

PRAWA STEROWANIA JAKO WIĘZY NIEHOLONOMICZNE AUTOMATYCZNEGO UKŁADU STEROWANIA ŚMIGŁOWCEM

JERZY MARYNIAK

*Institut Techniki Lotniczej
i Mechaniki Stosowanej
Politechniki Warszawskiej*

W przedstawionym opracowaniu w oparciu o prace [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 20] podano propozycję wprowadzania praw sterowania jako więzów nieholonomicznych nałożonych na ruchomy obiekt mechaniczny. Okazało się, że takie podejście daje bardzo dobre rezultaty w przypadku sterowania automatycznych układów podwyższenia stabilizacji oraz przy zastosowaniu do automatycznego sterowania śmigłowców. Metoda ta może mieć zastosowanie przy automatycznym sterowaniu samolotów i raket.

1. Model ogólny dynamiki śmigłowca

W ogólnym przypadku równania różniczkowe opisujące ruch dowolnego obiektu ruchomego z uwzględnieniem procesu sterowania i zakłóceń zewnętrznych i wydzieleniu członów nieliniowych mają postać: [9]:

$$\dot{z} = \mathbf{R}(t)z(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{m}(t) + \mathbf{n}(t) + \mathbf{N}(z, \mathbf{m}, \mathbf{n}, t), \quad (1)$$

w którym:

- $\mathbf{R}(t)$ — macierz stanu $n \times n$ rozpatrywanego obiektu,
- $\mathbf{S}(t)$ — macierz sterowania $n \times r$,
- $\mathbf{N}(z, \mathbf{m}, \mathbf{n}, t)$ — macierz członów nieliniowych $n \times 1$,
- $z(t)$ — wektor stanu $n \times 1$,
- $\mathbf{m}(t)$ — wektor sterowania $r \times 1$,
- $\mathbf{n}(t)$ — wektor przypadkowych zakłóceń zewnętrznych, $s \times 1$.

Równanie (1) jest ogólnym modelem matematycznym stacjonarnego procesu dynamicznego n -tego rzędu [9]. W przypadku liniowych procesów stacjonarnych macierz stanu i macierz sterowania nie zależą od czasu i równania (1) bez uwzględnienia zakłóceń zewnętrznych upraszcza się do postaci

$$\dot{z}(t) = \mathbf{R}z(t) + \mathbf{S}\mathbf{m}(t), \quad (2)$$

Jeżeli na układ znajdujący się w ruchu swobodnym niesterowanym:

$$\dot{z}(t) = \mathbf{R}z(t), \quad (3)$$

nałożymy więzy kinematyczne wynikające z praw sterowania, które wiążą ze sobą wektor stanu $\mathbf{z}(t)$ z wektorem sterowania $\mathbf{m}(t)$ i jeżeli sterowanie ma być skuteczne to znaczy, że więzy kinematyczne są związane z równaniami ruchu, są więzami niecałkowalnymi a układ rozważany jest układem o więzach nieholonomicznych [2, 8, 9, 10, 11, 14, 20].

Ogólny model matematyczny własności dynamicznych śmigłowca jednowirnikowego ze śmigłem ogonowym w zapisie macierzowym ma postać

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{N}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t), \quad (4)$$

gdzie:

- A** — macierz współczynników bezwładności,
- B** — macierz współczynników tłumienia,
- C** — macierz współczynników sztywności,
- N** — macierz wyrazów nieliniowych,

przy czym macierze **A**, **B**, **C** w ogólnym przypadku śmigłowca mają następującą budowę np.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S}^R & \mathbf{S}^W & \mathbf{S}^T & \mathbf{S}^P \\ \mathbf{R}^S & \mathbf{R} & \mathbf{R}^W & \mathbf{R}^T & \mathbf{R}^P \\ \mathbf{W}^S & \mathbf{W}^R & \mathbf{W} & \mathbf{W}^T & \mathbf{W}^P \\ \mathbf{T}^S & \mathbf{T}^R & \mathbf{T}^W & \mathbf{T} & \mathbf{T}^P \\ \mathbf{P}^S & \mathbf{P}^R & \mathbf{P}^W & \mathbf{P}^T & \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Przedstawiona macierz (5) posiada budowę klatkową zawierającą kwadratowe klatki **S**, **R**, **W**, **T**, **P**, rozmieszczone wzdłuż przekątnej głównej stanowiące opis następujących własności modelu fizycznego:

- S** — macierz własności śmigłowca jako obiektu sztywnego,
- R** — macierz własności wirnika (rotora) nośnego śmigłowca,
- W** — macierz własności śmigła (wirnika) ogonowego,
- T** — macierz własności zespołu turbo-sprężarkowego silników napędu,
- P** — macierz własności więzów kinematycznych, prawa sterowania w automatycznym układzie sterowania.

Pozostałe elementy macierzy klatkowej (5) nie leżące na przekątnej głównej są macierzami sprzężeń, określającymi wzajemne wpływy poszczególnych zespołów układu na siebie, natomiast macierz więzów kinematycznych **P** daje dwojakiego rodzaju sprzężenia z równaniami ruchu obiektu:

- S^P**, **R^P**, **W^P**, **T^P** — są to sprzężenia dynamiczne określające wpływ więzów kinematycznych na przemieszczenia obiektu sztywnego, wirnik nośny, śmigło ogonowe i zespół sprężarko-turbinowy silników;
- P^S**, **P^R**, **P^W**, **P^T** — są to sprzężenia kinematyczne określające wpływ przemieszczeń obiektu sztywnego, wirnika nośnego, śmigła ogonowego i napędu na kinematyczne równania więzów.

Wektor współrzędnych uogólnionych \mathbf{X} w przypadku ogólnym omawianego śmigłowca ma postać

$$\mathbf{x} = \text{col}[\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{w}, \mathbf{t}, \mathbf{p}] = \text{col}[x_g, y_g, z_g, \Phi, \Theta, \Psi, \psi, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \psi_{kL}, \psi_{kP}, \varkappa, \eta, \varphi_g, \varphi_s]. \quad (6)$$

gdzie:

- s — współrzędne uogólnione obiektu sztywnego,
- r — współrzędne uogólnione wirnika nośnego,
- w — współrzędne uogólnione śmigła ogonowego,
- t — współrzędne uogólnione zespołu turbo-sprężarkowego silników,
- p — kąty wychyleń organów sterowania.

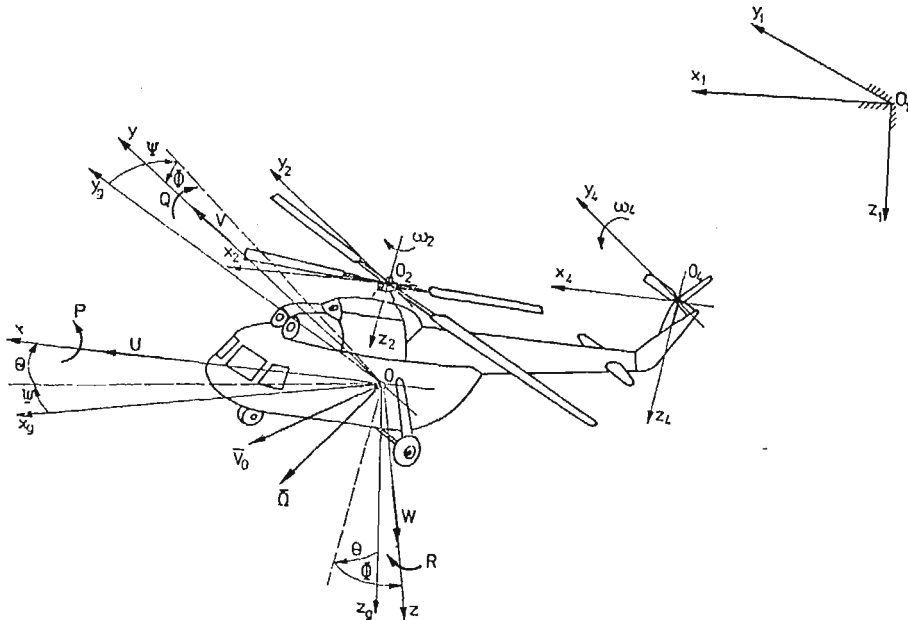
2. Model fizyczny śmigłowca i przyjęte układy odniesienia

Śmigłowiec potraktowano jako złożony układ uruchamiany składający się ze sztywnego kadłuba względem którego poruszają się: części obrotowe silników, wirnik nośny z wałem i układem przenoszenia mocy, przechylenie i obrót łopat wirnika nośnego, piasta śmigła ogonowego z przegubowo połączonymi łopatami oraz statecznik poziomy. Położenie śmigłowca w przestrzeni wyznaczają współrzędne środka masy kadłuba x_g, y_g, z_g w układzie inercyjnym związanym z Ziemią $0x_g, y_g, z_g$ rys. 1 oraz przez kąty samolotowe układu związanego sztywno z kadłubem śmigłowca $0x, y, z$ względem układu inercyjnego: Φ — kąt przechylenia, Θ — pochylenia i Ψ odchylenia a odpowiednie składowe prędkości kątowej $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}, \quad (7)$$

gdzie:

- P — prędkość kątowa przechylenia,
- Q — prędkość kątowa pochylenia,
- R — prędkość kątowa odchylenia.



Rys. 1. Przyjęte układy odniesienia, prędkości liniowe i kątowe oraz ich składowe.

Quasi-prędkości kątowe związane są z prędkościami uogólnionymi następującym związkiem

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \Lambda_\Omega \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

gdzie macierz transformacji Λ_Ω ma postać

$$\Lambda_\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi\cos\Theta \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi\cos\Theta \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Składowe prędkości środka masy kadłuba \bar{V}_c :

$$\bar{V}_c = U\bar{i} + V\bar{j} + W\bar{k} \quad (10)$$

gdzie:

- U — prędkość podłużna,
- V — prędkość ślizgu,
- W — prędkość wznoszenia.

Quasi-prędkości liniowe związane są z prędkościami uogólnionymi następująco

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = A_v \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{bmatrix}, \quad (11)$$

gdzie macierz transformacji:

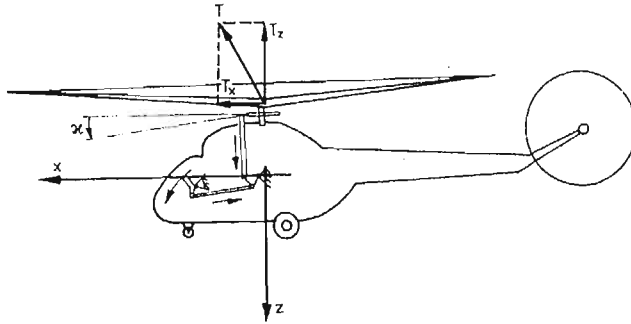
$$A_v = \begin{bmatrix} \cos\Psi\cos\Theta & \sin\Psi\cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Phi\cos\Psi\sin\Theta + & \sin\Phi\sin\Theta\sin\Psi + & \sin\Phi\cos\Theta \\ -\sin\Psi\cos\Phi & +\cos\Phi\cos\Psi & \\ \cos\Phi\cos\Psi\sin\Theta + & \cos\Phi\sin\Theta\sin\Psi + & \cos\Phi\cos\Theta \\ +\sin\Psi\sin\Phi & -\sin\Phi\cos\Psi & \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Przyjęto następujące współrzędne uogólnione wirnika nośnego (6)

- ψ — kąt obrotu piasty wirnika nośnego,
- $\beta_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ — kąt wahań pochyłających łopat wirnika nośnego (wokół przegubu poziomego),
- n — liczba łopat wirnika nośnego,
- $\xi_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ — kąt wahań odchylających łopat wirnika nośnego (wokół przegubu pionowego),
- $\zeta_j (j = 0, 1, \dots, m-1)$ — kąt wahań łopat śmigła ogonowego wokół osi przegubu piasty,
- m — liczba łopat śmigła ogonowego,
- ψ_{kL}, ψ_{kP} — kąty obrotu zespołu turbosprężarkowego silników napędowych lewego i prawego,
- k — liczba turbin i sprężarek silników.

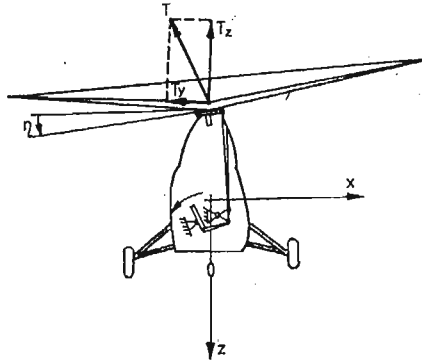
Przyjęto pełne sterowanie śmigłowcem w czterech kanałach: pochylenia, przechylenia, wznoszenia i odchylania zmianą kątów w układach sterowania:

α — kąt pochylenia pierścienia sterującego rys. 2,



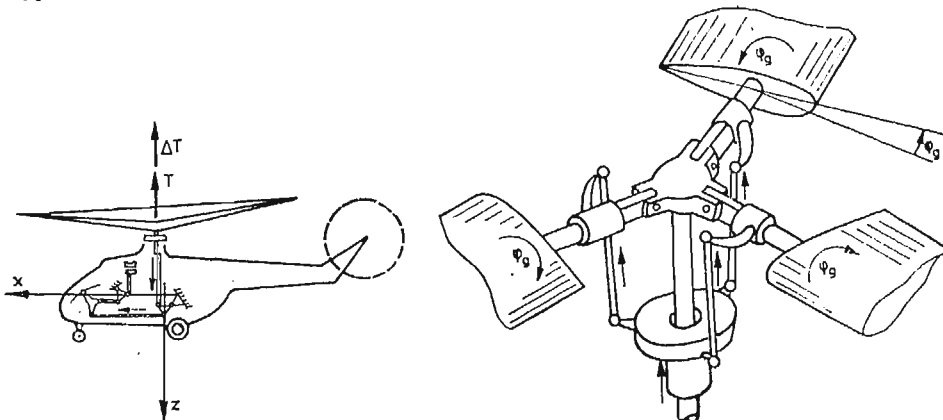
Rys. 2. Sterowanie w kanale pochylenia, przez pochylenie pierścienia sterującego

η — kąt przechylenia pierścienia sterującego rys. 3,



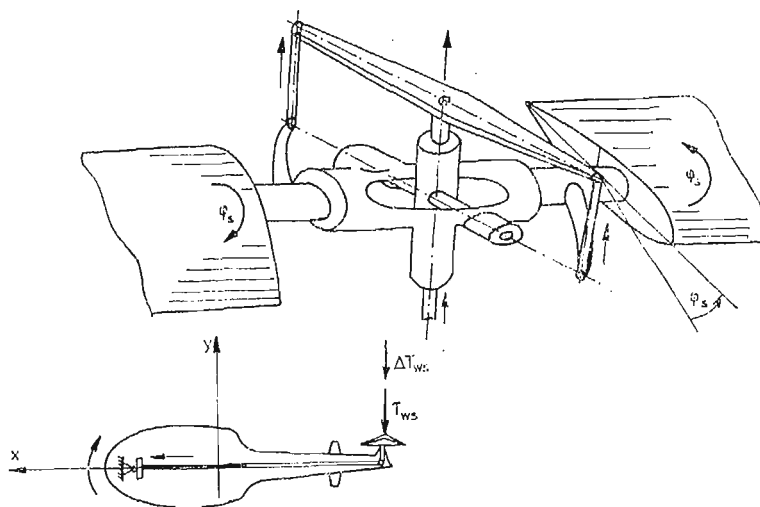
Rys. 3. Sterowanie w kanale przechylenia, przez przechylenie pierścienia sterującego

φ_g — kąt skoku ogólnego łopat wirnika nośnego rys. 4,



Rys. 4. Sterowanie w kanale wysokości, przez zmianę skoku ogólnego łopat wirnika nośnego sprzężonego ze sterowaniem silnikiem

φ_s — kąt skoku łopat śmigła ogonowego rys. 5.



Rys. 5. Sterowanie w kanale odchylenia zmianą skoku śmigła ogonowego

3. Prawa sterowania i związki kinematyczne

Śmigłowiec jako obiekt latający na ogół nie posiada dobrych własności dynamicznych i charakterystyk stateczności [6, 14, 15, 17, 20] na większości etapów lotu należy stosować automatyczne układy podwyższania stateczności lub automatycznego sterowania.

Prawo sterowania w kanale pochylenia rys. 2 przez pochylenie pierścienia sterującego κ :

$$T_1 \dot{\kappa} + \kappa = k_\theta(\theta - \theta_z) + k_q(Q - Q_z) + k_x(x_g - x_{gz}) + k_{\dot{x}}(\dot{x}_g - \dot{x}_{gz}) + \kappa_0. \quad (13)$$

Prawo sterowania w kanale przechylenia rys. 3 przez przechylenie pierścienia sterującego η :

$$T_2 \dot{\eta} + \eta = k_\varphi(\Phi - \Phi_z) + k_p(P - P_z) + k_y(y_g - y_{gz}) + k_{\dot{y}}(\dot{y}_g - \dot{y}_{gz}) + k_{\Psi}(\Psi - \Psi_z) + \eta_0, \quad (14)$$

Prawo sterowania w kanale wysokości rys. 4 przez zmianę skoku ogólnego łopat wirnika nośnego φ_g sprzężonego ze sterowaniem silnikiem „skok-gaz” [17]

$$T_3 \dot{\varphi}_g + \varphi_g = k_z(z_g - z_{gz}) + k_{\dot{z}}(\dot{z}_g - \dot{z}_{gz}) + \varphi_{g0}. \quad (15)$$

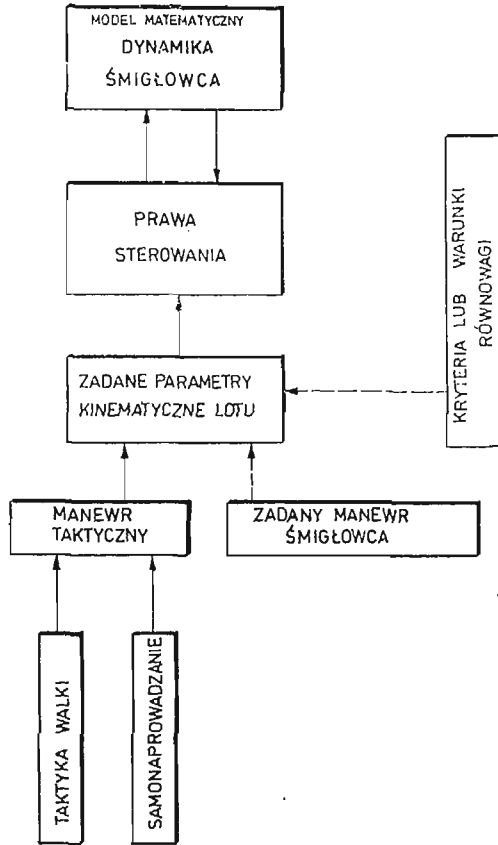
Prawo sterowania w kanale odchylenia rys. 5 zmianą skoku śmigła ogonowego śmigłowca φ :

$$T_4 \dot{\varphi}_s + \varphi_s = k_\psi(\Psi - \Psi_z) + k_r(R - R_z) + \varphi_{s0}. \quad (16)$$

Związki geometryczne zachodzące między parametrami sterowania, wychyleniami, skokiem ogólnym a skokiem śmigła ogonowego podano w [6, 14].

W równaniach (13) ÷ (16) T_1 ÷ T_4 oznaczają stałe czasowe członów inercyjnych, opisujących charakterystyki dynamiczne elementów wykonawczych autopilota [6, 10, 17, 18, 20]

wielkości z indeksem „z” oznaczają zadane wartości parametrów lotu rys. 6. z indeksem „0” przy symbolu kąta sterowania oznacza jego wartość w stanie ustalonym (początkowym). Wybrany stan pracy układu automatycznego sterowania lotem otrzymuje się przez nadanie odpowiednich wartości (w tym zerowych) współczynnikom wzmocnienia.



Rys. 6. Schemat blokowy sprzężeń własności dynamicznych śmigłowca z prawami sterowania i blokiem zadanych parametrów lotu

Na rys. 6 przedstawiono schemat blokowy sprzężeń własności dynamicznych śmigłowca z prawami sterowania i blokiem zadanych parametrów lotu. Zadane parametry kinematyczne i geometryczne lotu mogą być narzucone przez kryteria stateczności, lub warunki równowagi dla ściśle określonego stanu lotu, zadany manewr śmigłowca względnie manewr taktyczny wynikający z przyjętej taktyki walki, pościgu, ucieczki, metody samonaprowadzania na cel.

4. Ogólne równania ruchu śmigłowca sterowanego

Równania ruchu śmigłowca wyprowadzono stosując równania Boltzmann-Hamela dla układów mechanicznych o więzach nieholonomicznych [2, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 19, 20], w postaci

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^l \gamma_{\mu\alpha}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_\mu^* \quad (17)$$

gdzie:

$$\mu = 1, 2, \dots, l,$$

przy czym trójwskaźnikowe symbole Boltzmanna mają postać

$$\gamma_{\mu\alpha}^r = \sum_{\delta=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \left(\frac{\partial a_{r\delta}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial a_{r\lambda}}{\partial q_\delta} \right) b_{\delta\mu} b_{\lambda\alpha}, \quad (18)$$

dla $r = 1, 2, \dots, k$.

Położenie śmigłowca w przestrzeni opisane jest za pomocą $k = 2n + m + 13$ współrzędnych uogólnionych q_1, q_2, \dots, q_k i odpowiadającym im quasi-prędkościom ω_α dla $\alpha = 1, 2, \dots, k$ będących związkami prędkości uogólnionych i funkcji współrzędnych uogólnionych.

Na układ nałożone są więzy kinematyczne niecałkowalne w postaci $l = 2n + m + 9$ równań

$$\sum_{\lambda=1}^k a_{l+\beta, \lambda} \dot{q}_\lambda = 0 \quad (19)$$

dla $\beta = 1, 2, \dots, k-l$ jeżeli więzy mają postać (19) wygodnie jest tak wprowadzić quasi-prędkości aby „ $k-l$ ” ostatnich quasi-prędkości było równych zeru [14],

$$\omega_{l+\beta} = \sum_{\lambda=1}^k a_{l+\beta, \lambda} \dot{q}_\lambda = 0, \quad (20)$$

a „ l ” pierwszych quasi-prędkości spełnia dowolny liniowy układ równań

$$\omega_\mu = \sum_{\lambda=1}^k a_{\mu\lambda} \dot{q}_\lambda \quad (21)$$

dla $\mu = 1, 2, \dots, l$ współczynniki $a_{\sigma\lambda}(\sigma, \lambda = 1, 2, \dots, k)$ są funkcjami współrzędnych uogólnionych (11).

gdzie:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_\Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Równania (17) w liczbie „ l ” wraz z „ $k-l$ ” równaniami więzów (19) i „ l ” równaniami związków kinematycznych (21) stanowią układ „ $k+l$ ” równań, z którego przy zadanych wartościach początkowych można wyznaczyć „ $k+l$ ” niezerowych funkcji czasu: prędkości $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ i współrzędnych q_1, q_2, \dots, q_k .

W równaniach (17) T^* jest energią kinetyczną w quasi-prędkościach otrzymaną przez zastąpienie w energii kinetycznej T prędkości uogólnionych \dot{q}_σ ($\sigma = 1, 2, \dots, k$) przez związki (22)

$$\dot{q}_\sigma = \sum_{\mu=1}^k b_{\sigma\mu} \omega_\mu, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, k) \quad (22)$$

otrzymane z przekształceń (20) i (21). Ponieważ energia kinetyczna T^* jest funkcją „ k ” quasi-prędkości $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k$ zatem związki (20) mogą być wykorzystane po wyprowadzeniu równań (17)

gdzie:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}^{-1}.$$

Do opisu ruchu przyjęto współrzędne uogólnione zgodnie z (6) natomiast jako quasi-prędkości następujące parametry kinematyczne:

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — rzuty wektora prędkości środka masy kadłuba śmigłowca w układzie związanym ze śmigłowcem rys. 1 (10), (11), (12),

$\omega_4, \omega_5, \omega_6$ — rzuty wektora prędkości kątowej kadłuba śmigłowca na osie układu związanego rys. 1 (7), (8), (9),

— przyjęte quasi-prędkości jako równe pochodnym współrzędnych uogólnionych:

$$\omega_7 = \dot{\psi}, \quad (23)$$

$$\omega_{8+i} = \dot{\beta}_i, \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (24)$$

$$\omega_{n+8+i} = \dot{\xi}_i, \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (n = 4) \quad (25)$$

$$\omega_{2n+8+j} = \dot{\zeta}_j, \quad (j = 0, 1, 2) \quad (26)$$

$$\omega_{2n+m+8} = \omega_{19} = \dot{\psi}_{kL}, \quad (m = 3) \quad (27)$$

$$\omega_{2n+m+9} = \omega_{20} = \dot{\psi}_{kP}, \quad (28)$$

— ostatnie cztery quasi-prędkości tak wprowadzono, że zgodnie z (20) na podstawie praw sterowania (13) ÷ (16) traktowanych jako równania więzów były równe zeru.

$$\begin{aligned} \omega_{2n+m+10} = \omega_{21} &= k_\theta(\Theta - \Theta_z) + k_q(Q - Q_z) + k_x(x_g - x_{gz}) + \\ &+ k_{\dot{x}}(\dot{x}_g - \dot{x}_{gz}) - T_1 \dot{\kappa} - \kappa + \kappa_0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \omega_{2n+m+11} = \omega_{22} &= k_\phi(\Phi - \Phi_z) + k_p(P - P_z) + k_y(y_g - y_{gz}) + \\ &+ k_{\dot{y}}(\dot{y}_g - \dot{y}_{gz}) + k_{1\psi}(\Psi - \Psi_z) - T_2 \dot{\eta} - \eta + \eta_0, \end{aligned} \quad (30)$$

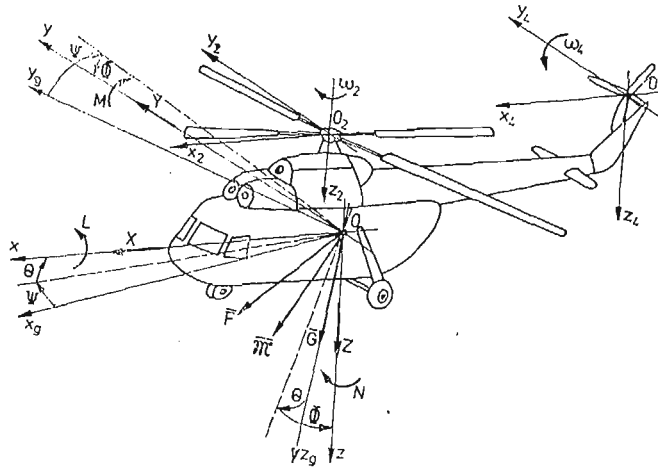
$$\omega_{2n+m+12} = \omega_{23} = k_z(z_g - z_{gz}) + k_{\dot{z}}(\dot{z}_g - \dot{z}_{gz}) - T_3 \dot{\varphi}_g - \varphi_g + \varphi_{g0} \quad (31)$$

$$\omega_{2n+m+13} = \omega_{24} = k_\psi(\Psi - \Psi_z) + k_r(R - R_z) - T_4 \dot{\varphi}_s - \varphi_s + \varphi_{s0}. \quad (32)$$

Po wyznaczeniu niezerowych trójwskaźnikowych symboli Boltzmanna [14] w przyjętym układzie odniesienia rys. 7 otrzymano równania w postaci ogólnej w następującej formie:

— ruchów podłużnych

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial U} \right) &- \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_g} a_{11} + \frac{\partial T^*}{\partial y_g} a_{12} + \frac{\partial T^*}{\partial z_g} a_{13} + \frac{\partial T^*}{\partial \kappa} \frac{k_{\dot{x}}}{T_1} a_{11} + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_{\dot{y}}}{T_2} a_{12} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_g} \frac{k_{\dot{z}}}{T_3} a_{13} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial V} R + \frac{\partial T^*}{\partial W} Q + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left(\frac{k_{\dot{x}}}{T_1} - k_x \right) a_{11} + \\ &+ \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left(\frac{k_{\dot{y}}}{T_2} - k_y \right) a_{12} + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+3}} \left(\frac{k_{\dot{z}}}{T_3} - k_z \right) a_{13} = X_k^g + X_w^g + X_s^g + m_c g a_{13}, \end{aligned} \quad (33)$$



Rys. 7. Siły i momenty sił oraz ich składowe działające na śmigłowiec w przyjętym układzie odniesienia

— ruchów poprzecznych

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial V} \right) - \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_g} a_{21} + \frac{\partial T^*}{\partial y_g} a_{22} + \frac{\partial T^*}{\partial z_g} a_{23} + \frac{\partial T^*}{\partial \kappa} \frac{k_x}{T_1} a_{11} + \right. \\ \left. + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_y}{T_2} a_{22} + \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_g} \frac{k_z}{T_3} a_{23} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial U} R - \frac{\partial T^*}{\partial W} P + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left(\frac{k_x}{T_1} - k_x \right) a_{21} + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left(\frac{k_y}{T_2} - k_y \right) a_{22} + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+3}} \left(\frac{k_z}{T_3} - k_z \right) a_{23} = Y_k^a + Y_w^a + Y_s^a + m_c g a_{23}, \end{aligned} \quad (34)$$

— ruchów pionowych

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial W} \right) - \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_g} a_{31} + \frac{\partial T^*}{\partial y_g} a_{32} + \frac{\partial T^*}{\partial z_g} a_{33} + \frac{\partial T^*}{\partial \kappa} \frac{k_x}{T_1} a_{31} + \right. \\ \left. + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_y}{T_2} a_{32} + \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_g} \frac{k_z}{T_3} a_{33} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial U} Q + \frac{\partial T^*}{\partial V} P + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left(\frac{k_x}{T_1} - k_x \right) a_{31} + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left(\frac{k_y}{T_2} - k_y \right) a_{32} + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+3}} \left(\frac{k_z}{T_3} - k_z \right) a_{33} = Z_k^a + Z_w^a + Z_s^a + m_c g a_{33}, \end{aligned} \quad (35)$$

— ruchów przechyłających

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial P} \right) - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \Phi} + \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \frac{k_p}{T_2} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial V} W + \frac{\partial T^*}{\partial W} V + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial R} Q - \frac{\partial T^*}{\partial Q} P - \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} R k_g - \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left(\frac{k_p}{T_2} - k_p \right) + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} Q k_r = L_k^a + L_w^a + L_s^a + L_w^g + L_{st}^g + L_{st}^g, \end{aligned} \quad (36)$$

— ruchów pochyłających

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial Q} \right) - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \Phi} \sin \Phi \operatorname{tg} \Theta + \frac{\partial T^*}{\partial \Theta} \cos \Phi + \frac{\partial T^*}{\partial \Psi} \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} + \frac{\partial T^*}{\partial \kappa} \frac{k_g}{T_1} \right) + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial U} W - \frac{\partial T^*}{\partial W} U + \frac{\partial T^*}{\partial P} R - \frac{\partial T^*}{\partial R} P + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} \left(\frac{k_g}{T_1} - K_0 \cos \Phi \right) + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} \left(k_p R - k_\varphi \sin \Phi \operatorname{tg} \Theta - k_{1\psi} \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \left(-k_r P + \right. \\ \left. - k_\psi \frac{\sin \Phi}{\sin \Theta} \right) = M_k^a + M_w^a + M_s^a + M_w^g + M_s^g + M_{sil}^g + M_{st}^g, \end{aligned} \quad (37)$$

— ruchów odchyłających

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial R} \right) - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \Phi} \cos \Phi \operatorname{tg} \Theta - \frac{\partial T^*}{\partial \Theta} \sin \Phi + \frac{\partial T^*}{\partial \Psi} \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} + \right. \\ \left. + \frac{\partial T^*}{\partial \varphi_s} \frac{k_r}{T_4} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial V} U - \frac{\partial T^*}{\partial U} V - \frac{\partial T^*}{\partial P} Q + \frac{\partial T^*}{\partial Q} P + \\ + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+1}} (k_q P + k_3 \sin \Phi) + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{l+2}} (-k_p Q - k_\varphi \cos \Phi \operatorname{tg} \Theta) + \\ - k_{1\psi} \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} - \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \left(\frac{k_r}{T_4} - k_\psi \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} \right) = N_k^a + N_w^a + N_s^a + N_w^g + N_s^g + N_{sil}^g + N_{st}^g, \end{aligned} \quad (38)$$

— wirnika nośnego

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_7} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \Psi} = M_{02}^a + M_{02}^g + i_s (M_{04}^g + M_{04}^a) + M_{02}^n \quad (39)$$

— i -tej łopaty wirnika nośnego wokół osi przegubu poziomego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\beta}_i} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \beta_i} M_{hi}^a + M_{hi}^g - C_H \beta_i - k_H \dot{\beta}_i \\ i = 0, 1, \dots, n-1. \\ n = 4 \end{aligned} \quad (40) \div (43)$$

— i -tej łopaty wirnika nośnego wokół osi przegubu pionowego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \xi_i} = M_{0i}^a + M_{0i}^g - C_v \xi_i - k_v \dot{\xi}_i \\ i = 0, 1, \dots, n-1 \\ n = 4 \end{aligned} \quad (44) \div (47)$$

— j -tej łopaty śmigła ogonowego wokół osi przegubu wahań

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\zeta}_j} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \zeta_j} = M_{pj}^a + M_{pj}^g - C_P \zeta_j - k_P \dot{\zeta}_j, \\ j = 0, 1, \dots, m-1. \\ m = 3 \end{aligned} \quad (48) \div (50)$$

— zespołu napędowego silnika lewego turbina + sprężarka

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\psi}_{kL}} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \psi_{kL}} = M_{kL}, \quad (51)$$

— zespołu napędowego silnika prawego turbina + sprężarka

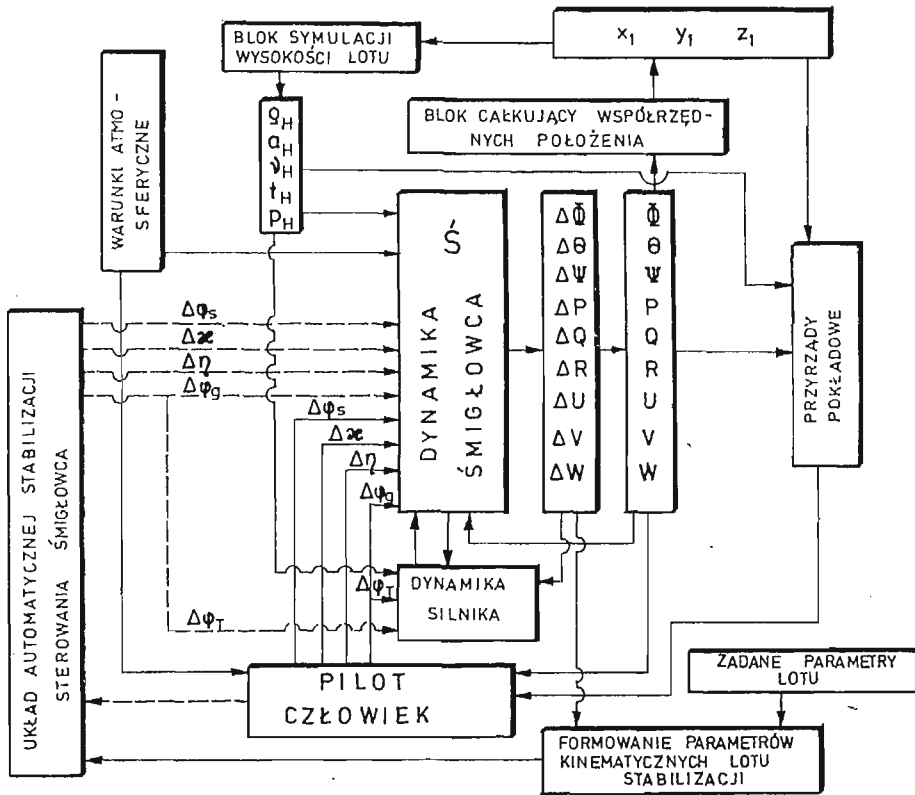
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\psi}_{kP}} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \psi_{kP}} = M_{kP}. \quad (52)$$

W równaniach wprowadzono następujące oznaczenia: T^* — energia kinetyczna układu w quasi-prędkościach, m_c — masa całkowita śmigłowca, momenty sił działające na: N_{02} — wirnik nośny wokół osi $O_2 z_2$, M_{04} — śmigło ogonowe wokół osi $O_4 y_4$, M_{Hi} , M_{vi} — i -tą łopatę wirnika nośnego wokół osi przegubu poziomego i pionowego, M_{pi} — j -tą łopatę śmigła ogonowego wokół osi przegubu wahań, M_{kL} , M_{kP} — turbiny i sprężarki silnika lewego oraz prawego; C_H , C_V , C_P — stałe sprężyn w przegubach: poziomych i pionowych łopat wirnika nośnego oraz śmigła ogonowego; k_H , k_r , k_p — współczynniki tłumienia w przegubach: poziomych i pionowych łopat wirnika nośnego oraz śmigła ogonowego. Indeksy dolne oznaczają: k — kadłub, w — wirnik nośny, s — śmigło ogonowe, sil — silnik, st — statecznik poziomy. Indeksy górne przy siłach i momentach sił: a — aerodynamiczne, g — grawitacyjne i n — napędu.

Równania ruchu (33)÷(52) wraz z czterema równaniami sterowania (13)÷(16), zależnościami określającymi quasi — prędkości (8) i (11) oraz prędkościami uogólnionymi (23)÷(28) stanowią ogólny model matematyczny jednowirnikowego śmigłowca ze śmigłem ogonowym i statecznikiem poziomym przydatny do badań symulacyjnych i symulacji numerycznej śmigłowca sterowanego w dowolnym locie. Zastosowanie przedstawionych równań ruchu wymaga wprowadzenia w poszczególne wyrazy odpowiednich pochodnych energii kinetycznej [14] czynność tą można wykonać na drodze analitycznej lub poprzez bezpośrednią generację numeryczną równań.

W przedstawionych równaniach w formie ogólne uwidacznia się bardzo jasno, że model matematyczny wyprowadzony jako system równań układu mechanicznego z nieholonomicznymi więzami daje pełne sprzężenie równań ruchu (33)÷(52) z prawami automatycznego sterowania (13)÷(16) jako kinematycznymi więzami nałożonymi na układ. W poszczególnych wyrazach równań ruchu widoczne są współczynniki zależne od stałych czasowych T_1 ÷ T_4 współczynników wzmocnienia k_a oraz funkcji współrzędnych uogólnionych $a_{\alpha\lambda}$.

Symulację lotu sterowanego śmigłowca znajdującego się w dowolnym ruchu przestrzennym przedstawiono na schemacie blokowym rys. 8. Schemat zawiera cztery podstawowe bloki: blok dynamiki śmigłowca, blok pilota-człowieka, blok układu automatycznego sterowania i podwyższający stateczność układu oraz blok napędu — dynamika silnika. Na schemacie podane są sprzężenia dynamiczne (Φ , Θ , Ψ , P , Q , R , U , V , W), kinematyczne (x_1 , y_1 , z_1) sygnały sterowania (φ_s , κ , η , $\varphi_g + \varphi_t$) realizowane przez pilota — człowieka lub układ automatycznego sterowania. Podano również drogę informacji oraz ingerencji na własności dynamiczne i decyzyjne zmian parametrów lotu, warunków atmosferycznych i wysokości lotu przedstawiając odpowiednie sprzężenia rys. 8.



Rys. 8. Schemat blokowy dynamiki sterowanego śmigłowca z automatycznym układem sterowania i podwyższenia stabilizacji.

4. Wnioski

Przedstawiony model matematyczny został przetestowany numerycznie na przykładzie śmigłowca klasy $Mi - 6$ [5, 7, 8, 10, 11, 14] a uzyskane wyniki pomimo skomplikowanego układu równań świadczą o właściwym opisie matematycznym przyjętego modelu fizycznego odpowiadającego w pełni własnościom dynamicznym rozważanego śmigłowca. Obliczenia wykonano dla różnych konfiguracji lotu, wyznaczając warunki równowagi [5, 6, 8, 14] i stateczność śmigłowca [5, 6, 7, 8, 14] oraz zawis [5, 6, 14]. Stwierdzono, że uzyskany model matematyczny śmigłowca sprzęgający kinematyczne równania automatycznego sterowania z dynamicznymi równaniami ruchu i włączony jako układ wspomagający pilota zabezpiecza równowagę i stateczność śmigłowca w pełnym zakresie prędkości eksploatacyjnych i zawisie.

Przedstawiony model po modyfikacji można zastosować do symulacji numerycznej automatycznie sterowanych obiektów ruchomych jak samoloty, rakiety szczególnie samonaprowadzane różnych typów jak ziemia—powietrze, powietrze—powietrze i przeciwpancerne. Jak również, przy projektowaniu mikrokomputerowych bloków wykonawczych automatycznego sterowania obiektami jako niezbędny model matematyczny.

Literatura

1. T. R. CROSSLEY, B. PORTER, *Synthesis of Helicopter Stabilization Systems Using Modal Control Theory*, Journal of Aircraft, Vol. 9, No. 1, 1972.
2. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, WNT, Warszawa 1971
3. W. E. HALL, A. E. BRYSON, — „Inclusion of Rotor Dynamics in Controller Design for Helicopters”, Journal of Aircraft, Vol. 10, No. 4, 1973.
4. J. P. DEN, HARTOG *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, New York 1956.
5. K. JANKOWSKI, *Metodyka wyznaczania parametrów ruchu ustalonego śmigłowca na przykładzie lotu poziomego i zawisu*, Mech. Teoret. i Stos., T 23, Zeszyt 3/4, PWN Warszawa 1985
6. K. JANKOWSKI, J. MARYNIAK, *Modelowanie matematyczne automatycznie sterowanego śmigłowca w ruchu przestrzennym*, Mech. Teoret. i Stos., T 23, Zeszyt 3/4 PWN Warszawa 1985
7. K. JANKOWSKI, J. MARYNIAK, *Badanie stateczności ustalonych stanów lotu sterowanego śmigłowca i analiza sprzężeń ruchów przestrzennych jego elementów* — Mech. Teoret. i Stos. T 23 Zeszyt 3/4 PWN Warszawa 1985
8. K. JANKOWSKI, J. MARYNIAK, *Sprzężenie ruchów przestrzennych śmigłowca w prostoliniowym poziomym locie ustalonym*, I Ogólnopolska Konferencja „Mechanika w Lotnictwie”, Warszawa 1984. Mech. Teor. i Stos. T 24, Zeszyt 1/2, PWN Warszawa 1986
9. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, WPW — Mechanika Nr 32, Politechnika Warszawska Warszawa 1975.
10. J. MARYNIAK, K. JANKOWSKI, *Symulacja numeryczna sterowanego śmigłowca jako układu mechanicznego o więzach nieholonomicznych*, II Ogólnopolskie Sympozjum SPD — 2 „Symulacja Procesów Dynamicznych” — Zakopane 1985
11. J. MARYNIAK, K. JANKOWSKI, *Prawa sterowania jako więzy nieholonomiczne automatycznego układu sterowania*, II Ogólnopolska Konferencja „Mechanika w Lotnictwie” — Warszawa 1986
12. MURPHY R. D., NARENDRA K. S., *Design of Helicopter stabilization Systems Using Optimal Control Theory*, Journal of Aircraft, Vol. 6, No. 2, 1969
13. NEJMARK J. I., FUFAJEW N. A., *Dynamika układów nieholonomicznych*, PWN, Warszawa 1971
14. K. JANKOWSKI, *Modelowanie fizyczne i matematyczne własności dynamicznych sterowanego śmigłowca w ruchu przestrzennym*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1992 (niepublikowana)
15. И. С. ДМИТРЕВ, С. Ю. ЕСАУЛОВ, *Системы управления одновинтовых вертолетов*, Машиностроение, Москва 1969.
16. В. В. ДОБРОНРАВОВ, *Основы механики неголономных систем*, Изд. Высшая Школа, Москва 1970.
17. С. Ю. ЕСАУЛОВ, О. П. БАХОВ, И. С. ДИМИТРЕВ, *Вертолет как объект управления*, Машиностроение, Москва 1977.
18. В. А. КОЖЕВНИКОВ, *Автоматическая стабилизация вертолетов*, Машиностроение, Москва 1977.
19. Е. МАРЫНЯК, П. РУБЭЛЕК, М. ЗЛОЦКА, *Применение уравнений Больцманна-Гамеля в исследованиях боковой устойчивости упругого летящего объекта*, Годичник на ВУЗ Приложона математика Т. XI кн. 3, София 1975.
20. Е. МАРЫНЯК, К. ЯНКОВСКИ, *Применение уравнений Больцманна-Гамеля при моделировании динамических свойств управляемого вертолета*, У Национальный Конгресс по Теоретической и Прикладной Механике. Варна 1985.
21. В. Ф. РОМАСЕВИЧ, Г. А. САМОЙЛОВ, *Практическая аэродинамика вертолетов*, Воениздат, Москва 1980.

Резюме

ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ КАК НЕГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЕРТОЛЁТОМ

В статье представлено выведение законов управления как неголономных связей накладываемых на движущийся механический объект. При принятой модели получено очень хорошие резуль-

таты в случае автоматического управления движущихся объектов и автоматической стабилизации. Этот метод может быть принят при автоматическом управлении самолётов, ракет, бомб и промышленных роботов.

S u m m a r y

EQUIVALENCE OF THE CONTROL RULES AND NONHOLONOMIC CONSTRAINS IN AUTOMATIC CONTROL OF HELICOPTER

In the paper we have derived the control rules as nonholonomic constrains acting on the moving mechanical object. The method gives very good results in the following situations: automatic control of the moving objects, automatic increasing of the dynamic stability and automatic control of helicopters. It can be applied in automatic control of airplanes and missiles.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 marca 1986 roku.