

SYNTEZA GROWEGO SYSTEMU NAPROWADZANIA SAMOLOTU NA SAMOLOT-CEL W PŁASZCZYŹNIE PODŁUŻNEJ METODĄ GIER ELEMENTARNYCH

JERZY GAŁAJ
JERZY MARYNIAK

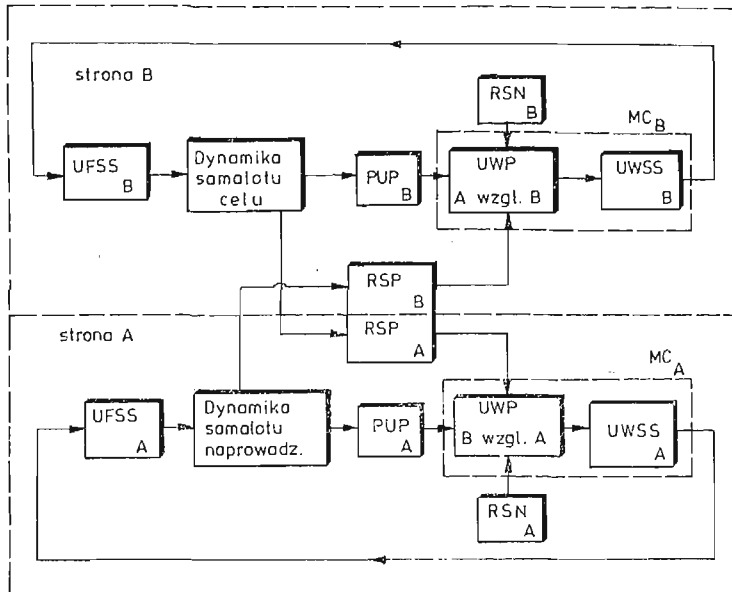
*Institut Techniki Lotniczej
i Mechaniki Stosowanej PW*

W pracy przedstawiono suboptymalne rozwiązanie problemu sterowania growego w procesie naprowadzania samolotu na samolot-cel przy pomocy metody gier elementarnych. Dla przyjętego modelu systemu growego w płaszczyźnie podłużnej podano warunki konieczne istnienia sterowań optymalnych dla obu samolotów graczy. Przeprowadzono symulację cyfrową rozważanego procesu growego w oparciu o zaproponowany algorytm suboptymalnego rozwiązania problemu wykorzystującego dekompozycję danej gry na gry elementarne. Uzyskane wyniki uzasadniają celowość zastosowania wspomnianej metody w przypadku gier pościgowych ze względu na znaczne uproszczenie, w porównaniu z metodami klasycznymi, rozwiązania numerycznego problemu dwugranicznego.

1. Wprowadzenie

Problemy walki powietrznej w kategoriach sterowania growego rozważane były m.in. w pracach [2] i [3]. Stanowią one jedno z nielicznych opracowań z dziedziny zastosowań teorii gier w technice lotniczej. Jednym z istotnych elementów walki powietrznej jest proces naprowadzania samolotu na cel w sensie zbliżenia się do atakowanego obiektu latającego (najczęściej jest nim samolot przeciwnika) na odległość skutecznego rażenia. Proces ten staje się coraz bardziej skomplikowany ze względu na zwiększającą się manewrowość celów powietrznych i skuteczność odpierania przez nie ataków strony przeciwnej. W związku z powyższym celowe staje się ciągłe zwiększanie efektywności pościgu za celem poprzez zapewnienie takiego sterowania ruchem samolotu atakującego, aby nie tylko zbliżyć się do celu na założoną odległość, ale również dokonać tego w minimalnym czasie.

W niniejszej pracy autor proponuje potraktować proces naprowadzania w kategoriach sterowania growego, w którym jedną ze stron jest samolot atakujący (strona *A*), a drugą ze stron jest samolot-cel (strona *B*). Takie podejście zastosowano również w pracach [1 rozdz. 8], [2] i [3]. Ogólny schemat blokowy takiego systemu growego pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Ogólny schemat blokowy systemu growego procesu naprowadzania samolotu na cel. Objasnienia do rysunku: PUP — pokładowe układy pomiarowe; RSP — radiolokacyjne stacje pokładowe; RSN — radiolokacyjne stacje naziemne; UWP — układ wyliczania pozycji względnej; UWSS — układ wyliczania sygnałów sterujących; UFSS — układ formowania sygnałów sterujących

Głównym celem pracy było określenie suboptymalnych strategii dla obu samolotów graczy przy przyjętym modelu matematycznego systemu growego. Aby osiągnąć wspomniany cel przy pomocy maszyny cyfrowej zaproponowano metodę gier elementarnych, która pozwala na znaczne uproszczenie procesu obliczeniowego w stosunku do klasycznych metod optymalizacji stosowanych w tego typu zagadnieniach. Idea metody opiera się na poniżej podanej definicji gry elementarnej i założeniu o suboptymalności sterowań.

Definicja:

Grą elementarną G_k danej N -osobowej dynamicznej gry wieloetapowej G nazywamy taką grę, której przebieg i czasokres odpowiadają k -temu etapowi gry G .

Założenie:

Dla każdej N -osobowej gry pościgowej z addytywnym wskaźnikiem jakości spełniony jest następujący warunek:

$$\sum_{k=1}^K \min_{u_k^1 \dots u_k^N} J_k^i - \min_{u^1 \dots u^N} J^i \leq \delta, \quad i = 1, \dots, N$$

gdzie:

δ — założona maksymalna wartość różnicy między sumą suboptymalnych wskaźników jakości dla poszczególnych gier elementarnych a optymalnym wskaźnikiem jakości dla całej gry,

J_k^i — wartość wskaźnika jakości i -tego gracza odpowiadająca k -tej grze elementarnej,

J^i — wartość wskaźnika jakości i -tego gracza dla całej gry.

W pierwszej części pracy podano założenia oraz model ruchu podłużnego dwóch samolotów we względny układzie odniesienia związanym z samolotem atakującym. W dalszej części pracy sformułowano problem optymalizacji dla danego modelu gry pościgowej i w oparciu o zasadę maksimum Pontriagina podano zestaw równań określających warunki konieczne istnienia sterowań optymalnych dla obu samolotów-graczy. W następnym rozdziale ciągle model systemu growego przedstawiono w postaci dyskretnej oraz podano algorytm suboptymalnego rozwiązania gry pościgowej dla danego procesu naprowadzania oparty na metodzie gier elementarnych. Wyniki badań symulacyjnych przedstawiono w postaci przebiegów funkcji odległości między samolotami oraz trajektorii pościgowych na płaszczyźnie (x, z) odpowiadających różnym parametrom modelu growego.

Na podstawie otrzymanych rezultatów sformułowano szereg wniosków, które uzasadniają celowość zastosowania zaproponowanej metody w tego typu zagadnieniach.

2. Założenia i model systemu growego

Rozważmy proces naprowadzania samolotu na samolot-cel potraktowany jako klasyczny przykład gry pościgowej, w której celem ma być osiągnięcie uprzednio zadanej odległości między samolotami (np. promienia skutecznego rażenia R_z). Proces sterowany obejmuje tutaj zarówno sterowanie ruchem samolotu naprowadzanego jak i samolotu-celu. Aby określić model matematyczny procesu growego przyjęto następujące założenia wstępne:

1. Samoloty potraktowano jako ciała sztywne poruszające się w przestrzeni inercjalnej.
2. Ruch samolotów odbywa się tylko w płaszczyźnie podłużnej.
3. Prędkości obu samolotów przyjęto jako stałe równe odpowiednio v_n dla samolotu naprowadzonego i v_c dla samolotu-celu.
4. Pominięto zmiany kąta natarcia obu samolotów ($\dot{\alpha} = 0$).
5. Sterowanie ruchem podłużnym samolotów realizowane jest tylko za pośrednictwem wychyleń sterów wysokości.
6. Oś obrotu samolotu jest jego główną osią bezwładności.
7. W ruchu pochylającym uwzględniono jedynie momenty sterujące i momenty tłumiące.
8. Moment pochylający pochodzący od sił aerodynamicznych na sterze wysokości jest proporcjonalny do wychylenia powierzchni sterowej, przy czym współczynnik proporcjonalności zachowuje stałą wartość podczas procesu growego (współczynniki aerodynamiczne momentów oraz własności geometryczne i masowe samolotów pozostają niezmiennie podczas gry).

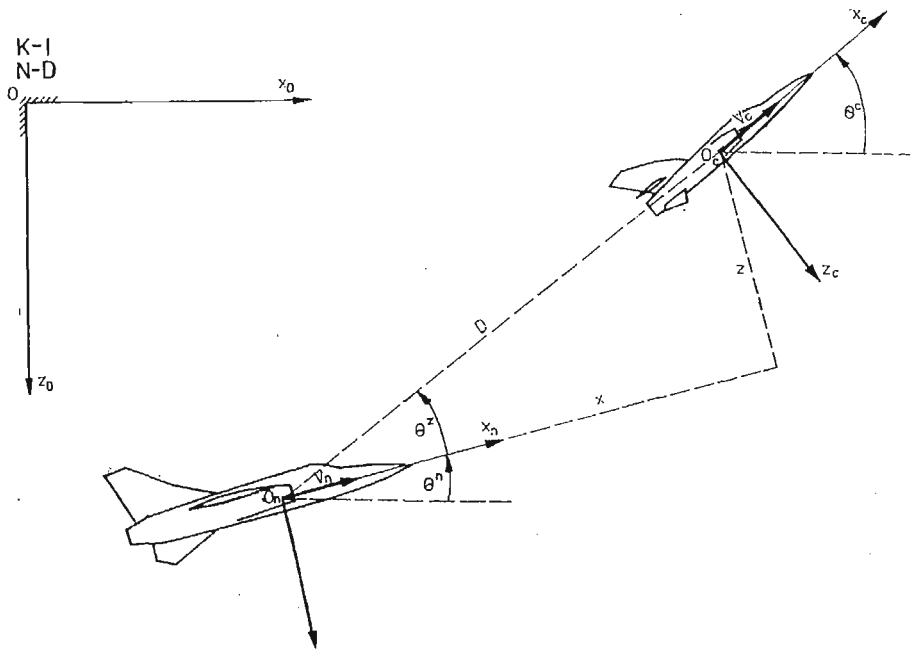
Równania ruchu podłużnego samolotów w inercjalnym układzie odniesienia $Ox_0y_0z_0$ związanym z pewnym wyróżnionym punktem na kuli ziemskiej mają postać (ze względu na niewielki obszar działania nie uwzględniono kulistości Ziemi):

samolot naprowadzany strona A	samolot-cel strona B
$\dot{x}_n = v_n \cos \Theta_n$	$\dot{x}_c = v_c \cos \Theta_c$
$\dot{z}_n = -v_n \sin \Theta_n$	$\dot{z}_c = -v_c \sin \Theta_c$
$\ddot{\Theta}_n = k_n^\delta u_n - k_n^\omega \dot{\Theta}_n$	$\ddot{\Theta}_c = k_c^\delta u_c - k_c^\omega \dot{\Theta}_c$

(1)

gdzie:

- x_n, z_n — współrzędne położenia ś.c. samolotu naprowadzanego w układzie $0x_0y_0z_0$,
 x_c, z_c — współrzędne ś.c. samolotu-celu w układzie $0x_0y_0z_0$
 Θ_n, Θ_c — kąt toru lotu odpowiednio samolotu naprowadzanego i samolotu-celu,
 k_n^d, k_c^d — współczynniki efektywności sterowania odpowiednio samolotu naprowadzanego i samolotu-celu,
 k_n^w, k_c^w — współczynniki tłumienia aerodynamicznego odpowiednio samolotu naprowadzanego i samolotu-celu,
 u_n, u_c — wychylenia sterów wysokości odpowiednio samolotu naprowadzanego i samolotu-celu.



Rys. 2. Względny układ współrzędnych związany z samolotem naprowadzanym

W celu zredukowania liczby równań w modelu (1) wprowadzono względny układ współrzędnych $0xyz$ związany z wektorem prędkości samolotu atakującego (patrz rys. 2). W układzie przedstawionym na rysunku 2 równania (1) przyjmą następującą postać (założono, że początkowe wartości prędkości kątowych pochylania obu samolotów są równe zero, a więc $\dot{\Theta}_0^n = \dot{\Theta}_0^c = 0$)

$$\dot{x}(t) = -v_n + v_c \cos(\Theta_c(t) - \Theta_n(t)) - z(t) \left[k_n^d \int_0^t u_n(t) dt + k_n^w (\Theta_n(t) - \Theta_0^n) \right],$$

$$\begin{aligned}
 z(t) &= -v_c \sin(\Theta_c(t) - \Theta_n(t)) + x(t) \left[k_n^\delta \int_0^t u_n(t) dt + \right. \\
 &\quad \left. - k_n^\omega (\Theta_n(t) - \Theta_0^n) \right], \\
 \dot{\Theta}_n(t) &= k_n^\delta \int_0^t u_n(t) dt - k_n^\omega (\Theta_n(t) - \Theta_0^n), \\
 \dot{\Theta}_c(t) &= k_c^\delta \int_0^t u_c(t) dt - k_c^\omega (\Theta_c(t) - \Theta_0^c).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Model (2) posiada postać równań stanu, dla którego wektor stanu i wektor sterowań mają postać:

$$\mathbf{x} = (x, z, \Theta_n, \Theta_c); \quad \mathbf{u} = (u_n, u_c). \tag{3}$$

Celem sterowania growego jest osiągnięcie odległości między samolotami równej zadnemu promieniowi skutecznego rażenia R_z , czyli:

$$A = \{\mathbf{x}: x^2 + z^2 \leq R_z^2\},$$

a jego brzeg stanowi okrąg o promieniu R_z i środku związanym ze ś.c. samolotu naprowadzanego.

Jako kryterium jakości sterowania growego przyjęto minimalizację czasu potrzebnego na osiągnięcie powierzchni docelowej ∂A , czyli

$$J_n = \min_{u_n} \max_{u_c} \int_0^T dt; \quad J_c = \max_{u_c} \min_{u_n} \int_0^T dt \tag{4}$$

Jeżeli proces growy posiada punkt siodłowy, to wartość gry będzie równa wartości wskaźnika jakości odpowiadającej optymalnym strategiom obu samolotów-graczy $\hat{u}_n = \hat{y}_n(\mathbf{x}, t)$ i $\hat{u}_c = \hat{y}_c(\mathbf{x}, t)$

Ograniczenia na zmienne sterujące wynikają z ograniczonych wychyleń powierzchni sterowych i przy założeniu symetrii ich ruchów mogą być zapisane w postaci:

$$|u_n| \leq u_{n \max}; \quad |u_c| \leq u_{c \max}, \tag{5}$$

gdzie:

$u_{n \max}, u_{c \max}$ — maksymalne wychylenie steru wysokości odpowiednio dla samolotu naprowadzanego i samolotu-celu

3. Optymalizacja procesu growego

Dla sformułowanego w poprzednim rozdziale problemu optymalizacji gry pościgowej funkcja Hamiltonianu będzie miała postać [4]:

$$\begin{aligned}
 H &= p_1(t) \left[-v_n + v_c \cos(\Theta_c(t) - \Theta_n(t)) - z(t) \left(k_n^\delta \int_0^t u_n(t) dt + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - k_n^\omega (\Theta_n(t) - \Theta_0^n) \right) \right] + p_2(t) \left[-v_c \sin(\Theta_c(t) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Theta_n(t)) + x(t) \left[k_n^\delta \int_0^t u_n(t) dt - k_n^\omega (\Theta_n(t) + \right. \\
& \left. - \Theta_0^n) \right] + p_3(t) \left[k_n^\delta \int_0^t u_n(t) dt - k_n^\omega (\Theta_n(t) - \Theta_0^n) \right] + \\
& + p_4(t) \left[k_c^\delta \int_0^t u_c(t) dt - k_c^\omega (\Theta_c(t) - \Theta_0^c) \right] + 1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Po odpowiednim przekształceniu Hamiltonianu (6) otrzymano:

$$\begin{aligned}
H = & H_p(x, p) + k_n^\delta \int_0^t u_n(t) (p_2(t)x(t) - p_1(t)z(t) + p_3(t)) dt + \\
& + k_c^\delta p_4(t) \int_0^t u_c(t) dt,
\end{aligned} \tag{7}$$

gdzie

$H_p(x, p)$ — część Hamiltonianu niezależna od wektora sterującego u

$p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ — wektor sprzężonych zmiennych stanu.

Z zasady maksimum Pontriagina, ograniczeń (5) oraz postaci Hamiltonianu (7) wynika, że na podstawie tw. 2 [1, str. 349] sterowania optymalne (jeżeli istnieją) będą miały postać:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_n &= u_{n \max} \operatorname{sgn}(p_1(t)z(t) - p_2(t)x(t) - p_3(t)), \\
\hat{u}_c &= u_{c \max} \operatorname{sgn} p_4(t).
\end{aligned} \tag{8}$$

Równania sprzężone i warunki brzegowe dla rozważanego problemu gromowego przyjmą postać: [4]

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1(t) &= -p_2(t) k_n^\delta \int_0^t u_n(t) dt + p_2(t) [k_n^\omega (\Theta_n(t) - \Theta_0^n)], \\
\dot{p}_2(t) &= p_1(t) k_n^\delta \int_0^t u_n(t) dt - p_1(t) [k_n^\omega (\Theta_n(t) - \Theta_0^n)], \\
\dot{p}_3(t) &= -v_c [p_1(t) \sin(\Theta_c(t) - \Theta_n(t)) + p_2(t) \cos(\Theta_c(t) - \Theta_n(t))] + \\
& - p_1(t) z(t) k_n^\omega + x(t) p_2(t) k_n^\omega + p_3(t) k_n^\omega, \\
\dot{p}_4(t) &= v_c [p_1(t) \sin(\Theta_c(t) - \Theta_n(t)) + p_2(t) \cos(\Theta_c(t) + \\
& - \Theta_n(t))] + p_4(t) k_c^\omega, \\
x(0) &= x_0; \quad p_1(T) = 2dx(T), \\
z(0) &= z_0; \quad p_2(T) = 2dz(T), \\
\Theta_n(0) &= \Theta_0^n; \quad p_3(T) = p_4(T) = 0, \\
\Theta_c(0) &= \Theta_0^c; \quad H(p(T), \hat{x}(T), \hat{u}_n(T), \hat{u}_c(T), d) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

gdzie:

d — zmienna pomocnicza

W procesie sterowania growego założono, że wszystkie zmienne stanu są mierzalne (pośrednio lub bezpośrednio) bez zakłóceń oraz sterowanie przekaźnikowe typu (8) jest realizowalne.

4. Rozwiązanie numeryczne problemu growego metodą gier elementarnych

Ciągły model procesu naprowadzania samolotu na samolot-cel w płaszczyźnie podłużnej (2), (8), (9) sprowadzono do postaci dyskretnej ($dt \rightarrow \Delta t$). Model dyskretny opisany jest następującymi zależnościami:

$$\text{równania stanu} \begin{cases} x_k = x_{k-1} + \Delta t f_{k-1}^1(\cdot) \\ z_k = z_{k-1} + \Delta t f_{k-1}^2(\cdot) \\ \Theta_k^n = \Theta_{k-1}^n + \Delta t f_{k-1}^3(\cdot) \\ \Theta_k^c = \Theta_{k-1}^c + \Delta t f_{k-1}^4(\cdot) \end{cases} \quad k = 1, \dots, K \quad (10.1)$$

$$\text{równania sprzężone} \{p_{i,k-1} = p_{i,k} + \Delta t h_k^i(\cdot) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (10.2)$$

$$\text{warunki brzegowe} \begin{cases} x(0) = x_0 & p_{1,K} = 2dx_K \\ z(0) = z_0 & p_{2,K} = 2dz_K \\ \Theta_n(0) = \Theta_0^n & p_{3,K} = p_{4,K} = 0 \\ \Theta_c(0) = \Theta_0^c & p_{1,K} f_K^1(\cdot) + p_{2,K} f_K^2(\cdot) + \\ & + p_{3,K} f_K^3(\cdot) + p_{4,K} f_K^4(\cdot) + 1 = 0 \end{cases} \quad (10.3)$$

$$\text{sterowania optymalne} \begin{cases} \hat{u}_k^n = u_{nmax} \operatorname{sgn}(p_{1,k-1} z_{k-1} - p_{2,k-1} x_{k-1} - p_{3,k-1}) \\ \hat{u}_k^c = u_{cmax} \operatorname{sgn} p_{4,k-1} \end{cases} \quad (10.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_{k-1}^1(\cdot) &= -v_n + v_c \cos(\Theta_{k-1}^n - \Theta_{k-1}^c) - k_n^\delta z_{k-1} \Delta t \sum_{i=1}^k u_{i-1}^n + \\ &+ k_n^\omega z_{k-1} (\Theta_{k-1}^n - \Theta_0^n), \\ f_{k-1}^2(\cdot) &= -v_c \sin(\Theta_{k-1}^n - \Theta_{k-1}^c) + k_n^\delta x_{k-1} \Delta t \sum_{i=1}^k u_{i-1}^n + \\ &- k_n^\omega x_{k-1} (\Theta_{k-1}^n - \Theta_0^n), \\ f_{k-1}^3(\cdot) &= k_n^\delta \Delta t \sum_{i=1}^k u_{i-1}^n - k_n^\omega (\Theta_{k-1}^n - \Theta_0^n), \\ f_{k-1}^4(\cdot) &= k_c^\delta \Delta t \sum_{i=1}^k u_{i-1}^c - k_c^\omega (\Theta_{k-1}^c - \Theta_0^c), \\ h_k^1(\cdot) &= p_{2,k} k_n^\delta \Delta t \sum_{i=1}^k u_i^n - p_{2,k} k_n^\omega (\Theta_k^n - \Theta_0^n), \\ h_k^2(\cdot) &= -p_{1,k} k_n^\delta \Delta t \sum_{i=1}^k u_i^n + p_{1,k} k_n^\omega (\Theta_k^n - \Theta_0^n), \\ h_k^3(\cdot) &= v_c [p_{1,k} \sin(\Theta_k^c - \Theta_k^n) + p_{2,k} \cos(\Theta_k^c - \Theta_k^n)] + k_n^\omega (z_k p_{1,k} + \\ &- x_k p_{2,k} - p_{3,k}), \\ h_k^4(\cdot) &= -v_c [p_{1,k} \sin(\Theta_k^c - \Theta_k^n) + p_{2,k} \cos(\Theta_k^c - \Theta_k^n)] - k_c^\omega p_{4,k}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

Δt — stały krok dyskretyzacji modelu ciągłego.

Zbiór zależności (10) sprowadza się do znanego problemu dwugranicznego, który może być rozwiązany przy pomocy jednej z klasycznych metod iteracyjnych [4] (metoda najszybszego spadku, quasilinearizacji itp.). Wspomniane metody wymagają jednak bardzo dużego nakładu obliczeń i nie zawsze dają pozytywne rezultaty (rozbieżność procesu iteracyjnego, niewłaściwy dobór warunków startowych procedury itp.).

W celu znacznego uproszczenia rozwiązania numerycznego problemu dwugranicznego występującego w rozważanej klasie problemów growych, zaproponowano metodę gier elementarnych. Zgodnie z definicją gry elementarnej, podaną na początku pracy, proces growy traktujemy jako uporządkowany ciąg gier, których czas trwania każdej z nich odpowiada pojedynczemu krokowi dyskretyzacji Δt lub jego wielokrotności, czyli $\Delta t_{ge} = L\Delta t$. Czas trwania gry T , przyjęty jako globalny wskaźnik jakości dla rozważanej gry pościgowej, poddano odpowiedniej modyfikacji przyjmując w proponowanej metodzie równoważny mu wskaźnik k -tej gry elementarnej J_k w postaci:

$$J_k(x(T_k)) = \sqrt{x_k^2 + z_k^2}, \quad k = 1, \dots, K \quad (11)$$

Powyższy wskaźnik reprezentuje funkcję kosztu końcowego, która określa odległość samolotu naprowadzanego od samolotu-celu w końcu k -tej gry elementarnej. Warunki brzegowe dla k -tej gry elementarnej przyjmują postać:

$$\begin{aligned} x(T_{k-1}) &= x_{k-1}; & p_1(T_k) &= \frac{x_k}{D_k}, \\ z(T_{k-1}) &= z_{k-1}; \\ \Theta_n(T_{k-1}) &= \Theta_{k-1}^n; & p_2(T_k) &= \frac{z_k}{D_k}, \\ \Theta_c(T_{k-1}) &= \Theta_{k-1}^c; & p_3(T_k) &= p_4(T_k) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie: $k = 1, \dots, K$, $T_k = k\Delta t_{ge}$, $D_k = \sqrt{x^2 + z^2}$

Pozostałe równania modelu growego (10) pozostają bez zmian. Poniżej podano opis algorytmu, który posłużył m.in. do wyznaczenia sterowań suboptymalnych i odpowiadających im trajektorii pościgowych metodą gier elementarnych.

Opis algorytmu (dla $\Delta t_{ge} = \Delta t$):

1. Podstawienie $k = 1$ oraz $it = 1$.
2. Wczytanie kroku dyskretyzacji Δt , maksymalnego czasu trwania gry T_{max} oraz skutecznego promienia rażenia R_z .
3. Wczytanie początkowych wartości zmiennych stanu $x_{k-1} = x_0$, $z_{k-1} = z_0$, $\Theta_{k-1}^n = \Theta_0^n$, $\Theta_{k-1}^c = \Theta_0^c$ oraz założonych wartości zmiennych sterujących $u_k^n = u_1^n$ i $u_k^c = u_1^c$.
4. Obliczenie wartości zmiennych stanu x_k , z_k , Θ_k^n i Θ_k^c na końcu k -tej gry elementarnej (wg. 10.1).
5. Obliczenie aktualnego czasu trwania procesu growego $t = k\Delta t_{ge}$.
6. Sprawdzenie czy $D_k = \sqrt{x_k^2 + z_k^2} < R_z$ lub $t > T_{max}$? Jeżeli tak to skok do pktu 11. Jeżeli nie to przejście do następnego etapu.
7. Obliczenie wektora stanu sprzężonego p_k na końcu k -tej gry elementarnej wg (12).
8. Obliczenie wektora stanu sprzężonego p_{k-1} na początku k -tej gry elementarnej wg (10.2).
9. Obliczenie suboptymalnych sterowań \tilde{u}_k^n i \tilde{u}_k^c zgodnie z (10.4)
10. Sprawdzenie czy $u_k^n = \tilde{u}_k^n$ i $u_k^c = \tilde{u}_k^c$

Jeżeli nie to:

- $u_k^n = \tilde{u}_k^n$ i $u_k^c = \tilde{u}_k^c$
- $it = it + 1$
- powrót do pktu 4.

Jeżeli tak to:

- wydruk wartości $x_k, z_k, \theta_k^n, \theta_k^c$
 $D_k, \tilde{u}_k^c, \tilde{u}_k^n$
- $k = k + 1, it = 1$
- powrót do pktu 4.

11. Zakończenie eksperymentu symulacyjnego.

Podczas badań symulacyjnych przeanalizowano proces naprowadzania growego dla różnych wartości stosunku prędkości samolotów $\beta = v_n/v_c$ ($v_n = 300$ m/s) początkowych wartości względnego kąta toru $\theta_0 = \theta_0^c - \theta_0^n$ ($\theta_0^n = 0$) oraz czasów trwania gry elementarnej Δt_{ge}

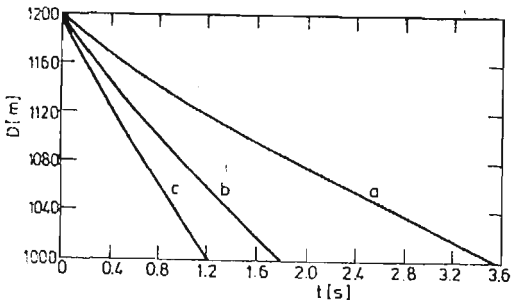
Przyjęto następujące warunki początkowe:

- dla zmiennego β i Δt_{ge} : $x_0 = 1200$ m, $z_0 = -100$ m, $\theta_0^c = -\pi/4$, $\theta_0^n = 0$.
- dla zmiennego θ_0 : $x_0 = 1200$ m, $z_0 = 100$ m, $\theta_0^n = 0$.

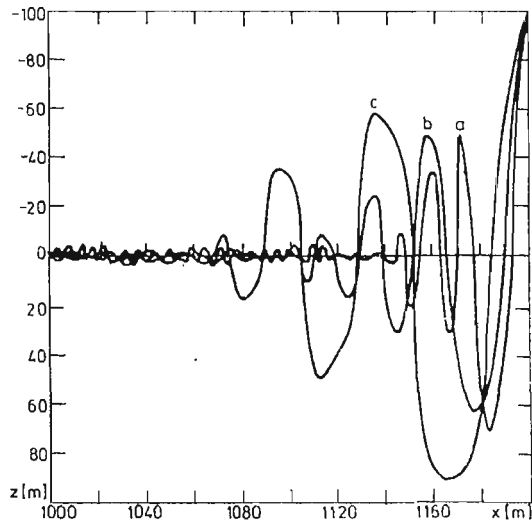
We wszystkich przypadkach przyjęto ten sam zbiór celu $\Delta = \{x: x^2 + z^2 \leq 1000 \text{ m}\}$ tę samą wartość maksymalnego wychylenia steru wysokości $u_{nmax} = u_{cmax} = 0.5$ rd oraz tę samą zależność na współczynniki efektywności sterowania i tłumienia aerodynamicznego wg [5]. Na rysunkach 3÷6 przedstawiono wybrane trajektorie pościgowe oraz przebiegi funkcji odległości między samolotami uzyskane w wyniku eksperymentów symulacyjnych. Otrzymane wyniki pozwoliły na sformułowanie szeregu wniosków, z których najważniejsze zostały wymienione poniżej:

1. Wnioski dla zmiennego β ($\beta = 1,2; 1,5; 2$);

- trajektorie pościgowe na płaszczyźnie (x, z) charakteryzują się nieregularnymi oscylacjami wokół osi x , których częstotliwość i tłumienie maleją wraz ze wzrostem β ,
- odchylenie trajektorii od osi x nie przekracza wartości $|\Delta z| = 6$ m po czasie t równym: 0,75 s dla $\beta = 1,2$; 0,8 s dla $\beta = 1,5$ i 0,76 s dla $\beta = 2$,

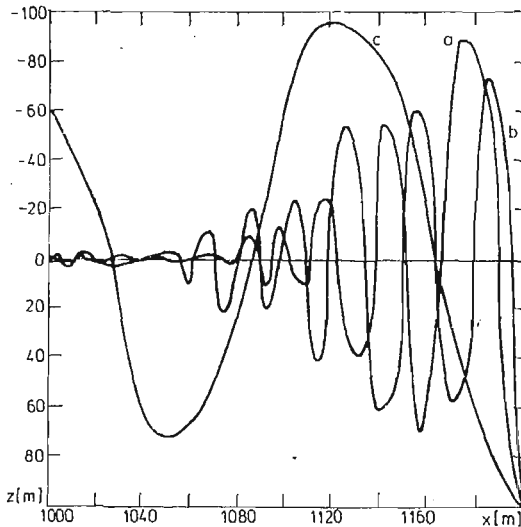


Rys. 3. Przebieg funkcji odległości między samolotami $D(t)$ dla różnych wartości: a) $\beta = 1,2$; b) $\beta = 1,5$; c) $\beta = 2$



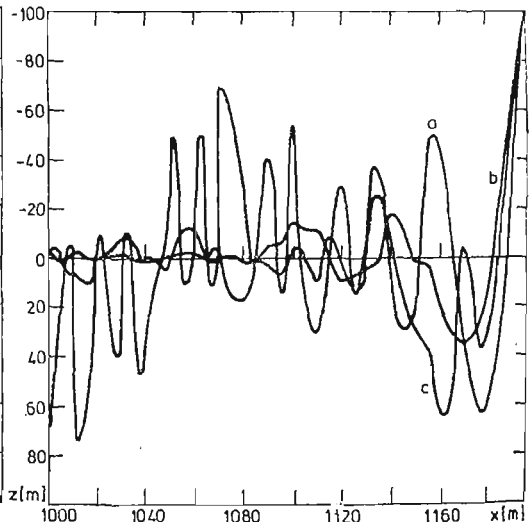
Rys. 4. Suboptymalne trajektorie pościgowe na płaszczyźnie (x, z) dla różnych wartości: a) $\beta = 1,2$; b) $\beta = 1,5$; c) $\beta = 2$

- c) czas osiągnięcia celu gry T maleje wraz ze wzrostem β i wynosi odpowiednio: 3,25 s dla $\beta = 1,2$; 1,77 s dla $\beta = 1,5$ i 1,21 s dla $\beta = 2$,
- d) za wyjątkiem początkowej fazy gry odległość między samolotami zmienia się w sposób liniowy a szybkość jej zmian jest tym większa im większa jest wartość β , i tak:
 $\dot{D}(t) = 50$ m/s dla $\beta = 1,2$; $\dot{D}(t) = 100$ m/s dla $\beta = 1,5$ i $\dot{D}(t) = 180$ m/s dla $\beta = 2$.
2. Wnioski dla zmiennego $\Theta_0 \left(\Theta_0 = -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{3\pi}{4} \right)$;
- a) częstotliwość oscylacji trajektorii pościgowych wokół osi x zależy od wartości początkowej względnego kąta toru i jest tym większa im mniejsze jest jego odchylenie od początkowej wartości względnego kąta położenia celu Θ_0^z gdzie $\Theta_0^z = \arctg(-z_0/x_0)$,
- b) czas osiągnięcia celu T jest tym większy im mniejsze jest początkowe odchylenie $\Delta\Theta_0 = \Theta_0 - \Theta_0^z$ wartości względnego kąta toru od kierunku optymalnej ucieczki wyznaczonego przez kąt Θ_0^z , i tak: dla $\Delta\Theta_0 = 2,439$ ($\Theta_0 = 3\pi/4$) $T = 0,52$ s; dla $\Delta\Theta_0 = 0,702$ ($\Theta_0 = -\pi/4$) $T = 1,86$ s i dla $\Delta\Theta_0 = 0,083$ ($\Theta_0 = 0$) $T = 2,05$ s,
- c) odległość między samolotami w procesie naprowadzania zmienia się w przybliżeniu w sposób liniowy (największe odchylenie od liniowości ma miejsce w przypadku $\Theta_0 = 3\pi/4$), a szybkość tych zmian jest zależna od wartości $\Delta\Theta_0$, i tak: dla $\Delta\Theta_0 = 2,439$ $\dot{D}(t) = 400$ m/s; dla $\Delta\Theta_0 = 0,702$ $\dot{D}(t) = 120$ m/s i dla $\Delta\Theta_0 = 0,083$ $\dot{D}(t) = 100$ m/s.
3. Wnioski dla zmiennego Δt_{ge} ($\Delta t_{ge} = 0,01$ s, 0,03 s, 0,06 s i 0,1 s);
- a) wraz ze wzrostem długości przedziału gry elementarnej wzrasta amplituda nieregularnych oscylacji trajektorii pościgowych wokół osi x , co jest równoznaczne ze wzrostem odchylenia celu od linii celowania w momencie osiągnięcia odległości R_z ,



Rys. 5. Suboptymalne trajektorie pościgowe na płaszczyźnie (x, z) dla różnych wartości Θ_0 :

a) $\Theta_0 = -\pi/4$ b) $\Theta_0 = 0$ c) $\Theta_0 = 3\pi/4$



Rys. 6. Suboptymalne trajektorie pościgowe na płaszczyźnie (x, z) różnych wartości Δt_{ge} :

a) $\Delta t_{ge} = 0,01$ s; b) $\Delta t_{ge} = 0,03$ s; c) $\Delta t_{ge} = 0,06$ s

- b) jednoznaczne zwiększenie Δt_{ge} w procesie sterowania obu stron, „pomaga” samolotowi atakującemu w szybszym osiągnięciu skutecznego promienia rażenia kosztem naprowadzania celu na linię celowania, i tak: dla $\Delta t_{ge} = 0,01$ s $T = 1,77$ s; dla $\Delta t_{ge} = 0,03$ s $T = 1,73$ s; dla $\Delta t_{ge} = 0,06$ s $T = 1,7$ s i dla $\Delta t_{ge} = 0,1$ s $T = 1,69$ s,
- c) przy wzroście Δt_{ge} wzrasta szybkość wzajemnego zbliżania się obu samolotów w pierwszej fazie gry ($0 < t < 0,6$ s), po czym jest ona w przybliżeniu jednakowa (równa około 100 m/s dla rozważanego przypadku) dla wszystkich analizowanych wartości Δt_{ge} .

5. Uwagi i wnioski końcowe

Na podstawie przeprowadzonych badań symulacyjnych procesu naprowadzania przy wykorzystaniu metody gier elementarnych można stwierdzić, że:

1. Suboptymalne trajektorie pościgowe na płaszczyźnie (x, z) charakteryzują się nieregularnymi tłumionymi oscylacjami wokół osi x , których okres, amplituda i tłumienie zależą m.in. od:
 - a) stosunku prędkości obu samolotów β ,
 - b) wartości początkowej względnego kąta toru θ_0 ,
 - c) wartości początkowej różnicy $\Delta\theta_0$ między kątem θ_0 a kątem θ_0^* określającym położenie samolotu-celu względem samolotu atakującego,
 - d) długości przedziału gry elementarnej.
2. Odległość między samolotami we wszystkich rozważanych przypadkach zmienia się w czasie w przybliżeniu w sposób liniowy, przy czym szybkość jej zmian jest zależna od stosunku prędkości β i wartości początkowej względnego kąta toru θ_0 .
3. Stosunek prędkości samolotów β i względny kąt toru θ_0 mają istotny wpływ na czas trwania procesu growego T .
4. Przełączanie suboptymalnych funkcji sterujących zachodzi w następujących momentach:
 - a) w przypadku sterowania u_n (samolot naprowadzany) podczas przejścia trajektorii pościgowej przez oś x ,
 - b) w przypadku sterowania u_c podczas przejścia funkcji $\Delta\theta(t)$ (odchylenie względnego kąta toru $\theta(t)$ od kierunku optymalnej ucieczki $\theta^*(t)$) przez zero.

Uzyskane wyniki świadczą o prawidłowych tendencjach występujących w tego typu procesach growych (m.in. odpowiedni dobór momentów przełączania funkcji sterujących obu graczy). Wskazują one na przydatność metody gier elementarnych, która prowadzi do znacznego uproszczenia rozwiązania numerycznego.

Ze względu na przyjęte wcześniej założenia, w pracy zastosowano podejście teoretyczne, które w następnych pracach z tego cyklu powinno być odpowiednio zmodyfikowane w celu zbliżenia rozwiązania problemu do warunków jakie występują w rzeczywistym procesie. Chodzi tu m.in. o brak możliwości praktycznej realizacji suboptymalnych sterowań typu przekąźnikowego ze względu na dynamikę sterowych serwomechanizmów wykonawczych. Ponadto ruch samolotów w procesie naprowadzania odbywa się w przestrzeni trójwymiarowej ze zmienną prędkością, a na dynamikę tego ruchu ma wpływ również kąt natarcia.

Z powyższych względów najbliższe zamierzenia autora dotyczące problemów rozważanych w niniejszej pracy będą polegały na:

- a) uwzględnieniu dynamiki serwomechanizmów wykonawczych,
- b) uwzględnieniu ruchu przestrzennego samolotów w procesie growym,
- c) uwzględnieniu zmian prędkości samolotów,
- d) uwzględnieniu zmian w dynamice obu samolotów,
- e) uwzględnieniu niedokładności w określeniu pozycji względnej przez oba samoloty.

Literatura

1. T. BASAR, G. J. OLSDER, *Noncooperative game theory*, Academic Press, 1982.
2. G. J. OLSDER, J. V. BREAKWELL, *Role determination in an aerial dogfight*, International Journal of Game Theory, 3, 47—66, 1974.
3. W. Y. PENG, T. L. VINCENT, *Some aspects of aerial combat*, AIAA Journal vol. 13, No. 1 January 1975.
4. D. E. KIRK, *Optimal Control Theory. An Introduction*, Prentice Hall, 1970.
5. R. VOGT, G. SZCZEPAŃSKI, J. GAJDA, *Sprawozdanie z pracy zlecanej wykonywanej na zlecenie WAT*, 1983.

Резюме

СИНТЕЗ ИГРОВОЙ СИСТЕМЫ НАВЕДЕНИЯ САМОЛЁТА НА САМОЛЁТ-ЦЕЛЬ В ПРОДОЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ МЕТОДОМ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИГР

В работе представлено решение проблемы игрового управления в процессе наведения самолёта на самолёт - цель в продольной плоскости методом элементарных игр. Для принятой модели игровой системы учитывающей только продольное движение самолётов выведено конечные условия существования оптимального управления. Проведено цифровую симуляцию игровой системы на основе предложенного алгоритма использующего декомпозицию данной игры на элементарные игры. Полученные результаты обосновывают целесообразность применения метода, который значительно упрощает игровую проблему по сравнению с классическими методами.

Summary

SUBOPTIMAL SOLUTION OF FIGHTER INTERCEPTION CONTROL PROCESS USING ELEMENTARY GAMES METHOD

In the paper a method of solution of fighter interception problem considered as game control system was presented. For a given two-dimensional continuous model of aircraft longitudinal motion the necessary conditions for the existence of optimal controls were determined. The game problem was solved numerically by the use of elementary games method. Based on results of digital simulation, the influence of different parameters on characteristics of game process was analyzed. General conclusions is that the applied method is useful for a solution of game control systems considered here.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 lutego 1986 roku.