_s(x) \xi_s(t) \right] \psi_j(x) dx, & Q_j &= \int_0^l p(x) \psi_j(x) dx, \end{aligned} \quad (12)$$

— dla układu równań (7).



Zakłada się, że autonomiczny, zachowawczy układ nieliniowy:

$$M\ddot{\xi} + \Omega\xi + F(\xi) = 0, \quad (13)$$

posiada energię potencjalną  $U$  spełniającą warunki:

$$\begin{aligned} U(0, \dots, 0) &= 0, \\ U > 0 \text{ jeśli } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ nie znikają jednocześnie,} \\ U(\xi_1, \dots, \xi_n) &= U(-\xi_1, \dots, -\xi_n), \end{aligned} \quad (14)$$

tak więc:

$$-\frac{\partial U}{\partial \xi_j} = -M_j \omega_{0j}^2 \xi_j - F_j(\xi_1, \dots, \xi_n). \quad (15)$$

Funkcje  $F_j$  są analitycznymi i nieparzystymi funkcjami swoich argumentów. Przyjmuje się, że z wystarczającą dokładnością można je przedstawić w postaci skończonego szeregu Taylora. Siły tłumienia spełniają warunek:

$$\sum_{j=1}^n H_j \dot{\xi}_j > 0, \quad (16)$$

jeśli tylko  $\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n$  nie znikają równocześnie, i także są przedstawiane w postaci skończonego szeregu Taylora.

Tak więc układ równań (10) traktowany jest jako model matematyczny zarówno układów o skupionych masach jak i układów o ciągłym rozkładzie mas i będzie przedmiotem dalszych badań.

**2.1. Metoda uśrednienia.** Załóżmy, że spełniony jest warunek zewnętrznego rezonansu głównego tj.:

$$\nu \approx \omega_k, \quad (17)$$

i wszystkie częstotliwości są niewspółmierne. Rozwiązania układu (10) w pierwszym przybliżeniu szukamy w postaci:

$$\begin{aligned} \xi_k &= a_k \cos(\nu t + \vartheta), \nu \approx \omega_k, \\ \xi_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie  $a_k$  i  $\vartheta$  — pewne stałe wyznaczone metodą uśrednienia lub inną procedurą perturbacyjną.

W tym przypadku tylko współrzędna rezonansowa  $\xi_k$  jest różna od zera. Współrzędne nieresonansowe  $\xi_j$ ,  $j \neq k$ , w rozwiązaniu w pierwszym przybliżeniu są równe zero. Rozwiązanie takie nazywane jest jednoczęściowym (jednopostaciowym), gdyż postać drgań scharakteryzowana jest jedną funkcją własną  $\psi_k(x)$  lub układem współczynników  $b_{0ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Jeśli jednak choć jedna z częstotliwości własnych, np.  $\omega_s$ , jest współmierna z rezonansową, wówczas okazuje się, że odpowiedź układu przestaje być jednopostaciowa, a do rozwiązania zostaje wciągana dodatkowo współrzędna  $\xi_s$ . Załóżmy dla ogólności, że  $r-1$  częstotliwości własnych jest współmiernych z częstotliwością  $\omega_k$ , tzn.:

$$k_1 \omega_1 + \dots + k_k \omega_k + \dots + k_r \omega_r = 0, \quad (19)$$

gdzie  $k_1, \dots, k_r$  — liczby całkowite. Warunek (19) zapisać możemy także w postaci:

$$\frac{\omega_s}{\omega_k} = \frac{s_s}{s_k} = N_{ks} \quad (20)$$

gdzie  $s_k, s_s = 1, 2, 3, \dots$

Stosując wprowadzone oznaczenia (20) równania ruchu (10) przepiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} \nu &\approx \omega_k, \\ \ddot{\xi}_k + \nu^2 \xi_k &= (\nu^2 - \omega_k^2) \xi_k - F_k(\xi_1, \dots, \xi_r) - H_k(\xi_1, \dots, \xi_r, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_r) + Q_k \cos \nu t, \\ \ddot{\xi}_s + N_{ks}^2 \nu^2 \xi_s &= N_{ks}^2 (\nu^2 - \omega_k^2) \xi_s - F_s(\xi_1, \dots, \xi_r) - H_s(\xi_1, \dots, \xi_r, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_r) + \\ &+ Q_s \cos \nu t, \quad s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r, \\ \ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j &= -F_j(\xi_{r+1}, \dots, \xi_n) - H_j(\xi_{r+1}, \dots, \xi_n, \dot{\xi}_{r+1}, \dots, \dot{\xi}_n) + Q_j \cos \nu t, \\ & \qquad \qquad \qquad j = r+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (21)$$

Efekt rezonansu wewnętrznego uzyskano zakładając, że nie tylko współrzędna rezonansowa, lecz i współrzędne  $\xi_s$  odpowiadające częstościom współmiernym z  $\omega_k$  są różne od zera. Tak więc rozwiązania układu równań (21) szukamy w postaci:

$$\begin{aligned} \xi_k &= a_k \cos(\nu t + \vartheta_k), & \nu &\approx \omega_k, \\ \xi_s &= a_s \cos(N_{ks} \nu t + \vartheta_s), & s &= 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r, \\ \xi_j &= 0, & j &\neq 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (22)$$

Dla wyznaczenia amplitud  $a_1, \dots, a_r$  i kątów fazowych  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_r$  stosujemy metodę uśrednienia [74-79]. W tym celu najpierw traktujemy te wielkości jako nowe zmienne  $a_s \equiv a_s(t)$ ,  $\vartheta_s \equiv \vartheta_s(t)$ ,  $s = 1, \dots, r$ , i przekształcamy równania (21) do postaci:

$$\begin{aligned} \frac{da_s}{dt} &= \frac{1}{N_{ks} \nu} [-(N_{ks}^2 \nu^2 - \omega_s^2) a_s \cos \Theta_s + \tilde{F}_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) - Q_s \cos \nu t] \sin \Theta_s, \\ \frac{d\vartheta_s}{dt} &= \frac{1}{N_{ks} \nu a_s} [-(N_{ks}^2 \nu^2 - \omega_s^2) a_s \cos \Theta_s + \tilde{F}_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) - Q_s \cos \nu t] \cos \Theta_s, \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Theta_s &= N_{ks} \nu t + \vartheta_s, \\ \tilde{F}_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) &= F_s(a_1 \cos \Theta_1, \dots, a_r \cos \Theta_r) + \\ &+ H_s(a_1 \cos \Theta_1, \dots, a_r \cos \Theta_r, -a_1 \nu N_{k1} \sin \Theta_1, \dots, -a_r \nu N_{kr} \sin \Theta_r). \end{aligned} \quad (24)$$

Dodajmy, że aby zastosować metodę uśrednienia musimy zażądać by prawe strony równań (23) były małe, rzędu  $\mu^1$ , gdzie  $\mu$  jest małym parametrem —  $\mu \ll 1$ ,  $\mu > 0$ . Widzimy więc, że nie tylko funkcje nieliniowe  $\tilde{F}_s$  ale i amplitudy siły wymuszającej  $Q_s$  oraz różnice  $(N_{ks}^2 \nu^2 - \omega_s^2)$  muszą być małe, rzędu  $\mu^1$ .

Następnie zastępujemy prawe strony równań (23) przez ich wartości uśrednione w czasie. Operacje te możemy zapisać następująco:

$$\frac{da_s}{dt} = \frac{1}{N_{ks} \nu} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) \sin \Theta_s dt - \frac{1}{2} \delta_{ks} Q_s \sin \vartheta_s \right], \quad (25)$$

(25) [cd.]

$$\frac{d\vartheta_s}{dt} = \frac{1}{a_s N_{ks} \nu} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) \cos \Theta_s dt + \frac{1}{2} (N_{ks}^2 \nu^2 - \omega_s^2) a_s - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_{ks} Q_s \cos \vartheta_s \right],$$

gdzie:  $\delta_{ks}$  — delta Kroneckera,  $s, k = 1, 2, \dots, r$ .

Ponieważ szukamy ustalonych rozwiązań  $a_s = \text{const}$  i  $\vartheta_s = \text{const}$ ,  $s = 1, 2, \dots, r$ , żądamy by spełnione były równania:

$$\frac{da_s}{dt} = \frac{1}{N_{ks} \nu} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) \sin \Theta_s dt - \frac{1}{2} \delta_{ks} Q_s \sin \vartheta_s \right] = 0, \quad (26a)$$

$$\frac{d\vartheta_s}{dt} = \frac{1}{a_s N_{ks} \nu} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) \cos \Theta_s dt + \frac{1}{2} (N_{ks}^2 \nu^2 - \omega_s^2) a_s - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_{ks} Q_s \cos \vartheta_s \right] = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r. \quad (26b)$$

Warunki (26) prowadzą do  $2r$  nieliniowych równań algebraicznych z niewiadomymi  $a_1, \dots, a_r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_r$ .

Równania (26a) pozwalają na prostą interpretację związku między formą funkcji nieliniowej (24) i typem rezonansu wewnętrznego. Zbadajmy więc szczegółowiej równania (26a) dla współrzędnych o częstotliwościach współmiernych z  $\omega_k$ , spełnienie których jest warunkiem niezbędnym istnienia niezerowych rozwiązań na  $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_r$ . Warunki te możemy zapisać w postaci:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{F}_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) \sin \Theta_s dt = 0, \quad (27) \\ s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r.$$

W tym celu przedstawimy funkcje  $\tilde{F}_s$  w formie uogólnionego szeregu Fouriera:

$$F_s = P_0^{(s)} + P^{(s)} \cos \Theta_s + G^{(s)} \sin \Theta_s + \sum_m P_{s, m_1, m_2, \dots} \cos(m_1 \Theta_1 + \dots \\ + m_k \Theta_k + \dots + m_r \Theta_r) + \sum_m G_{s, m_1, m_2, \dots} \sin(m_1 \Theta_1 + \dots + \\ + m_k \Theta_k + \dots + m_r \Theta_r), \quad (28)$$

gdzie  $\sum_m$  oznacza sumę po wszystkich  $m_1, \dots, m_k, \dots, m_r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , za wyjątkiem przypadku, kiedy  $m_k = \pm 1$  a pozostałe  $m_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$  są równe zero. Zauważmy, że współczynniki  $G^{(s)}$  przy  $\sin \Theta_s$  są w rozważanych układach dysypacyjnych różne od zera jeśli tylko  $a_s \neq 0$ . Zatem, aby warunek (27) mógł być spełniony, w rozwinięciu funkcji  $\tilde{F}_s$  w szereg Fouriera muszą znaleźć się dodatkowe człony z  $\sin \Theta_s$ .

Człony takie uzyskamy, jeśli wśród kombinacji współczynników  $m_1, \dots, m_r$  występujących w (28) znajdują się takie, że spełniony będzie warunek:

$$m_1\Theta_1 + \dots + m_k\Theta_k + \dots + m_r\Theta_r = \pm\Theta_s + \vartheta, \quad (29)$$

co odpowiada zależności między częstościami:

$$m_1\omega_1 + \dots + m_k\omega_k + \dots + m_r\omega_r = \pm\omega_s, \quad (30)$$

$$s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r.$$

Tak więc widzimy, że warunek (27) dla amplitud współrzędnych nierezonansowych sprowadza się do tego aby częstości  $\omega_1, \dots, \omega_r$  były współmierne. Zauważmy jednak, że współczynniki  $m_1, \dots, m_r$  nie są tu już dowolne, a zależą od formy funkcji nieliniowej.

Zależności (29) mogą stanowić podstawę do wyznaczenia wszystkich typów rezonansów wewnętrznych jakie mogą się pojawić przy danej formie funkcji nieliniowej. Między innymi w pracy [45] jest pokazane jakie typy rezonansów wewnętrznych mogą wystąpić, gdy nieliniowa część sił sprężystych jest opisana funkcją typu kwadratowego, sześciennego lub piątego stopnia.

I tak przy liniowym tłumieniu i nieliniowości sprężystej typu sześciennego, z analizy tej wynika, że w układzie o dwóch stopniach swobody istnieje możliwość wystąpienia tylko rezonansu wewnętrznego typu:

$$\omega_2 = 3\omega_1. \quad (31)$$

Przedstawione rozważania za pomocą metody uśrednienia opierały się na założeniu harmonicznym rozwiązaniu na współrzędne normalne. Na podstawie transformacji (8) widzimy, że założenie to daje rozwiązanie we współrzędnych  $q_1, \dots, q_n$  w formie:

$$q_i(t) = \sum_{s=1}^r b_{0is} \xi_s(t) = \sum_{s=1}^r b_{0is} a_s \cos(N_{ks} \nu t + \vartheta_s), \quad (32)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

A zatem stosunki amplitud poszczególnych harmonicznym są równe współczynnikom postaci własnych układu liniowego. Jednak już we wcześniejszych pracach na temat drgań układów o wielu stopniach swobody wykazano, że założenie to może prowadzić do poważnych błędów [71, 72, 80, 81]. Omówimy więc metodę, która nie wprowadza żadnych założeń upraszczających odnośnie postaci drgań układu — metodę Ritza.

**2.2. Metoda Ritza.** Poszukajmy rozwiązania układu równań (6) w tej samej formie co w metodzie uśrednienia (32):

$$q_i(t) = \sum_{s=1}^r b_{is} a_s \cos\Theta_s, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (33)$$

gdzie:

$$\Theta_s = N_{ks} \nu t + \vartheta_{is},$$

lecz przy założeniu, że nie tylko  $a_s, \vartheta_{is}$  ale i  $b_{is}$  wymagają wyznaczenia. Oznacza to, że rozwiązanie we współrzędnych normalnych powinno również zawierać wszystkie składowe harmoniczne:

$$\xi_j(t) = \sum_{s=1}^r \alpha_s \cos\Theta_s. \quad (34)$$

Dla wyznaczenia  $a_s$ ,  $b_{is}$  i  $\vartheta_{is}$  w rozwiązaniu (33) lub  $\alpha_s$  i  $\vartheta_{is}$  w rozwiązaniu (34) zastosujemy metodę Ritza [66, 74, 79], równoważną procedurze bilansu harmonicznego, tzn. żądamy spełnienia zależności:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_i(t) \cos \Theta_s dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (35)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_i(t) \sin \Theta_s dt = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

gdzie  $\varepsilon_i(t)$  — „pozostałości” równań (6) po podstawieniu przybliżonego rozwiązania (33), lub równań (10) po podstawieniu rozwiązania (34).

W zastosowaniu do równań (6) warunki (35) dają  $2 \times n \times r$  równań algebraicznych, które możemy zapisać w postaci,

$$-m_i a_s b_{is} \nu^2 N_{ks}^2 + \sum_{j=1}^r c_{ij} b_{js} a_s + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f_i + \varphi_i) \cos \Theta_s dt - \quad (36a)$$

$$-\frac{1}{2} \delta_{ks} P_i \cos \vartheta_{is} = 0,$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f_i + \varphi_i) \sin \Theta_s dt - \frac{1}{2} \delta_{ks} P_i \cos \vartheta_{is} = 0, \quad (36b)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

z których wyznaczmy  $a_s \equiv a_s(\nu)$ ,  $\vartheta_{is} \equiv \vartheta_{is}(\nu)$ ,  $b_{is} \equiv b_{is}(\nu)$ ,  $b_{1s} = 1$ .

Równania (36b), które dla  $s \neq k$  możemy zapisać w postaci:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f_i + \varphi_i) \sin \Theta_s dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (37)$$

$$s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r,$$

pozwalają na prostą interpretację związku między formą funkcji nieliniowej —  $f_i + \varphi_i$ , a typem rezonansu wewnętrznego. Przedstawmy więc funkcje  $f_i + \varphi_i$  w formie uogólnionego szeregu Fouriera,

$$f_i + \varphi_i = p_0^{(i)} + p^{(i)} \cos \Theta_s + g^{(i)} \sin \Theta_s + \quad (38)$$

$$+ \sum_m p_{i, m_1, m_2, \dots} \cos(m_1 \Theta_1 + \dots + m_k \Theta_k + \dots + m_r \Theta_r) +$$

$$+ \sum_m g_{i, m_1, m_2, \dots} \sin(m_1 \Theta_1 + \dots + m_k \Theta_k + \dots + m_r \Theta_r),$$

gdzie  $\sum_m$  oznacza sumę po wszystkich  $m_1, \dots, m_k, \dots, m_r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , za wyjątkiem przypadku kiedy  $m_k = \pm 1$  a pozostałe  $m_s, s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$  są równe zero. Zauważmy, że współczynniki  $g^{(i)}$  przy  $\sin \Theta_s$  są w rozważanych układach dysypacyjnych różne od zera jeśli tylko  $a_s \neq 0$ . Zatem aby warunek (37) mógł być spełniony, w rozwinięciu  $f_i + \varphi_i$  w szereg Fouriera (38) muszą znaleźć się dodatkowe człony z  $\sin \Theta_s$ .

Uzyskamy je jeśli wśród kombinacji współczynników  $m_1, \dots, m_r$ , występujących w (38), znajdują się takie, że spełniony będzie warunek:

$$m_1\Theta_1 + \dots + m_k\Theta_k + \dots + m_r\Theta_r = \pm\Theta_s + \vartheta, \quad (39)$$

$$s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r.$$

Zauważmy, że współczynniki  $m_1, \dots, m_r$  występujące w (39) są identyczne jak współczynniki  $m_1, \dots, m_r$  występujące w (29), gdyż w obu przypadkach rozwijamy w szereg Fouriera jakościowo tą samą funkcję:

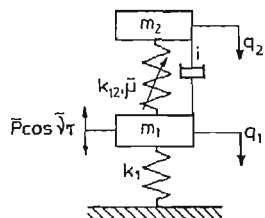
$$\tilde{F}_s = \sum_{s=1}^n b_{0is}(f_i + \varphi_i) \text{ — w metodzie uśrednienia przy rozwiązaniu (32),} \quad (40)$$

$$f_i + \varphi_i \text{ — w metodzie Ritza przy rozwiązaniu (33).}$$

Tak więc widzimy, że spełnienie warunku (39) jest równoważne spełnieniu warunku (29) metody uśrednienia. A zatem metoda Ritza prowadzi do tych samych typów rezonansów wewnętrznych przy zadanej formie funkcji nieliniowej.

### 3. Analiza teoretyczna i analogowa układu o dwóch stopniach swobody

Szczegółowe obliczenia analityczne wykonamy dla układu o dwóch stopniach swobody, złożonego z dwóch mas połączonych więziami sprężystą typu Duffinga i liniowym tłumikiem



Rys. 1. Model układu o dwóch stopniach swobody

oraz wzbudzanego siłą harmoniczną o stałej amplitudzie — rys. 1. Układ ten możemy opisać równaniami ruchu w formie,

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \alpha^2 q_1 + \gamma(q_1 - q_2) + \mu\gamma l \left( \frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} \right) + \mu\gamma(q_1 - q_2)^3 = P \cos v t, \quad (41)$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} - (q_1 - q_2) - \mu l \left( \frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} \right) - \mu(q_1 - q_2)^3 = 0,$$

gdzie  $q_1, q_2$  — oznaczają wychylenia mas  $m_1$  i  $m_2$  od położenia równowagi,  $t = \sqrt{k_{12}/m_2} \tau$  — bezwymiarowy czas, oraz

$$\gamma = m_2/m_1, \quad \alpha^2 = k_1\gamma/k_{12}, \quad \mu = \bar{\mu}/k_{12},$$

$$l = \bar{l}\sqrt{k_{12}/m_2}, \quad v = \bar{v}\sqrt{m_2/k_{12}}, \quad P = \bar{P}\frac{\gamma}{k_{12}}.$$

Równania w postaci modalnej (10) otrzymamy przez zastosowanie transformacji (8),

$$\begin{aligned} q_1 &= \xi_1 + \xi_2, \\ q_2 &= b_{021}\xi_1 + b_{022}\xi_2, \end{aligned} \quad (42)$$

gdzie  $b_{021}$ ,  $b_{022}$ —są współczynnikami postaci własnych układu liniowego. Po przekształceniach otrzymamy:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \omega_{01}^2 \xi_1 &= \frac{-\mu\gamma(1-b_{021})}{1+\gamma b_{021}^2} \{l(1-b_{021})\dot{\xi}_1 + l(1-b_{022})\dot{\xi}_2 + \\ &+ [(1-b_{021})\xi_1 + (1-b_{022})\xi_2]^3\} + \frac{P \cos \nu t}{1+\gamma b_{021}^2}, \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_{02}^2 \xi_2 &= \frac{-\mu\gamma(1-b_{022})}{1+\gamma b_{022}^2} \{l(1-b_{021})\dot{\xi}_1 + l(1-b_{022})\dot{\xi}_2 + \\ &+ [(1-b_{021})\xi_1 + (1-b_{022})\xi_2]^3\} + \frac{P \cos \nu t}{1+\gamma b_{022}^2}, \end{aligned} \quad (43)$$

Przyjmując następujące dane liczbowe:  $\kappa^2 = 1.5$  i  $\gamma = 1.582$ , spełnimy warunek współmierności częstości własnych,

$$\omega_{02} = 3\omega_{01}. \quad (44)$$

W tym przypadku na częstości i postaci własne układu liniowego otrzymamy następujące wartości:

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= 0.639, & b_{021} &= 1.6898, \\ \omega_{02} &= 1.917, & b_{022} &= -0.3739. \end{aligned} \quad (45)$$

Na pozostałe parametry układu przyjmujemy następujące wartości:

$$P = 2.0, \quad \mu = 0.01, \quad l = 2.0. \quad (46)$$

W dalszej kolejności będziemy badali zachowanie się układu w przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu częstości własnych układu.

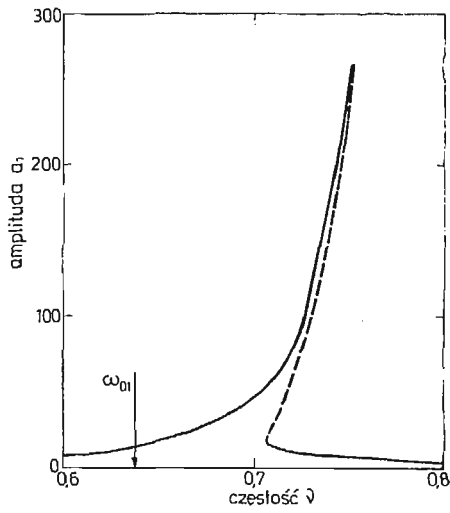
**3.1. Analiza pierwszego rezonansu głównego — metoda uśrednienia.** W przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej, rozwiązanie układu równań (43) zakładamy w postaci,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_1 \cos \Theta_1, & \nu &\approx \omega_{01}, \\ \xi_2 &= a_2 \cos \Theta_2, \end{aligned} \quad (47)$$

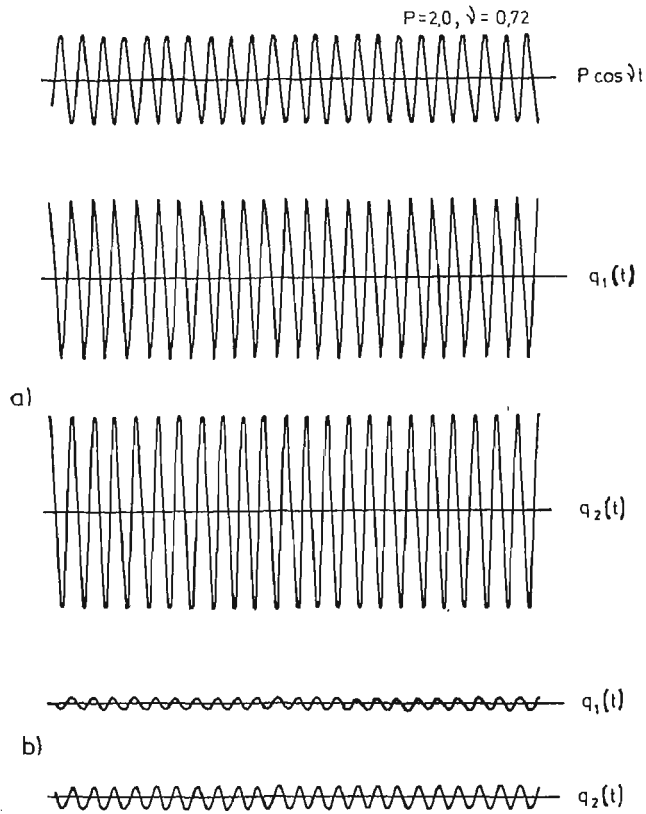
gdzie:  $\Theta_1 = \nu t + \vartheta_1$ ,  $\Theta_2 = 3\nu t + \vartheta_2$ .

Równania (25) przybierają w tym przypadku postać,

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= \frac{1}{2\nu(1+\gamma b_{021}^2)} \left\{ -P \sin \vartheta_1 - \mu\gamma(1-b_{021})^2 \left[ l + \frac{3}{4}(1-b_{022})^2 a_2^2 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \right] a_1 \right\}, \\ \frac{da_2}{dt} &= \frac{1}{2\nu(1+\gamma b_{022}^2)} \left\{ -\mu\gamma l(1-b_{022})^2 a_2 - \frac{1}{12} \mu\gamma(1-b_{021})^3 (1-b_{022}) a_1^3 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \right\}, \\ \frac{d\vartheta_1}{dt} &= \frac{1}{2a_1\nu(1+\gamma b_{021}^2)} \left\{ -(\nu^2 - \omega_{01}^2)(1+\gamma b_{021}^2) a_1 - P \cos \vartheta_1 + \frac{3}{4} \mu\gamma(1-b_{021})^2 a_1 \left[ a_1^2 (1 - \right. \right. \end{aligned} \quad (48)$$



Rys. 2. Krzywa rezonansowa  $a_1 \equiv a_1(\nu)$  dla pierwszego rezonansu głównego — wyniki analogowe



Rys. 3. Przebiegi czasowe  $q_1(t)$  i  $q_2(t)$  przy częstotliwości wymuszenia  $\nu = 0,72$ , (a) — odpowiedź rezonansowa, (b) — odpowiedź nierezonansowa



$$\begin{aligned}
 & -b_{021})^2 + 2a_2^2(1-b_{022})^2 + a_1 a_2(1-b_{021})(1-b_{022})\cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \Big] \Big\}, \quad (48) \\
 & \left[ \text{cd.} \right] \\
 \frac{d\vartheta_2}{dt} = & \frac{1}{2a_2\nu(1+\gamma b_{022}^2)} \left\{ -3(\nu^2 - \omega_{\delta 1}^2)(1+\gamma b_{022}^2)a_2 + \mu\gamma(1-b_{022}) \left[ \frac{1}{4}a_2^3(1-b_{022}^3) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2}a_1^2 a_2(1-b_{021})^2(1-b_{022}) + \frac{1}{12}a_1^3(1-b_{021})^3\cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Przy wyprowadzaniu równań (48) wykorzystano zależności:

$$\begin{aligned}
 \cos 3\Theta_1 &= \cos\Theta_2 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) - \sin\Theta_2 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2), \\
 \cos(\Theta_2 - 2\Theta_1) &= \cos\Theta_1 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) + \sin\Theta_1 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2).
 \end{aligned} \quad (49)$$

Badając stany ustalone przyrównujemy do zera prawe strony równań (48). Jak widać, jedynym możliwym rozwiązaniem jest rozwiązanie dwuczęstościowe  $a_1 \neq 0$  i  $a_2 \neq 0$ .

Z przeprowadzonych badań analogowych wynika, że gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej, mamy odpowiedź okresową dwuczęstościową, w której dominuje składowa o częstości wymuszenia  $\nu$ . Udział drugiej składowej o częstości  $3\nu$  jest bardzo mały i praktycznie mamy odpowiedź bliską harmoniczną. Na rys. 2 pokazano tylko krzywą rezonansową  $a_1 \equiv a_1(\nu)$ , gdyż amplituda  $a_2$  na wykresie w tej samej skali jest pomijalnie mała. Na rys. 3 pokazano przebiegi czasowe  $q_1(t)$  i  $q_2(t)$  w przypadku odpowiedzi rezonansowej i nierezonansowej przy częstości wymuszenia  $\nu = 0.72$ .

Ponieważ efekty rezonansu wewnętrznego są w tym przypadku bardzo małe, dlatego też pominiemy obliczenia analityczne, a przejdziemy do analizy wyższego rezonansu głównego.

**3.2. Analiza drugiego rezonansu głównego — metoda uśredniania.** W przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej rozwiązanie układu równań (43) zakładamy w postaci,

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= a_1 \cos\left(\frac{\nu}{3}t + \vartheta_1\right), \quad \nu \approx \omega_{02}, \\
 \xi_2 &= a_2 \cos(\nu t + \vartheta_2).
 \end{aligned} \quad (50)$$

Wykorzystując (25) otrzymamy następujące równania na wyznaczenie amplitud i kątów fazowych:

$$\begin{aligned}
 \frac{da_1}{dt} &= \frac{1}{2\nu M_{01}} [-c_{11}\nu + 9\beta_{21}a_1 a_2 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2)] a_1 \equiv X_1 \\
 \frac{d\vartheta_1}{dt} &= \frac{1}{2\nu M_{01} a_1} \left[ -\frac{1}{3}(\nu^2 - \omega_{\delta 2}^2) M_{01} + 3\beta_{1,1}a_1^2 + 3\beta_{1,2}a_2^2 + 3\beta_{2,1}a_1 a_2 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \right] a_1 \equiv X_2 \\
 \frac{da_2}{dt} &= \frac{1}{2\nu M_{02}} [-c_{22}\nu a_2 - P \sin \vartheta_2 - \beta_{2,1}a_1^3 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2)] \equiv X_3 \\
 \frac{d\vartheta_2}{dt} &= \frac{1}{2\nu M_{02} a_2} [-(\nu^2 - \omega_{\delta 2}^2) M_{02} a_2 - P \cos \vartheta_2 + \beta_{2,2}a_2^3 + \beta_{1,2}a_1^2 a_2 + \\
 & + \beta_{2,1}a_1^3 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2)] \equiv X_4,
 \end{aligned} \quad (51)$$

gdzie:

$$c_{ii} = \mu\gamma l(1-b_{02i})^2, \quad \beta_{ii} = \frac{3}{4}\mu\gamma(1-b_{02i})^4, \quad M_{0i} = 1 + \gamma b_{02i}^2, \quad i = 1, 2,$$

$$\beta_{12} = \frac{3}{2}\mu\gamma(1-b_{021})^2(1-b_{022})^2, \quad \beta_{21} = \frac{1}{4}\mu\gamma(1-b_{021})^3(1-b_{022}).$$

W celu wyznaczenia parametrów stanów ustalonych przyrównujemy do zera prawe strony równań (51),

$$\begin{aligned} [-c_{11}\nu + 9\beta_{21}a_1a_2 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2)]a_1 &= 0 \\ \left[ -\frac{1}{3}(\nu^2 - \omega_{02}^2)M_{01} + 3\beta_{11}a_1^2 + 3\beta_{12}a_2^2 + 3\beta_{21}a_1a_2 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \right]a_1 &= 0 \\ -c_{22}\nu a_2 - P \sin \vartheta_2 - \beta_{21}a_1^3 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2) &= 0 \\ -(\nu^2 - \omega_{02}^2)M_{02}a_2 - P \cos \vartheta_2 + \beta_{22}a_2^3 + \beta_{12}a_1^2a_2 + \beta_{21}a_1^3 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Jak widzimy, w tym przypadku możliwe są dwa typy rozwiązań:

(a) — jednoczęstościowe,

$$a_1 = 0 \text{ i } a_2 \neq 0, \quad (53)$$

(b) — dwuczęstościowe,

$$a_1 \neq 0 \text{ i } a_2 \neq 0. \quad (54)$$

Zbadajmy więc stateczność tych rozwiązań. Niech parametrami stanu ustalonego będą  $a_{10}$ ,  $a_{20}$ ,  $\vartheta_{10}$  i  $\vartheta_{20}$ , a dostatecznie małymi zaburzeniami od niego będą  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$ ,  $\eta_4$ . Wtedy z równań (51) otrzymamy,

$$\begin{aligned} -2\nu M_{01}\dot{\eta}_1 &= a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + a_{13}\eta_3 + a_{14}\eta_4 \\ -2\nu M_{01}\dot{\eta}_2 &= a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{23}\eta_3 + a_{24}\eta_4 \\ -2\nu M_{02}\dot{\eta}_3 &= a_{31}\eta_1 + a_{32}\eta_2 + a_{33}\eta_3 + a_{34}\eta_4 \\ -2\nu M_{02}\dot{\eta}_4 &= a_{41}\eta_1 + a_{42}\eta_2 + a_{43}\eta_3 + a_{44}\eta_4 \end{aligned} \quad (55)$$

gdzie:

$$a_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial \eta_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (56)$$

Równanie charakterystyczne dla równań (55) możemy zapisać w postaci,

$$\lambda^4 + A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0. \quad (57)$$

Zgodnie z kryterium Routh-Hurwitza otrzymamy następujące warunki stateczności,

$$\begin{aligned} A_0 > 0, \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \\ A_1A_2A_3 - A_0A_3^2 - A_1^2 > 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Z warunków tych  $A_3 = 2\nu(c_{11} + c_{22}) > 0$  jest spełniony zawsze, natomiast dla warunku  $A_0 = 0$  granica stateczności zbiega się z punktami, dla których styczna do krzywych rezonansowych  $a_1$  i  $a_2$  w funkcji częstotliwości  $\nu$  jest pionowa.

3.2.1. Rozwiązanie jednoczęstotliwościowe. W pierwszej kolejności rozważymy rozwiązanie jednoczęstotliwościowe  $a_1 = 0$  i  $a_2 \neq 0$ . Podstawiając  $a_1 = 0$  do trzeciego i czwartego równania w (52) otrzymamy:

$$\begin{aligned} -c_{22}\nu a_2 - P \sin \vartheta_2 &= 0 \\ (\nu^2 - \omega_{02}^2) M_{02} a_2 - P \cos \vartheta_2 + \beta_{22} a_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Równania te są podobne do tych, które wyznaczają amplitudę i kąt fazowy w pobliżu rezonansu w układzie o jednym stopniu swobody.

Badając stateczność tego rozwiązania, równanie charakterystyczne (57) przybiera następującą postać,

$$(\lambda^2 + A_1^{(1)} \lambda + A_0^{(1)})(\lambda^2 + A_1^{(2)} \lambda + A_0^{(2)}) = 0, \quad (60)$$

gdzie

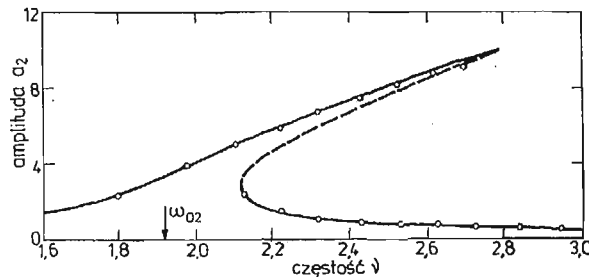
$$A_1^{(1)} = 2\nu c_{11}, \quad A_0^{(1)} = c_{11}^2 \nu^2 + \left[ \frac{1}{3} (\nu^2 - \omega_{02}^2) M_{01} - \beta_{12} a_{20}^2 \right]^2, \quad (61)$$

$$A_1^{(2)} = 2\nu c_{22}, \quad A_0^{(2)} = c_{22}^2 \nu^2 + (\nu^2 - \omega_{02}^2) M_{02} - 4\beta_{22} a_{20}^2 \left[ (\nu^2 - \omega_{02}^2) M_{02} - \frac{3}{4} \beta_{22} a_{20}^2 \right].$$

Warunki stateczności są w tym przypadku następujące,

$$A_1^{(1)} > 0, \quad A_0^{(1)} > 0, \quad A_1^{(2)} > 0, \quad A_0^{(2)} > 0, \quad (62)$$

z których trzy pierwsze są spełnione zawsze. Dla czwartego z nich —  $A_0^{(2)}$ , punkty graniczne pokrywają się z punktami, w których styczna do krzywej rezonansowej  $a_2$  w funkcji częstości  $\nu$  jest pionowa.

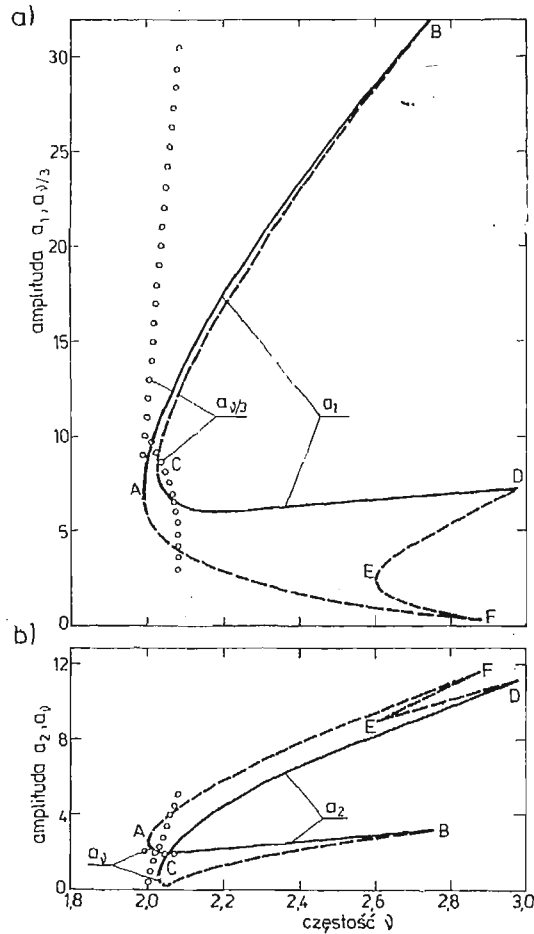


Rys. 4. Krzywa rezonansowa  $a_2 \equiv a_2(\nu)$  w przypadku kiedy  $a_1 = 0$ ,

— stateczna } metoda uśrednienia,  
 - - - - - niestateczna }  
 o o o o o — wyniki analogowe

Na rys. 4 pokazano krzywą rezonansową  $a_2 \equiv a_2(\nu)$  dla rozwiązania jednoczęstotliwościowego, w przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu drugiego rezonansu głównego. Na rysunku tym pokazano także krzywą rezonansową znaną na maszynie analogowej. Jak widać wyniki metody uśrednienia są bliskie wynikom analogowym i potwierdzają w tym przypadku słuszność zastosowania metody uśrednienia.

3.2.2. **Rozwiązanie dwuczęstościowe.** Rozważymy teraz rozwiązanie dwuczęstościowe (54), a więc  $a_1 \neq 0$  i  $a_2 \neq 0$ . Aby wyznaczyć parametry stanu ustalonego dla tego typu rozwiązania, równania (52) rozwiązano za pomocą maszyny cyfrowej i znaleziono  $a_1 \equiv a_1(\nu)$ ,  $a_2 \equiv a_2(\nu)$ ,  $\vartheta_1 \equiv \vartheta_1(\nu)$ , i  $\vartheta_2 \equiv \vartheta_2(\nu)$ . Na rys. 5 pokazano  $a_1 \equiv a_1(\nu)$  i  $a_2 \equiv a_2(\nu)$ , które



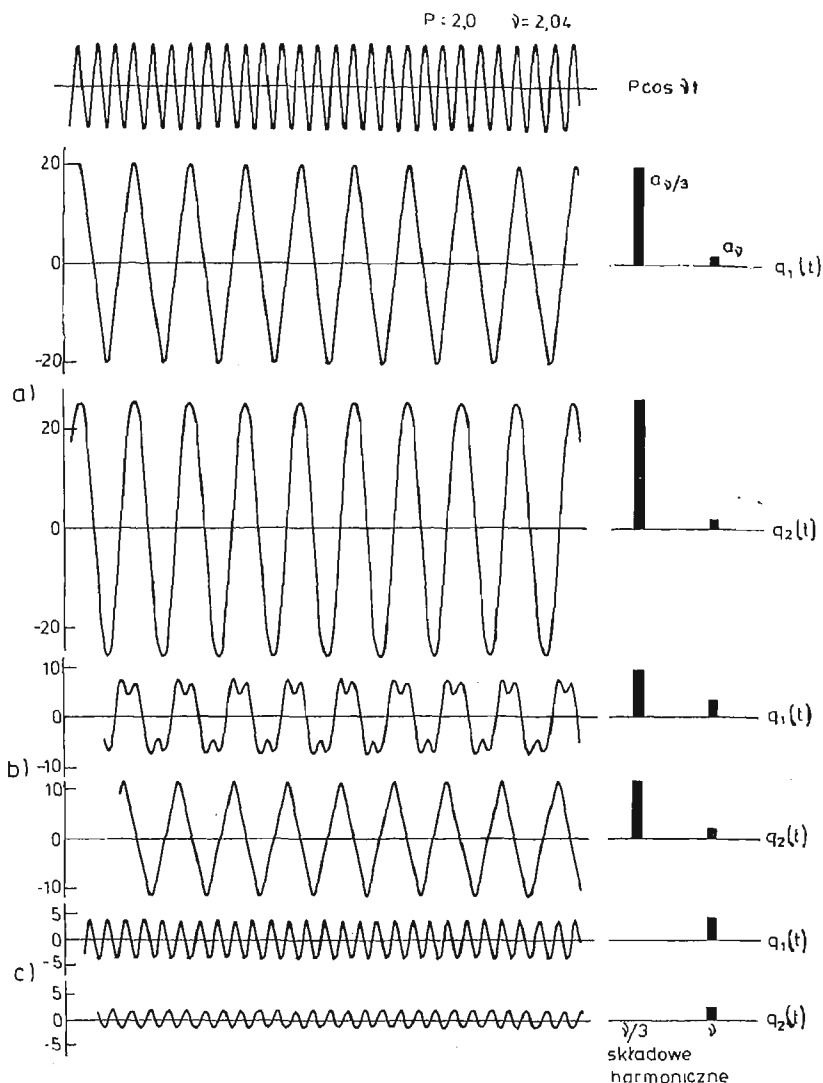
Rys. 5. Krzywe rezonansowe dla rozwiązań dwuczęstościowych, (a)  $a_1 \equiv a_1(\nu)$  i  $a_{\nu/3} \equiv a_{\nu/3}(\nu)$ , (b)  $a_2 \equiv a_2(\nu)$  i  $a_{\nu} \equiv a_{\nu}(\nu)$ ,

— stateczna } metoda uśrednienia,  
 - - - - - niestateczna }  
 o o o o — wyniki analogowe

spełniają układ równań (52). Z badania stateczności wynika, że warunki (58) są spełnione w przedziałach  $A-B$  i  $C-D$ , zawierają się więc w nich stateczne rozwiązania dwuczęstościowe. Rozwiązania niestateczne zawierają się w przedziałach,

$$\begin{aligned}
 A-F \text{ i } B-C & - A_0 < 0, \\
 E-F & - A_1 < 0 \text{ i } A_2 < 0, \\
 E-D & - A_0 < 0, A_1 < 0 \text{ i } A_2 < 0.
 \end{aligned} \tag{63}$$

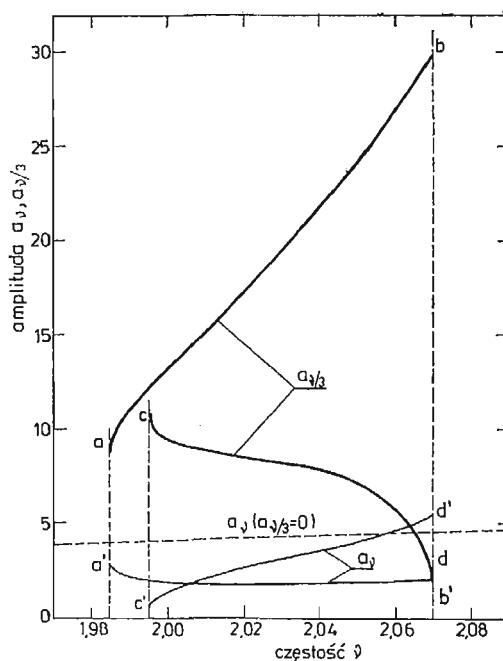
Jak widzimy, możliwe są w tym przypadku dwa typy rozwiązań dwuczęstościowych. W pierwszym z nich reprezentowanym przez gałąź  $C-D$ , wielkość amplitudy  $a_2$  jest zbliżone do tej kiedy  $a_1 = 0$ . W drugim typie, reprezentowanym przez gałąź  $A-B$ , dominują drgania o częstotliwości  $\nu/3$  z amplitudą  $a_1$ , mogącą osiągnąć wartość nawet dziewięćkrotnie większą niż amplituda  $a_2$  dla drgań o częstotliwości wymuszenia  $\nu$ .



Rys. 6. Przebiegi czasowe  $q_1(t)$  i  $q_2(t)$  oraz ich analiza harmoniczna przy częstotliwości  $\nu = 2,04$ ; (a) i (b) — rozwiązania dwuczęstościowe, (c) — rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe

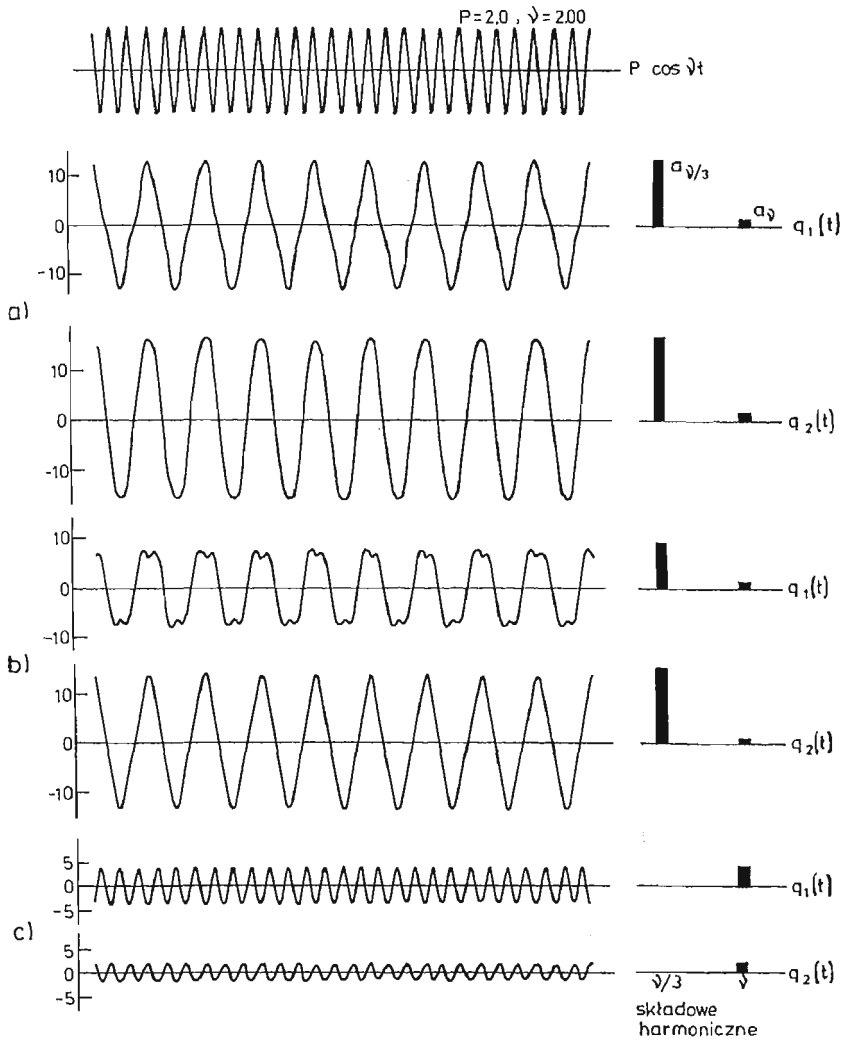
Dla weryfikacji wyników metody uśrednienia, przeprowadzono badania analogowe modelując równania ruchu (41). Badania analogowe potwierdziły istnienie dwóch typów okresowych dwuczęstościowych — ilustruje to rys. 6. Pierwszy typ odpowiedzi przed-

stawiony na rys. 6a charakteryzuje się dużymi amplitudami, a dominującymi w nim są drgania o częstotliwości  $\nu/3$  z amplitudą  $a_{\nu/3}$ . Wpływ drgań o częstotliwości wymuszenia  $\nu$  z amplitudą  $a_\nu$  jest mały, i drgania układu są podobne do tych jak dla pierwszego rezonansu głównego. Drugi typ odpowiedzi przedstawiony na rys. 6b charakteryzuje się mniejszymi amplitudami, występują te same składowe harmoniczne co i poprzednio, z tym że udział składowej o częstotliwości wymuszenia jest w tym przypadku większy. W obu przypadkach drgań dwuczęstościowych amplitudy są znacznie większe niż w przypadku drgań rezonansowych jednoczęstościowych. Na rys. 7 pokazano krzywe rezonansowe  $a_{\nu/3} \equiv a_{\nu/3}(\nu)$



Rys. 7. Krzywe rezonansowe znalezione na maszynie analogowej,  
 ————— — rozwiązania dwuczęstościowe z amplitudą  $a_{\nu/3}$ ,  
 ————— — rozwiązania dwuczęstościowe z amplitudą  $a_\nu$ ,  
 - - - - - — rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe

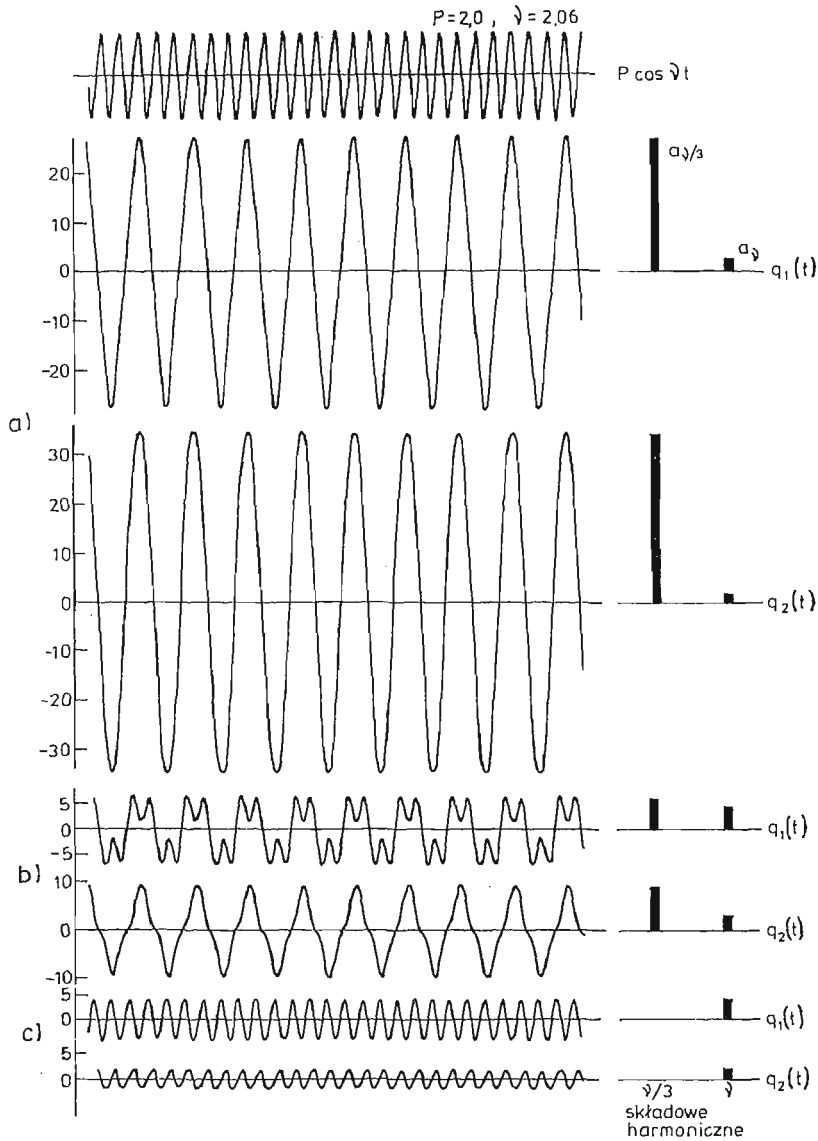
i  $a_\nu \equiv a_\nu(\nu)$  dla drgań dwuczęstościowych, tj w przypadku występowania rezonansu wewnętrznego. Pierwsze z drgań reprezentowane jest przez gałąź  $a-b$  dla składowej o częstotliwości  $\nu/3$  z amplitudą  $a_{\nu/3}$ , a przez gałąź  $a'-b'$  dla składowej o częstotliwości wymuszenia  $\nu$  z amplitudą  $a_\nu$ . Dominują w nim drgania o częstotliwości  $\nu/3$ , przy czym ze wzrostem  $\nu$  amplituda ich gwałtownie rośnie. Amplituda składowej o częstotliwości wymuszenia  $\nu$  nie ulega większym zmianom. Drugie z drgań dwuczęstościowych, gałąź  $c-d$  dla składowej o częstotliwości  $\nu/3$  i  $c'-d'$  dla składowej o częstotliwości  $\nu$ , zachowuje się odmiennie od poprzedniego. Ze wzrostem częstotliwości  $\nu$  amplituda  $a_{\nu/3}$  maleje, natomiast amplituda  $a_\nu$  rośnie i na końcu przedziału staje się bliska amplitudy rozwiązania rezonansowego jednoczęstościowego. Na rys. 8 i 9 pokazano przebiegi czasowe  $q_1(t)$  i  $q_2(t)$  wraz z ich analizą harmoniczną przy częstotliwościach  $\nu = 2.00$  i  $2.06$ , a więc dla częstotliwości bliskich skrajnym dla tego typu rozwiązania.



Rys. 8. Przebiegi czasowe  $q_1(t)$  i  $q_2(t)$  oraz ich analiza harmoniczna przy częstotliwości wymuszenia  $\nu = 2.00$ ;  
 (a) — rozwiązanie dwuczęstościowe (gałąź  $a-b$  na rys. 7),  
 (b) — rozwiązanie dwuczęstościowe (gałąź  $c-d$  na rys. 7),  
 (c) — rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe

Dla porównania wyników uzyskanych przy pomocy uśrednienia z wynikami analogowymi, naniesiono te ostatnie na rys. 5. Jak łatwo zauważyć wyniki obu metod nie zgadają się ani nie są sobie bliskie, dotyczy to zwłaszcza zakresów częstości, w których występują drgania dwuczęstościowe. Jeśli przyjmiemy, że bliskie rzeczywistości są wyniki analogowe, to musimy stwierdzić, że wyniki uzyskane metodą uśrednienia są nie do przyjęcia, chociaż postać założonego rozwiązania, zawierającego dwie składowe harmoniczne jest zgodna z wynikami analizy analogowej.

Zastanówmy się w czym należy upatrywać błędnych wyników jakie dała metoda uśrednienia. Jak już wspomniano w p. 2.1 powodem tych rozbieżności może być założenie



Rys. 9. Przebiegi czasowe  $q_1(t)$  i  $q_2(t)$  oraz ich analiza harmoniczna przy częstotliwości wymuszenia  $\nu = 2,06$ ,  
 (a) — rozwiązanie dwuczęstościowe (gałąź a–b na rys. 7),  
 (b) — rozwiązanie dwuczęstościowe (gałąź c–d na rys. 7),  
 (c) — rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe

w rozwiązaniu układu równań (41) dla współrzędnych  $q_1$  i  $q_2$  zapisanych w postaci (32),

$$q_1 = a_1 \cos\left(\frac{\nu}{3} t + \vartheta_1\right) + a_2 \cos(\nu t + \vartheta_2)$$

$$q_2 = a_1 b_{021} \cos\left(\frac{\nu}{3} t + \vartheta_1\right) + a_2 b_{022} \cos(\nu t + \vartheta_2),$$
(64)

współczynników postaci własnych  $b_{021}$  i  $b_{022}$  takich jak dla układu liniowego.



Przeprowadzimy więc obliczenia analityczne wykorzystując metodę Ritz'a, która jak wiadomo nie wprowadza żadnych założeń upraszczających odnośnie postaci drgań układu.

3.3. Analiza drugiego rezonansu głównego — metoda Ritz'a. Przepiszemy jeszcze raz równania ruchu (41) w nieco przekształconej formie,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(t) &\equiv \ddot{q}_2 - (q_1 - q_2) - \mu(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - \mu(q_1 - q_2)^3 = 0, \\ \varepsilon_2(t) &\equiv \ddot{q}_1 + \gamma\ddot{q}_2 + \kappa^2 q_1 - P \cos \nu t = 0,\end{aligned}\quad (65)$$

i zgodnie z (33) poszukajmy rozwiązania w postaci:

$$\begin{aligned}q_1 &= a_1 \cos\left(\frac{\nu}{3} t + \vartheta_{11}\right) + a_2 \cos(\nu t + \vartheta_{12}) \\ q_2 &= a_1 b_{21} \cos\left(\frac{\nu}{3} t + \vartheta_{21}\right) + a_2 b_{22} \cos(\nu t + \vartheta_{22}).\end{aligned}\quad (66)$$

Dla uproszczenia zapisu rozwiązanie (66) przepisujemy w formie,

$$\begin{aligned}q_1 &= a_1 \cos \Theta_1 + a_2 \cos \Theta_2 \\ q_2 &= a_1 b_{21} \cos(\Theta_1 + \delta_1) + a_2 b_{22} \cos(\Theta_2 + \delta_2),\end{aligned}\quad (67)$$

gdzie:

$$\Theta_1 = \frac{\nu}{3} t + \vartheta_{11}, \quad \Theta_2 = \nu t + \vartheta_{12}, \quad \delta_1 = \vartheta_{21} - \vartheta_{11}, \quad \delta_2 = \vartheta_{22} - \vartheta_{12}.$$

Nieznane wielkości  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_{21}$ ,  $b_{22}$ ,  $\vartheta_{11}$ ,  $\vartheta_{12}$ ,  $\delta_1$  i  $\delta_2$  wyznaczymy podstawiając przybliżone rozwiązanie (67) do równań ruchu (65) i wykorzystując zależność (35). Otrzymamy wtedy,

$$\begin{aligned}\left[\kappa^2 - \frac{1}{9} \nu^2 (1 + \gamma b_{21})\right] a_1 &= 0, \\ [\kappa^2 - \nu^2 (1 + \gamma b_{22} \cos \delta_2)] a_2 &= P \cos \vartheta_{12}.\end{aligned}\quad (68)$$

$$\frac{1}{9} \nu^2 \gamma a_1 b_{21} \sin \delta_1 = 0,$$

$$\gamma a_2 b_{22} \nu^2 \sin \delta_2 = P \sin \vartheta_{12}.$$

$$\left\{ \frac{1}{9} \nu^2 b_{21} + 1 - b_{21} + \frac{3}{4} \mu (1 - b_{21}) [a_1^2 (1 - b_{21})^2 + 2a_2^2 (1 + b_{22}^2 - 2b_{22} \cos \delta_2) + \right.$$

$$\left. + a_1 a_2 (1 - b_{21}) \cos \vartheta - a_1 a_2 (1 - b_{21}) b_{22} \cos(\vartheta - \delta_2)] \right\} a_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}[(\nu^2 - 1) b_{22} \cos \delta_2 + 1 + \mu \nu b_{22} \sin \delta_2] a_2 + \frac{3}{4} \mu \left\{ a_2^3 + 2a_1^2 a_2 (1 - b_{21})^2 - \right. \\ \left. - [2a_1^2 a_2 (1 - b_{21})^2 b_{22} + a_2^3 b_{22}^2 + 3a_2^3 b_{22}] \cos \delta_2 + 2a_2^3 b_{22}^2 + a_2^3 b_{22}^2 \cos 2\delta_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} a_1^3 (1 - b_{21})^3 \cos \vartheta \right\} = 0,\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{3} \mu \nu (1 - b_{21}) + \frac{3}{4} \mu (1 - b_{21})^2 a_1 a_2 [\sin \vartheta - b_{22} \sin(\vartheta - \delta_2)] \right\} a_1 = 0, \quad (69)$$

[cd.]

$$(1 - \nu^2) a_2 b_{22} \sin \delta_2 - \mu \nu a_2 (1 - b_{22} \cos \delta_2) + \frac{3}{4} \mu \left\{ [a_2^3 b_{22}^3 + 2a_1^2 a_2 (1 - b_{21}) b_{22} + \right.$$

$$\left. + a_2^3 b_{22}] \sin \delta_2 - \frac{1}{3} a_1^3 (1 - b_{21})^3 \sin \vartheta - a_2^3 b_{22}^2 \sin 2\delta_2 \right\} = 0.$$

gdzie:  $\vartheta = 3\vartheta_{11} - \vartheta_{12}$ .

Z analizy równań (68) wynika, że  $\sin \delta_1 = 0$ , gdyż równanie

$$\frac{1}{9} \nu^2 a_1 b_{21} \sin \delta_1 = 0, \quad (69)$$

jest spełnione tylko wtedy gdy  $\sin \delta_1 = 0$ , ponieważ dla rozwiązań dwuczęstościowych zarówno  $a_1$  jak i  $b_{21}$  są różne od zera. Ostatecznie układ równań (68) redukuje się do siedmiu równań z niewiadomymi:  $a_1, a_2, b_{21}, b_{22}, \vartheta, \vartheta_{12}$  i  $\delta_2$ . Równania (68) wyprowadzono przy uwzględnieniu, że  $\sin \delta_1 = 0$ . Aby wyznaczyć parametry stanów ustalonych dla rozwiązań dwuczęstościowych należy rozwiązać układ równań (68).

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku kiedy tłumienie jest równe zero, co znacznie uprości nam obliczenia, a nie powinno mieć istotnego wpływu na otrzymane wyniki za wyjątkiem obszaru częstości, gdzie rozwiązanie osiąga maksymalne amplitudy. Równania (68) dla tłumienia równego zero redukują się do układu czterech algebraicznych równań nieliniowych z niewiadomymi  $a_1, a_2, b_{21}$  i  $b_{22}$ ,

$$\left[ \kappa^2 - \frac{1}{9} \nu^2 (1 + \gamma b_{21}) \right] a_1 = 0,$$

$$[\kappa^2 - \nu^2 (1 + \gamma b_{22})] a_2 = P,$$

$$\left\{ \frac{1}{9} \nu^2 b_{21} + 1 - b_{21} + \frac{3}{4} \mu (1 - b_{21}) [a_1^2 (1 - b_{21})^2 + 2a_2^2 (1 - b_{22})^2 + a_1 a_2 (1 - \right.$$

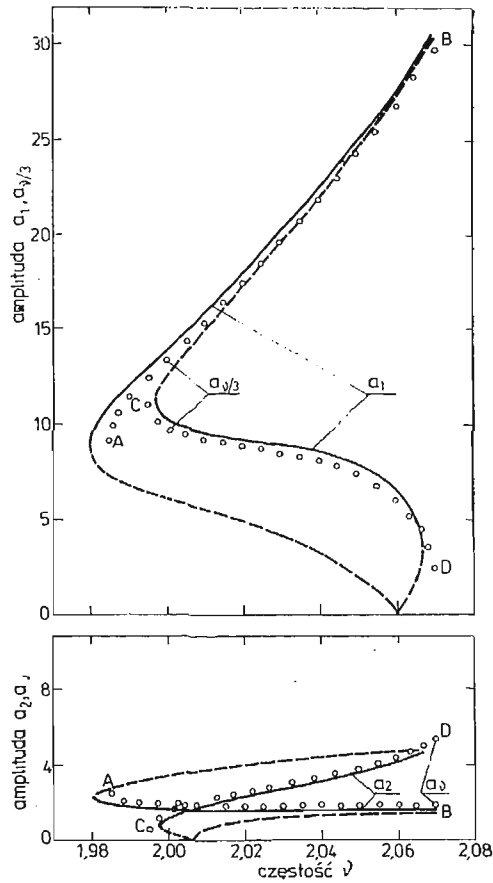
$$\left. - b_{21}) (1 - b_{22})] \right\} a_1 = 0, \quad (70)$$

$$\nu^2 a_2 b_{22} + a_2 (1 - b_{22}) + \frac{3}{4} \mu \left[ a_2^3 (1 - b_{22})^3 + 2a_1^2 a_2 (1 - b_{21})^2 (1 - b_{22}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} a_1^3 (1 - b_{21})^3 \right] = 0.$$

Jak należało oczekiwać możliwe są dwa typy rozwiązań: jednoczęstościowe:  $a_1 = 0$  i  $a_2 \neq 0$  i dwuczęstościowe:  $a_1 \neq 0$  i  $a_2 \neq 0$ .

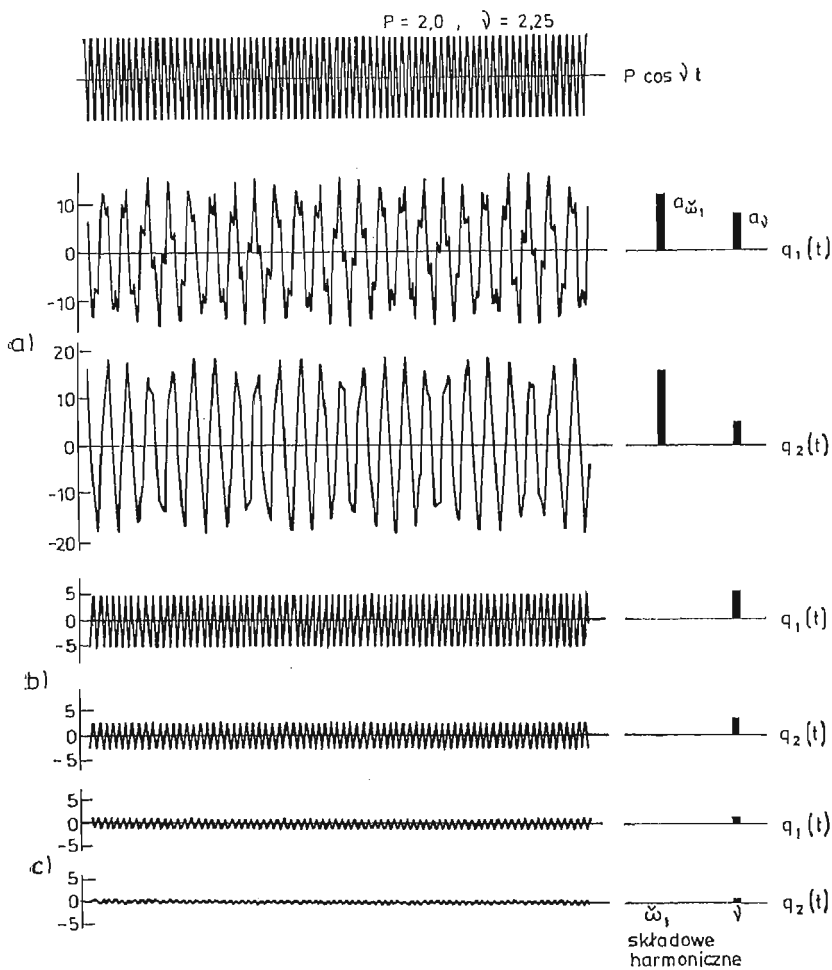
Skoro metoda uśrednienia dała wyniki zgodne z analogowymi w przypadku rozwiązania jednoczęstościowego, zajmiemy się obecnie tylko rozwiązaniem dwuczęstościowym. Rozwiązano w tym celu równania (70) przy pomocy maszyny cyfrowej. Na rys. 10, na którym pokazano wyniki analogowe, pokazano także  $a_1 \equiv a_1(\nu)$  i  $a_2 \equiv a_2(\nu)$  które spełniają układ równań (70).



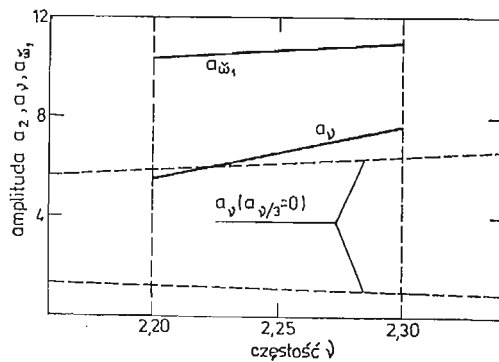
Rys. 10. Krzywe rezonansowe dla rozwiązań dwuczęstościowych, (a)  $a_1 \equiv a_1(\nu)$  i  $a_{\nu/3} \equiv a_{\nu/3}(\nu)$ , (b)  $a_2 \equiv a_2(\nu)$  i  $a_\nu \equiv a_\nu(\nu)$ ,  
 ————— stateczna } metoda Ritz,  
 - - - - - niestateczna }  
 o o o o o — wyniki analogowe

Jak łatwo zauważyć, wyniki z metody Ritz są bardzo bliskie analogowym, zarówno jeśli chodzi o zakres częstotliwości w jakim występują rozwiązania dwuczęstościowe jak również i wielkość amplitud.

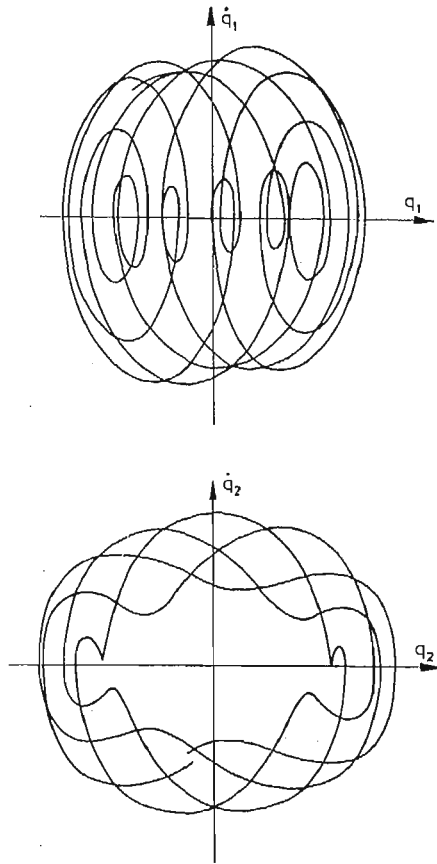
**3.4. Drgania prawie-okresowe.** W trakcie badań analogowych okazało się, że dla częstotliwości wymuszenia  $\nu \in \langle 2.20, 2.30 \rangle$ , oprócz drgań harmonicznnych odpowiadających drugiemu rezonansowi głównemu, mogą pojawić się drgania prawie-okresowe o znacznych amplitudach. Z przeprowadzonej analizy harmonicznej wynika, że w odpowiedzi dominują dwie składowe harmoniczne: jedna, podobnie jak poprzednio o częstotliwości wymuszenia  $\nu$  i druga o częstotliwości nieco niższej niż  $\nu/3$ , którą oznaczmy symbolem  $\tilde{\omega}_1$ . Częstotliwości te nie są współmierne, stąd odpowiedź układu jest prawie-okresowa. Dla ustalonej częstotliwości wymuszenia  $\nu = 2.25$  zarejestrowano przebiegi czasowe, które pokazano na rys. 11. Na rys. 12 pokazano wykresy: amplitudy o częstotliwości  $\nu$ ,  $a_\nu \equiv a_\nu(\nu)$  i amplitudy o częstotliwości



Rys. 11. Przebiegi czasowe oraz ich analiza harmoniczna przy  $\nu = 2.25$ ,  
 (a) — rozwiązanie prawie-okresowe,  
 (b) — rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe,  
 (c) — rozwiązanie nieresonansowe jednoczęstościowe.



Rys. 12. Zmiany amplitud składowych o częstościach  $\nu$  i  $\check{\omega}_1$ , dla rozwiązania prawie-okresowego



Rys. 13. Trajektorie w stanie ustalonym dla rozwiązania prawie-okresowego przy częstotliwości  $\nu = 2.25$

$\check{\omega}_1$ ,  $a_{\check{\omega}_1}^* \equiv a_{\check{\omega}_1}^*(\nu)$ . Na rys. 13 pokazano trajektorie w stanie ustalonym na płaszczyznach fazowych  $[q_1, \dot{q}_1]$  i  $[q_2, \dot{q}_2]$  dla  $\nu = 2.25$ .

Wzmianki o drganiach prawie-okresowych w układach z rezonansem wewnętrznym wykrytych na drodze symulacji analogowej i cyfrowej znaleźć można w pracach [30, 31, 35, 53], lecz nie podjęto jeszcze prób teoretycznego wyjaśnienia tego zjawiska i zagadnienie to wymaga dalszych badań.

#### 4. Wnioski

Analiza zjawiska rezonansu wewnętrznego w pobliżu rezonansów głównych układów o wielu stopniach swobody przeprowadzona za pomocą analitycznych metod przybliżonych i symulacji komputerowej pozwala na sformułowanie następujących wniosków: — Zgodnie z wynikami wcześniejszych prac, istotą zjawiska rezonansów wewnętrznych jest pojawienie się w odpowiedzi rezonansowej dodatkowych składowych harmonicznych, oprócz składowej o częstotliwości wymuszenia, tak że przybliżone rozwiązanie w postaci,

$$q_i(t) = a_{ik} \cos(\nu t + \vartheta_k) + \sum_{s=1}^r a_{is} \cos(N_{ks} \nu t + \vartheta_s), \quad \nu \approx \omega_k, \quad (71)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad s \neq k,$$

gdzie:  $N_{ks} = \frac{\omega_s}{\omega_k}$ ,

prawidłowo opisuje odpowiedź układu jako funkcji czasu.

- Wyznaczenie analityczne krzywych rezonansowych  $a_{ik} = a_{ik}(\nu)$ ,  $a_{is} = a_{is}(\nu)$ ,  $s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$ , za pomocą powszechnie stosowanej w literaturze metody uśrednienia może prowadzić do istotnych jakościowo rozbieżności z wynikami symulacji komputerowej. Błędy te są konsekwencją założenia upraszczającego nierozłącznie związanego z tą metodą — założenia, że stosunki amplitud poszczególnych harmonicznych są równe współczynnikom postaci własnych układu liniowego, tj.,

$$\frac{a_{ik}}{a_{1k}} = b_{0ik}; \quad \frac{a_{is}}{a_{1s}} = b_{0is}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (72)$$

Natomiast metoda Ritza, która nie narzuca tego uproszczenia w rozwiązaniu (71), pozwala traktować wszystkie amplitudy  $a_{is}$ ,  $a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$ , jako niewiadome, prowadzi do wyników zgodnych z wynikami symulacji komputerowej. — Efekty rezonansu wewnętrznego mogą powodować drgania o amplitudach wielokrotnie większych niż te, które występują w układach bez rezonansu wewnętrznego. I tak w badanym szczegółowo układzie o dwóch stopniach swobody, w pewnym obszarze częstości wymuszenia  $\nu \in \langle 1.98, 2.07 \rangle$ , dodatkowa składowa harmoniczna o częstości  $\nu/3$  jest prawie dziesięciokrotnie większa od amplitudy składowej podstawowej. Przykład ten nasuwa wniosek, że w analizie drgań rezonansowych układów nieliniowych powinna zawsze być rozważana sprawa niebezpieczeństwa rezonansów wewnętrznych.

#### Literatura

1. Г. С. ГОРЕЛИК, А. ВИТТ, ж. Техн. Физ. СССР, 3, 1933.
2. T. R. KANE, M. E. KAHN, *On a class of twodegree-of-freedom oscillations*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, March 1968, pp. 547 - 552.
3. A. H. P. VAN DER BURGH, Ph. D. THESIS, *Studies in the asymptotic theory of nonlinear resonances*, Technische Hogeschool Delft, 1974.
4. A. H. P. VAN DER BURGH, *On the higher order asymptotic approximations for solutions of the equations of an elastic pendulum*, Journal of Sound and Vibration 42(4) 1975, pp. 463 - 475.
5. P. SRINIVASAN, T. S. SANKAR, *Autoparametric self-excitation of a pendulum type elastic oscillator*, Journal of Sound and Vibration 35, 1974, pp. 549 - 557.
6. R. M. EVAN-IVANOWSKI, *Resonance Oscillations in Mechanical Systems*, Amsterdam 1976, Elseviers.
7. N. MINORSKY, *Drżania nieliniowe*, PWN Kraków 1967.
8. E. SEVIN, *On the Parametric Excitation of Pendulum-Type Vibration Absorber*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, September 1961, pp. 330 - 334.
9. R. A. STRUBLE, *Nonlinear Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London 1962.
10. R. A. STRUBLE, *On the sub-harmonic oscillations of a pendulum*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 30, 1963, pp. 301 - 303.

11. R. A. STRUBLE, *On the oscillations of a pendulum under parametric excitation*, Quarterly of Applied Mathematics 22, 1964, pp. 157 - 159.
12. R. A. STRUBLE, *Oscillations of a pendulum under parametric excitation*, Quarterly of Applied Mathematics 21, 1963, pp. 121 - 131.
13. R. A. STRUBLE, J. H. HEINBOCKEL, *Resonant Oscillations of a Beam-Pendulum System*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, June 1963, pp. 181 - 188.
14. R. S. HAXTON, A. D. S. BARR, *The Autoparametric Vibration Absorber*, Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, 94, 1972, pp. 119 - 125.
15. A. D. S. BARR, D. J. NELSON, *Autoparametric Interactions in Structures*, Symposium on Nonlinear Dynamics, 1975, University of Edinburgh.
16. P. H. MAC DONALD, *Nonlinear Dynamic Coupling in a Beam Vibration*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, 1955, pp. 573 - 578.
17. S. ATLURI, *Nonlinear Vibrations of a Hinged Beam Including Nonlinear Inertia Effects*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 40, 1973, pp. 121 - 126.
18. E. H. DOWELL, *Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 5, No. 10, Oct. 1967, pp. 1856 - 1962.
19. L. MORINO, *A Perturbation Method for Treating Nonlinear Panel Flutter Problems*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 7, No. 3, March 1969, pp. 405 - 411.
20. J. A. BENNET, J. G. EISLEY, *A Multiple-Degree-of-Freedom Approach to Nonlinear Beam Vibrations*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 8, No. 4, April 1970, pp. 734 - 739.
21. J. A. BENNET, *Ultraharmonic Motion of a Viscously Damped Nonlinear Beam*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 11, No. 5, May 1973, pp. 710 - 715.
22. W. Y. TSENG, J. DUGUNDJI, *Nonlinear Vibrations of a Buckled Beam under Harmonic Excitation*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 38, 1971, pp. 467 - 476.
23. P. R. SETHNA, *Vibrations of Dynamical Systems with Quadratic Nonlinearities*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, September 1965, pp. 576 - 582.
24. P. PISZCZEK, *Some Problems of Forced Vibrations of Constructions in the Nonlinear Case*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, PWN Warszawa, 1964.
25. T. TONDL, *On the internal resonance of nonlinear systems with two degrees of freedom*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 5, 1963, pp. 207 - 222.
26. A. TONDL, *Some Problems of Rotor Dynamics*, Publishing House of CAS, Prague 1965.
27. A. TONDL, *Resonance Vibrations of Nonlinear Systems Excited by a Periodic Non-harmonic Force*, Monographs and Memoranda, No. 13, 1972, pp. 56 - 89, National Research Institute for Machine Design, Bechovice.
28. A. TONDL, *Domains of Attraction for Nonlinear Systems*, Monographs and Memoranda, No. 8, 1970, National Research Institute for Machine Design, Bechovice.
29. P. R. SETHNA, A. K. BAJAJ, *Bifurcations in Dynamical Systems with Internal Resonance*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 45, Dec. 1978, pp. 895 - 902.
30. T. YAMAMOTO, K. YASUDA, *On the Internal Resonance in a Nonlinear Two-Degree-of-Freedom System* Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 20, No. 140, February 1977, pp. 168 - 176.
31. T. YAMAMOTO, K. YASUDA, I. NAGASAKA, *On the Internal Resonance in a Nonlinear Two-Degree-of-Freedom System*, Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 20, No. 147, Sept. 1977, pp. 1093 - 1100.
32. P. R. SETHNA, *Steady-State Undamped Vibrations of a Class of Nonlinear Discrete Systems*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the SME, March 1960, pp. 187 - 195.
33. A. H. NAYFEH, D. T. MOOK, S. SRIDHAR, *Nonlinear Analysis of the Forced Response of Structural Elements*, Journal of the Acoustic Society of America, Vol. 55, No. 2, February 1974.
34. A. H. NAYFEH, D. T. MOOK, D. W. LOBITZ, *Numerical-Perturbation Method for the Nonlinear Analysis of Structural Vibrations*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 12, No. 9, Sept. 1974, pp. 1222 - 1228.
35. S. L. LAU, Y. K. CHEUNG, S. Y. WU, *Incremental Harmonic Balance Method with Multiple Time Scales for Aperiodic Vibration of Nonlinear Systems*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 50, Dec. 1983, pp. 871 - 876.

36. J. G. A. CROLL, *Coupled vibration modes*, Journal of Sound and Vibration 38(1) 1975, pp. 27 - 37.
37. J. G. A. CROLL, *Kinematically coupled non-linear vibrations*, Journal of Sound and Vibration 40(1), 1975, pp. 77 - 85.
38. J. BAJKOWSKI, *Rezonanse wewnętrzne w nieliniowych układach drgających, cz. I*, Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki 15/1984 (na prawach rękopisu).
39. J. BAJKOWSKI, W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Rezonanse wewnętrzne w nieliniowych układach drgających, cz. II*, Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki 23/1984 (na prawach rękopisu)
40. S. SRIDHAR, D. T. MOOK, A. H. NAYFEH, *Nonlinear Resonances in the Forced Responses of Plates Part I: Symmetric Responses of Circular Plates*, Journal of Sound and Vibration 41, 1975, pp. 359 - 373.
41. S. SRIDHAR, D. T. MOOK, A. H. NAYFEH, *Nonlinear Resonances in the Forced Responses of Plates. Part II: Asymmetric Responses of Circular Plates*, Journal of Sound and Vibration 59 (2) 1978, pp. 159 - 170.
42. D. W. LOBITZ, A. H. NAYFEH, D. T. MOOK, *Nonlinear Analysis of Vibrations of Irregular Plates*, Journal of Sound and Vibration 50(2) 1977, pp. 203 - 217.
43. K. G. ASMIS, W. K. TSO, *Combination and internal resonance in a nonlinear two-degree-of freedom system*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 39, Sept. 1972, pp. 832 - 834.
44. A. H. NAYFEH, *Combination resonances in the nonlinear response of bowed structures to a harmonic excitation*, Journal of Sound and Vibration 90(4) 1983, pp. 457 - 470.
45. J. BAJKOWSKI, W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Zagadnienie rezonansów wewnętrznych w nieliniowych układach drgających*, Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki 19/1982, pp. 1 - 44 (na prawach rękopisu).
46. R. A. IBRAHIM A. D. S. BARR, *Autoparametric resonance in a structure containing a liquid, Part I: two mode interaction*, Journal of Sound and Vibration 42(2) 1975, pp. 159 - 179.
47. R. A. IBRAHIM A. D. S. BARR, *Autoparametric resonance in a structure containing a liquid, Part II: three mode interaction*, Journal of Sound and Vibration 42(2) 1975, pp. 181 - 200.
48. A. H. NAYFEH, D. T. MOOK L. R. MARSHAL, *Nonlinear coupling of a pitch and roll modes in ship motion*, Journal of Hydraulics 7, 1973, pp. 145 - 152.
49. A. H. NAYFEH D. T. MOOK, *A saturation phenomenon in the forced response of system with quadratic nonlinearities*, Proceedings of the VIIIth. Internationale Conference on Nonlinear Oscillations, Prague 1978. pp. 511 - 516.
50. W. K. TSO, K. G. ASMIS, *Multiple parametric resonance in onlinear two-degree-of-freedom system*, International Journal of Non-Linear Mechanics 9, 1974, pp. 269 - 277.
51. E. G. TEZAK, D. T. MOOK, A. H. NAYFEH, *Nonlinear analysis of the lateral response of columns to periodic loads*, Journal of Mech. Design, Transactions of the ASME, 100, 1978, pp. 651 - 659.
52. A. H. NAYFEH, *The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic nonlinearities to parametric excitation*, Journal of Sound and Vibration 88(4) 1983, pp. 547 - 557.
53. H. HATWAL, A. K. MALLIK, A. GHOSH, *Non-linear vibrations of harmonically excited autoparametric system*, Journal of Sound and Vibration 81(2) 1982, pp. 153 - 164.
54. A. H. NAYFEH, *The response of multi-degree-of-freedom system with quadratic nonlinearities to a harmonic parametric resonance*, Journal of Sound and Vibration 90(2) 1983, pp. 237 - 243.
55. F. C. L. FU, S. NEMAT-NASSER, *Stability of solution of systems of linear differential equations with harmonic coefficients*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 10, 1972, pp. 30 - 36.
56. F. C. L. FU, S. NEMAT-NASSER, *Response and stability of linear dynamics systems with many degrees of freedom subjected to nonconservative and harmonic forces*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 42, 1875, pp. 458 - 463.
57. E. G. TEZAK, A. H. NAYFEH, D. T. MOOK, *Parametrically excited nonlinear multi-degree-of-freedom systems with repeated natural frequencies*, Journal of Sound and Vibration 85, 1982, pp. 459 - 472.
58. A. H. NAYFEH, *Parametrically excited multidegree-of-freedom systems with repeated frequencies*, Journal of Sound and Vibration 88(2) 1983, pp. 145 - 150.
59. P. R. SETHNA, *Transients in Certain Autonomous Multiple-Degree-of-Freedom Nonlinear Vibrating Systems*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, March 1963, pp. 44 - 50.



60. B. I. CHESANKOV, *Bi-Frequency Oscillations in the Case Resonance of Arbitrary Rank*, VII Internationale Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, 1975 Berlin.
61. Б. И. ЧЕШАНКОВ, *Многочастотные резонансы колебания третьего ранга при внешних смещениях*, Прикладная мат., мех. 39, вып. I (1975).
62. Б. И. ЧЕШАНКОВ, *Резонансные колебания некоторых механических систем*, Успехи Механики, май 1980.
63. А. М. САМОЙЛЕНКО, И. П. МАЙОТ, *Стационарные квазипериодические колебания в нелинейных автономных системах второго порядка*, Динамика систем и вопросы устойчивости дифференциальных уравнений, Киев 1973.
64. А. М. САМОЙЛЕНКО, И. П. МАЙОТ, *О квазипериодических колебаниях в нелинейных системах второго порядка в случае резонанса*, Мат. Физика, вып. 15, 1974, стр. 140 - 152.
65. A. H. NAYFEH, D. T. MOOK, *Nonlinear Oscillations* 1979, New York: Wiley — Interscience.
66. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the asymptotic, averaging and Ritz method in the theory of steady-state vibrations of nonlinear systems with many degrees of freedom*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 22, 2 (1970).
67. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, J. BAJKOWSKI, *Obszary przyciągania rezonansów prawie-periodycznych*, Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki 53/1974.
68. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On certain new phenomena arising in nonlinear multi-degree-of-freedom vibrating systems*, VII Internationale Konferenz über Nichtlineare Schwingungen Berlin 1975, Abh. Akad. Wissenschaften DDR, Jhr 1977, Bd. II, 2, 317 - 327.
69. J. BAJKOWSKI, W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Domains of attraction of the secondary periodic and combination resonances in nonlinear two-degree-of-freedom systems*, VII Internationale Konferenz über Nichtlineare Schwingungen Berlin 1975, Abh. Akad. Wissenschaften DDR, Jhr 1977, 3N Bd. I, 1, 55 - 69.
70. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *A study of main and secondary resonances in nonlinear multi-degree-of-freedom systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics 10, 1975, pp. 289 - 304.
71. J. BAJKOWSKI, *Obszary przyciągania rezonansów pobocznych w nieliniowych układach drgających*, Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki 6/1977.
72. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *The modified single mode method in the investigations of the resonant vibrations of non-linear systems*, Journal of Sound and Vibration 63(4) 1979, pp. 475 - 489.
73. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, J. BAJKOWSKI, *Multi-harmonic response in the regions of instability of harmonic solution in multi-degree-of-freedom non-linear systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics 15, 1980, pp. 1 - 11.
74. D. E. NEWLAND, *On the method of Galerkin, Ritz and Krylov-Bogoliubov in the theory of nonlinear vibrations*, Int. J. Mech. Sci., 7, 1965, pp. 159 - 172.
75. Н. Н. БОГОЛЮБОВ, Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Ф. М. Москва 1963.
76. Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Метод усреднения в нелинейной механике*, Наукова Думка, Киев 1971.
77. И. Г. МАЛКИН, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, 1956.
78. J. A. GRIEBENIKOW, J. A. RIABOW, *Metoda uśrednienia w mechanice nieliniowej*, PWN, Warszawa 1982.
79. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the averaging and W. Ritz methods in the theory of nonlinear resonances in vibrating systems with multiple degrees of freedom*, Archives of Mechanics, 24, 1, 1972, pp. 67 - 88.
80. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the phenomenon of the combination type resonance in nonlinear two-degree-of-freedom systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics 4, 1969, pp. 335 - 359.
81. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Współrzędne normalne w analizie rezonansów głównych nieliniowych układów drgających o wielu stopniach swobody*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 1, 11, 1973, str. 17 - 34.

## Резюме

## ЯВЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ РЕЗОНАНСОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В данной статье рассматривается состояние знаний в области исследований внутреннего резонанса в нелинейных колебательных системах. В работу включены некоторые новые результаты полученные в случае внутреннего резонанса типа  $\omega_2 = 3\omega_1$  в системе с двумя степенями свободы, с нелинейностью кубического типа и гармоническим внешним возбуждением. Были использованы два теоретических метода: метод Ритца и метод усреднения. Конечные результаты проверялись путём симуляции уравнений движения на аналоговой вычислительной машине. Было установлено что в области второго основного резонанса следствием внутреннего резонанса могут являться двухчастотные колебания, амплитуды которых многократно превышают те, которые выступают в случае системы с отсутствием внутреннего резонанса. Доминирующей является та гармоническая, составляющая, частота которой равна  $1/3$  частоты возбуждения. Было показано что результаты полученные по методу Ритца, согласуются с теми которые были получены путём симуляции, в то время как метод усреднения ведёт к качественно другим результатам. Кроме того было показано что в области второго основного резонанса возможны колебания почти-периодические.

## Summary

## THE PHENOMENA OF INTERNAL RESONANCES IN NONLINEAR VIBRATING SYSTEMS

The paper presents a survey of the recent literature on the problems of internal resonances in nonlinear vibrating systems, and gives some new results on the internal resonance of order  $\omega_2 = 3\omega_1$  in a two-degree of-freedom system subjected to harmonic load. Two theoretical methods are used: the Ritz method and the averaging method and results are verified by an analog computer simulation. It is shown that in the neighbourhood of the second principle resonance the two-frequency oscillations occur with the amplitude of the subharmonic of order  $1/3$  considerably higher than that of the fundamental harmonic component. The Ritz method gives results very close with those of analog computer simulation whereas results obtained by the averaging method are qualitatively different with them. It is also shown that there occurs steady-state almost-periodic response in certain region of the excitation frequency.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 25 września 1984 roku.*

---