

## WAHANIA ŚMIGŁA OGONOWEGO NA ODKSZTAŁCALNEJ BELCE OGONOWEJ KADŁUBA ŚMIGŁOWCA

WIESŁAW LEŚNIEWSKI

*Instytut Lotnictwa, Warszawa*

JERZY MARYNIAK

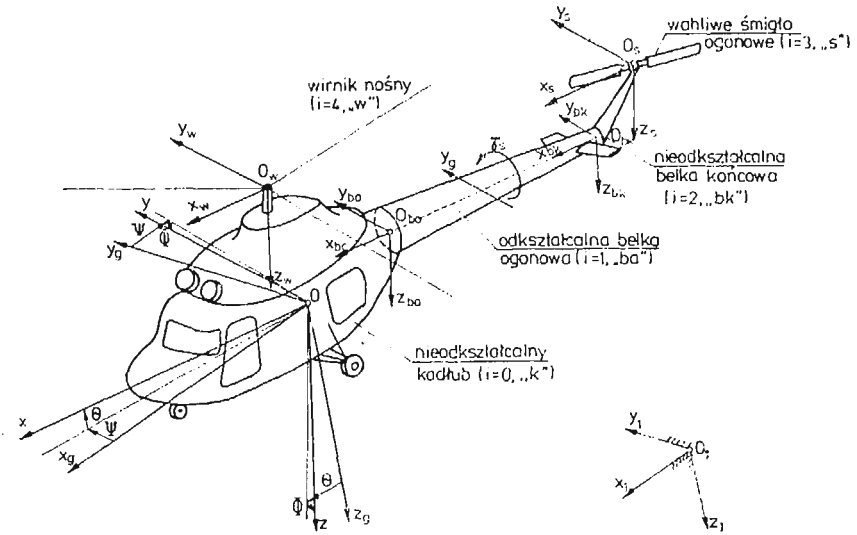
*ITLiMS, Politechnika Warszawska*

### Wprowadzenie

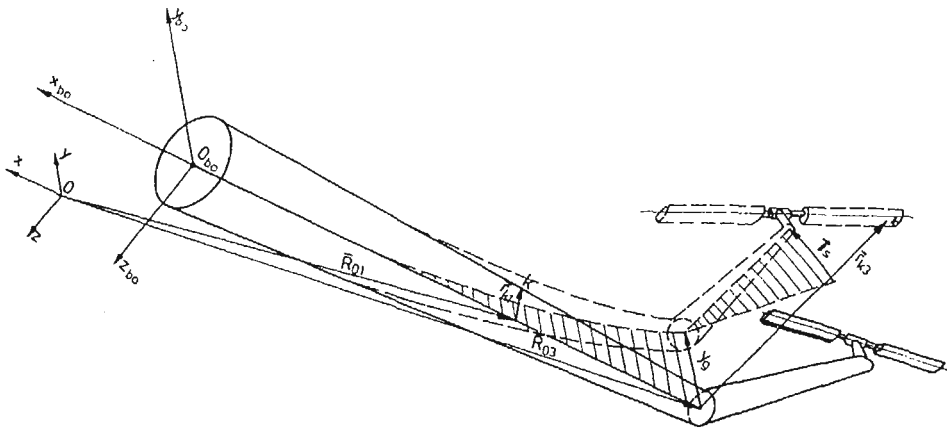
Ważnym elementem jednowirnikowego śmigłowca jest jego śmigło ogonowe mające równoważyć moment oporowy wirnika nośnego i umożliwić sterowanie kierunkowe. Z reguły umieszczone jest na wydłużonej belce ogonowej, wzdłuż której biegnie jego napęd w postaci wieloczołowego tylnego wału transmisyjnego. Drgania pochodzące od przekładni głównej oraz struktury kadłuba są przekazywane na śmigło ogonowe wywołując reakcje dynamiczne obciążające dodatkowo układ napędowy i strukturę. W pewnych stanach lotu przy dużej prędkości mogą wystąpić sprzężenia aerodynamiczne i dynamiczne drgań giętno-skrętnych belki ogonowej i wahań śmigła ogonowego, objawiające się w postaci tzw. „tail wagging” (zawijanie ogona) [1]. W prezentowanej pracy przedstawiono sposób modelowania śmigłowca z wahliwym śmigłem ogonowym osadzonym na odkształcalnej belce ogonowej kadłuba oraz podano przykładowe wyniki obliczeń. Uwzględniono zmiany prędkości obrotowej wału transmisyjnego wywołane względnyymi wychyleniami odcinków połączonych przegubami Cardana.

### 1. Przyjęty model fizyczny

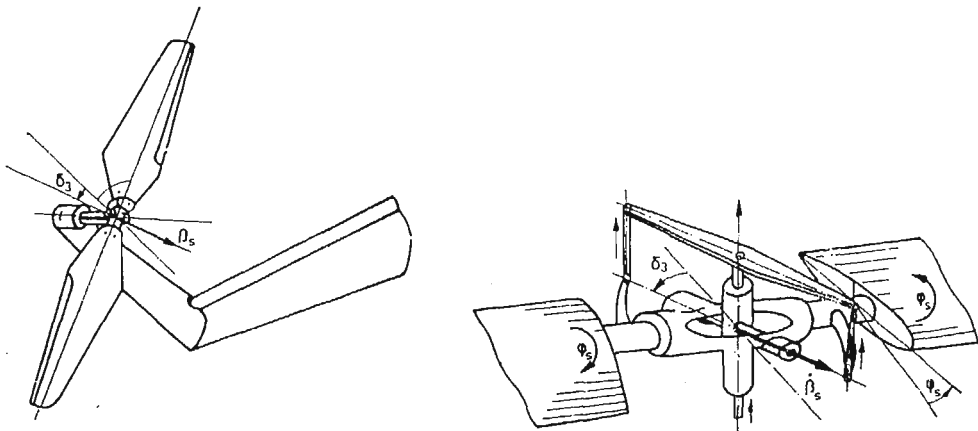
Jako obiekt przyjęto śmigłowiec jednowirnikowy klasy Mi-2 (rys. 1) w ruchu przestrzennym w spokojnej atmosferze. Założono, że kadłub do pierwszej wręgi belki ogonowej jest bryłą nieodkształcalną, podobnie jak belka końcowa oraz łopaty wirnika nośnego i śmigła ogonowego. Stożkowa belka ogonowa o poziomej osi podłużnej jest podatna giętnie w płaszczyźnie  $Oxy$  oraz skrętnie względem osi podłużnej (rys. 1 i rys. 2). Tylony wał transmisyjny biegnący nad belką ogonową składa się z trzech odcinków połączonych przegubami Cardana. Łopaty wirnika nośnego połączone są z piastą za pomocą przegubu osiowego i poziomego. Wahliwe dwułopatowe śmigło ogonowe ma oś wahań leżącą w płaszczyźnie wirowania śmigła odchyloną od prostopadłej do osi łopat o kąt  $\delta_3$  (rys. 3).



Rys. 1. Śmigłowiec i jego układy odniesienia



Rys. 2. Odkształcenia belki ogonowej



Rys. 3. Wahliwe śmigło ogonowe

Na obiekt działają siły aerodynamiczne, grawitacyjne, sprężystości i tłumienia.

Przyjęty w ten sposób model fizyczny ma dziewięć stopni swobody, tzn. sześć odnoszących się do ruchu śmigłowca jako ciała sztywnego oraz trzy wynikające z odkształceń i ruchów względnych.

## 2. Układy współrzędnych

Do opisu ruchu śmigłowca przyjęto zgodnie z [3] następujące podstawowe układy współrzędnych (rys. 1):

- $0_1 x_1 y_1 z_1$  nieruchomy układ grawitacyjny związany z Ziemią,
- $0x_g y_g z_g$  układ grawitacyjny związany z obiektem i równoległy do układu  $0_1 x_1 y_1 z_1$
- $0xyz$  układ sztywno związany z poruszającym się kadłubem śmigłowca,
- $0x_a y_a z_a$  układ prędkościowy związany z kierunkiem przepływu ośrodka opływającego obiekt.

Ponadto wprowadzono układy pomocnicze dla belki ogonowej, belki końcowej, wirnika nośnego i śmigła ogonowego, co związane jest z podziałem całego śmigłowca na pięć obszarów, w których niezależnie wykonuje się obliczenia. Obszary te mają następujące nazwy i indeksy (rys. 1):

- sztywny kadłub —  $i = 0$ , indeks „ $k$ ”
- odkształcalna belka ogonowa —  $i = 1$ , indeks „ $bo$ ”
- sztywna belka końcowa —  $i = 2$ , indeks „ $bk$ ”
- śmigło ogonowe —  $i = 3$ , indeks „ $s$ ”
- wirnik nośny —  $i = 4$ , indeks „ $w$ ”

Dla każdego z obszarów określono rozkłady mas, momentów statycznych, bezwładności i dewiacji.

## 3. Ogólna postać równań ruchu

Równania ruchu śmigłowca wyprowadzono stosując równania Boltzmanna-Hamela dla układów holonomicznych w quasi-współrzędnych i quasi-prędkościach w układzie sztywno związanym z kadłubem śmigłowca  $0xyz$  (rys. 1). Ogólna postać tych równań jest następująca [2, 3]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^k \gamma_{\alpha\mu}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_\mu^*, \quad (1)$$

$$\alpha, r, \mu = 1, \dots, k$$

gdzie:

- $\omega_\mu$  — quasi-prędkości,
- $\pi_\mu$  — quasi-współrzędne,
- $T^*$  — energia kinetyczna w quasi-prędkościach i quasi-współrzędnych,
- $Q_\mu^*$  — siły uogólnione odpowiadające quasi-współrzędnym,
- $k$  — ilość stopni swobody,
- $\gamma_{\alpha\mu}^r$  — trójwskaźnikowe symbole Boltzmanna.

Układ równań (1) zapisano w postaci macierzowej

$$\mathbf{T}_{\omega t}^*(\mu) - \mathbf{T}_{\pi}^*(\mu) + \mathbf{T}_{\nu}^{*T}(r) \Gamma(r, \mu, \alpha) \omega(\alpha) = \mathbf{Q}^*(\mu), \quad (2)$$

gdzie:

$$\mathbf{T}_{\omega t}^*(\mu) = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\mu}} \right) \right], \quad \mathbf{T}_{\pi}^*(\mu) = \left[ \frac{\partial T^*}{\partial \pi_{\mu}} \right], \quad \mathbf{T}_{\nu}^*(\mu) = \left[ \frac{\partial T^*}{\partial \nu_{\mu}} \right],$$

$$\Gamma(r, \mu, \alpha) = [\gamma_{\alpha\mu}^r], \quad \mathbf{Q}^*(\mu) = [Q_{\mu}^*].$$

Dla badanego obiektu przyjęto na podstawie [3] następujące wektory współrzędnych uogólnionych  $q$ , quasi-współrzędnych  $\pi$  i quasi-prędkości  $\omega$ :

$$q = \text{col}[x_1, y_1, z_1, \Phi, \Theta, \Psi, q_1, q_2, q_3], \quad (3)$$

$$\pi = \text{col}[\pi_U, \pi_V, \pi_W, \pi_P, \pi_Q, \pi_R, q_1, q_2, q_3], \quad (4)$$

$$\omega = \text{col}[U, V, W, P, Q, R, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3], \quad (5)$$

gdzie:

$U, V, W$  — składowe wektora prędkości unoszenia  $\bar{V}_c$  punktu 0 względem  $0_1 x_1 y_1 z_1$  w układzie  $Oxyz$ ,

$P, Q, R$  — składowe prędkości kątowej  $\bar{\Omega}_c$  śmigłowca względem punktu 0,

$\Phi, \Theta, \Psi$  — kąty quasi-eulerowskie (przechylenia, pochylenia, odchylenia) rys. 1,

$q_1, q_2, q_3$  — współrzędne uogólnione (quasi-współrzędne) odnoszące się do odkształceń sprężystych i ruchów względnych,

$\pi_U, \dots, \pi_R$  — quasi-współrzędne będące całkami  $U, \dots, R$ .

W przyjętym modelu obliczeniowym quasi-współrzędne  $q_1, q_2, q_3$  odpowiadające dodatkowym stopniom swobody są równe współrzędnym uogólnionym, wobec czego trójkążnikowe symbole Boltzmana dla  $\mu = 7, 8, 9$  są równe zero [3].

W celu określenia odkształceń belki ogonowej posłużono się dyskretyzacją belki przez postacie drgań rezonansowych przyjmując założenia, że siły i momenty aerodynamiczne śmigła ogonowego nie wpływają na te postacie. Do opisu ugięcia osi podłużnej belki ogonowej  $y_{\theta}(\bar{x}, t)$  przyjęto jedną postać drgań rezonansowych giętnych  $f(\bar{x})$  (pominięto stowarzyszone skręcanie), zaś dla kąta  $\gamma_s(\bar{x}, t)$  obrotu przekroju względem tej osi jedną postać drgań skrętnych  $F(\bar{x})$  (pominięto stowarzyszone gięcie), układu złożonego z belki ogonowej i z belki końcowej z piastą śmigła ogonowego. Gięcie i skręcanie belki ogonowej odpowiadające wybranym postaciom określone są zależnościami:

$$y_{\theta}(\bar{x}, t) = q_1(t) f(\bar{x}), \quad (6)$$

$$\gamma_s(\bar{x}, t) = q_2(t) F(\bar{x}). \quad (7)$$

Wahania śmigła ogonowego określa się kątem obrotu  $\beta_s(t)$  płaszczyzny wyznaczonej przez oś łopaty i oś wahań wokół osi wahań, wobec czego prędkość kątowa  $\dot{\beta}_s$  jest skierowana wzdłuż tej osi (rys. 3). Kąt  $\beta_s(t)$  jest równy współrzędnej uogólnionej  $q_3$ :

$$\beta_s(t) = q_3(t) \quad (8)$$

## 4. Współrzędne i prędkości punktów

Współrzędne dowolnego punktu  $K$  w „ $i$ -tym” obszarze określa zależność:

$$\bar{R}_{Ki} = \bar{R}_{0i} + \bar{r}_{Ki}, \quad (9)$$

gdzie:

$\bar{R}_{0i} = [x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}]$  — przesunięcie układu odniesienia związanego z rozpatrywanym przekrojem względem układu  $0xyz$ ,

$\bar{r}_{Ki} = [\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i]$  — przyrosty współrzędnych punktu  $K$  związane z odkształceniami belki ogonowej oraz ruchami względnymi śmigła ogonowego i wirnika nośnego (rys. 2),

$$\bar{r}_{Ki} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 0, \\ \bar{R}_{\theta i} + \mathbf{A}_{V i} \bar{R}_{\rho e i} & \text{dla } i = 1, 2, \\ \bar{R}_{\theta 2} + \mathbf{A}_{V 2} [\bar{R}_E + \mathbf{A}_{\Psi \beta} \bar{R}_{\rho 3}] & \text{dla } i = 3, \\ \mathbf{A}_{\Theta w} \mathbf{A}_{\Psi w} [\bar{R}_{Ew} + \mathbf{A}_{\beta w} \bar{R}_{\rho 4}] & \text{dla } i = 4, \end{cases}$$

$\bar{R}_{\theta i} = [x_{\theta i}, y_{\theta i}, z_{\theta i}]$  — przemieszczenie środka obrotu przekroju odniesienia w wyniku odkształceń belki ogonowej,

$$x_{\theta i} = -\frac{1}{2} q_1^2 l_B \int_0^{\bar{x}} f'^2(\bar{x}) d\bar{x}, \quad y_{\theta i} = y_{\theta}(\bar{x}, t) = q_1 f(\bar{x}), \quad z_{\theta i} = 0,$$

$\bar{R}_{\rho e i} = [x_{\rho e i}, y_{\rho e i}, z_{\rho e i}]$  — położenie punktu  $K$  względem osi obrotu przekroju odniesienia w układzie pomocniczym,

$\bar{R}_E = [l_0, f_0, -z_{e3}]$  — przesunięcie układu  $0_s x_s y_s z_s$  względem układu  $0_{bk} x_{bk} y_{bk} z_{bk}$ ,

$\bar{R}_{\rho 3} = [\xi_2, \eta_2, \zeta_2]$  — współrzędne punktu łopaty w układzie związanym z łopatą śmigła ogonowego,

$$\mathbf{A}_{V i} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{\theta i} & -\sin \vartheta_{\theta i} \cos \gamma_{s i} & \sin \vartheta_{\theta i} \sin \gamma_{s i} \\ \sin \vartheta_{\theta i} & \cos \vartheta_{\theta i} \cos \gamma_{s i} & -\cos \vartheta_{\theta i} \sin \gamma_{s i} \\ 0 & \sin \gamma_{s i} & \cos \gamma_{s i} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\vartheta_{\theta i} = -\arctg \frac{\partial y_{\theta}}{\partial x} \approx -f'(\bar{x}) q_1,$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} = \frac{1}{l_B} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, \quad (11)$$

$l_B$  — długość belki ogonowej,

$\mathbf{A}_{\Psi \beta}$  — macierz transformacji układu związanego z łopatą do układu  $0_s x_s y_s z_s$ ,

$\Psi_s$  — azymut śmigła ogonowego,

$\mathbf{A}_{\Theta w}, \mathbf{A}_{\Psi w}, \mathbf{A}_{\beta w}, \bar{R}_{Ew}, \bar{R}_{\rho 4}$  — macierze transformacji oraz wektory przesunięć i położenia punktów wirnika nośnego.

Prędkość punktu  $K$  o współrzędnych podanych wzorem (9) określa zależność:

$$\bar{V}_{Ki} = \bar{V}_C + \bar{\Omega}_C \times \bar{R}_{Ki} + \frac{\partial \bar{r}_{Ki}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{r}_{Ki}}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (12)$$

lub w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{V}_{Ki} = \mathbf{V}_{\omega i} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{V}_{Ri} \dot{\Psi}_i, \quad (13)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}_c &= [U, V, W], \\ \bar{\boldsymbol{\Omega}}_c &= [P, Q, R], \\ \bar{\boldsymbol{\Omega}}_E &= [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3], \\ \boldsymbol{\omega} &= \text{col} [\mathbf{V}_c, \boldsymbol{\Omega}_c, \boldsymbol{\Omega}_E] \\ \mathbf{V}_{\omega i} &= \{\mathbf{I}, \mathbf{V}_{\Omega Ci}, \mathbf{V}_{\Omega Ei}\}, \\ \mathbf{V}_{\Omega Ci} &= \mathbf{A}_{\Omega gi} + \mathbf{A}_{\nu i} \mathbf{A}_{\theta ei} \mathbf{A}_{\omega i}^{-1}, \\ \mathbf{V}_{\Omega Ei} &= \mathbf{P}_{\theta ni} + \mathbf{A}_{\nu i} \mathbf{A}_{\theta ei} \mathbf{A}_{\omega i}^{-1} + [\mathbf{A}_{\nu 3} \mathbf{A}_{\mu \beta} \mathbf{A}_{\theta 3} \mathbf{A}_{\omega \beta}^{-1}] \quad \text{dla } i = 3, \\ \mathbf{A}_{\theta e3} &= \mathbf{A}_E + \mathbf{A}_{\mu \beta} \mathbf{A}_{\theta 3}, \end{aligned}$$

$\mathbf{A}_{\Omega gi}, \mathbf{A}_{\theta ei}, \mathbf{A}_E, \mathbf{A}_{\theta 3}$  otrzymano z wektorów  $(\bar{\mathbf{R}}_{0i} + \bar{\mathbf{R}}_{gi}), \bar{\mathbf{R}}_{\theta ei}, \bar{\mathbf{R}}_E, \bar{\mathbf{R}}_{\theta 3}$  według schematu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{P}_{\theta ni}, \mathbf{A}_{\omega i}^{-1}, \mathbf{A}_{\omega \beta}^{-1}$  otrzymano z  $\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_{Ki}}{\partial q_j} \dot{q}_j$  po wyłączeniu  $\dot{q}_i$ ,

$\mathbf{V}_{Ri}$  — prędkość punktu niezależna od quasi-prędkości, otrzymana z  $\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_{Ki}}{\partial t}$ .

W wyniku odkształceń belki ogonowej odcinki tylnego wału transmisyjnego połączone przegubami Cardana odchylają się względem siebie o kąty  $\beta_k = f(q_1, q_2, \bar{x})$  powodując zmiany przekazywanej prędkości kątowej i kąta obrotu wału. Dla przyjętego modelu wału na podstawie [5] wyznaczono:

$$\begin{aligned} \Psi_s &= f(q_1, q_2, t), \\ \dot{\Psi}_s &= f(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t), \end{aligned} \quad (14)$$

W postaci macierzowej:

$$\dot{\Psi}_s = \mathbf{A}_p + \mathbf{B}_{pE}^T \boldsymbol{\Omega}_E, \quad (15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p &= \frac{\omega_0}{i_p} \frac{B_0}{\cos^2 \alpha_0 + B_0^2 \sin^2 \alpha_0}, \\ B_0 &= \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1 \cos \beta_3}, \\ \mathbf{B}_{pE} &= \text{col} \left[ C_p \frac{\partial B_0}{\partial q_1}, C_p \frac{\partial B_0}{\partial q_2}, 0 \right], \\ C_p &= \frac{1}{2i_p} \frac{\sin 2\alpha_0}{\cos^2 \alpha_0 + B_0^2 \sin^2 \alpha_0}, \end{aligned}$$

$\omega_0$  — prędkość obrotowa wału transmisyjnego na wyjściu z przekładni głównej, (rad/s),  
 $\alpha_0 = \omega_0 t$ ,  
 $i_p$  — przełożenie przekładni w belce końcowej.

### 5. Energia kinetyczna i jej pochodne

Całkowitą energię kinetyczną otrzymano w wyniku sumowania energii kinetycznych we wszystkich obszarach według zależności:

$$T^* = \sum_{i=0}^4 T^{*i}, \quad (16)$$

gdzie:

$$T^{*i} = \frac{1}{2} \int_{m_i} V_{ki}^2 dm. \quad (17)$$

Po uwzględnieniu (13) w (17) otrzymano

$$T^{*i} = \frac{1}{2} \omega^T \mathbf{T}_2^{*i} \omega + \mathbf{T}_{1\psi}^{*i} \omega \dot{\psi}_i + \frac{1}{2} T_{0\psi}^{*i} \dot{\psi}_i^2, \quad (18)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2^{*i} &= \int_{m_i} \mathbf{V}_{\omega i}^T \mathbf{V}_{\omega i} dm, \\ \mathbf{T}_{1\psi}^{*i} &= \int_{m_i} \mathbf{V}_{Ri}^T \mathbf{V}_{\omega i} dm, \\ T_{0\psi}^{*i} &= \int_{m_i} \mathbf{V}_{Ri}^T \mathbf{V}_{Ri} dm, \end{aligned}$$

$\mathbf{T}_{1\psi}^{*i} \neq 0$ ,  $T_{0\psi}^{*i} \neq 0$  dla  $i = 3, 4$ .

Dla śmigła ogonowego należy uwzględnić (15) oraz  $\dot{\psi}_s^2$  w (18).

$$\dot{\psi}_s^2 = A_p^2 + A_p \mathbf{B}_p^T \omega + \omega^T \mathbf{B}_p A_p + \omega^T \mathbf{D}_p \omega, \quad (19)$$

gdzie:

$\mathbf{B}_p$  — macierz  $\mathbf{B}_{pE}$  rozszerzona do wymiaru  $9 \times 9$ ,

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{B}_p \mathbf{B}_p^T.$$

Po wstawieniu (19) i (15) do (18) należy  $\mathbf{T}_2^{*3}$  oraz  $\mathbf{T}_{1\psi}^{*3}$  w (18) zastąpić przez

$$\mathbf{T}_2^{*3} = \mathbf{T}_2^{*3} + \int_{m_3} [T_{0\psi}^{*3} \mathbf{D}_p + \mathbf{B}_p \mathbf{T}_{1\psi}^{*3} + \mathbf{T}_{1\psi}^{*3T} \mathbf{B}_p^T] dm, \quad (20)$$

$$\mathbf{T}_{1\psi}^{*3} = \mathbf{T}_{1\psi}^{*3} + \int_{m_3} T_{0\psi}^{*3} \mathbf{B}_p^T dm, \quad (21)$$

oraz  $\dot{\psi}_s$  przez  $A_p$ :

$$\dot{\psi}_s \equiv A_p \quad \text{w (18).}$$

Przykładowo macierz  $\mathbf{T}_2^{*i}$  ma postać

$$\mathbf{T}_2^{*i} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_i & \mathbf{S}_{DCi} & \mathbf{S}_{DEi} \\ \mathbf{S}_{DCi}^T & \mathbf{I}_{Ci} & \mathbf{I}_{CEi} \\ \mathbf{S}_{DEi}^T & \mathbf{I}_{CEi}^T & \mathbf{I}_{Ei} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Linia przerywaną zaznaczono elementy odnoszące się do ciała sztywnego, pozostałe uwzględniają odkształcenia sprężyste i ruchy względne. Postać macierzy  $\mathbf{M}_i$ ,  $\mathbf{S}_{DCi}$  i  $\mathbf{I}_{Ci}$  jest następująca:

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & M_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{DCi} = \begin{bmatrix} 0 & S_{zi} & -S_{yi} \\ -S_{zi} & 0 & S_{xi} \\ S_{yi} & -S_{xi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{I}_{Ci} = \begin{bmatrix} J_{xi} & -J_{xyi} & -J_{xz i} \\ -J_{xyi} & J_{yi} & -J_{yz i} \\ -J_{xz i} & -J_{yz i} & J_{zi} \end{bmatrix}.$$

Pochodne energii kinetycznej  $T^*$  otrzymano różniczkując wyrażenie (18) względem quasi-prędkości, czasu i quasi-współrzędnych:

$$\mathbf{T}_\omega^{*i} = \left[ \frac{\partial T^{*i}}{\partial \omega_\mu} \right] = \mathbf{T}_{1\psi}^{*i\Gamma} + \mathbf{T}_2^{*i} \omega, \quad (24)$$

$$\mathbf{T}_{\omega t}^{*i} = \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_\omega^{*i}) = \mathbf{T}_{\omega t 0}^{*i} + (\mathbf{T}_{\omega t 1}^{*i} + \mathbf{T}_{\omega \pi 1}^{*i}) + \omega^T \mathbf{T}_{\omega \pi 2}^{*i} \omega + \mathbf{T}_2^{*i} \dot{\omega}, \quad (25)$$

$$\mathbf{T}_\pi^{*i} = \left[ \frac{\partial T^{*i}}{\partial \pi_\mu} \right] = \mathbf{T}_{0\pi}^{*i} + \mathbf{T}_{1\pi}^{*i} \omega + \frac{1}{2} \omega^T \mathbf{T}_{2\pi}^{*i} \omega, \quad (26)$$

gdzie:

$$\mathbf{T}_{\omega t 0}^{*i} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{T}_{1\psi}^{*i\Gamma}), \quad \mathbf{T}_{\omega t 1}^{*i} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{T}_2^{*i}),$$

$$\mathbf{T}_{\omega \pi 1}^{*i} = \left[ \frac{\partial}{\partial \pi(k)} (\mathbf{T}_{1\psi}^{*i\Gamma}(\mu)) \right], \quad \mathbf{T}_{\omega \pi 2}^{*i} = \left[ \frac{\partial}{\partial \pi(k)} (\mathbf{T}_2^{*i}(\mu, j)) \right],$$

$$\mathbf{T}_{0\pi}^{*i} = \frac{1}{2} \dot{\psi}_i^2 \left[ \frac{\partial T_{0\psi}^{*i}}{\partial \pi(\mu)} \right], \quad \mathbf{T}_{1\pi}^{*i} = \dot{\psi}_i \left[ \frac{\partial}{\partial \pi(\mu)} (\mathbf{T}_{1\psi}^{*i}(j)) \right],$$

$$\mathbf{T}_{2\pi}^{*i} = \left[ \frac{\partial}{\partial \pi(\mu)} (\mathbf{T}_2^{*i}(k, j)) \right].$$

## 6. Siły uogólnione

Siły uogólnione działające na śmigłowiec można podzielić na siły i momenty aerodynamiczne, grawitacyjne, sprężystości i tłumienia.

a) Wektor uogólnionych sił aerodynamicznych  $\mathbf{Q}_A$



Uogólnione siły aerodynamiczne wyznaczono niezależnie dla wirnika nośnego, śmigła ogonowego i całego kadłuba wykorzystując założenia:

- opływ jest quasi-stacjonarny, płaski,
- charakterystyki aerodynamiczne przyjęto na podstawie badań tunelowych dla kadłuba w funkcji kąta natarcia, kąta ślizgu i kąta nastawienia statecznika, zaś dla łopat w funkcji kąta natarcia przekroju i liczby Macha,
- przyjęto jednorodny rozkład prędkości indukowanej,
- pominięto oddziaływanie strumienia zaśmigłowego wirnika nośnego na śmigło ogonowe i belkę ogonową,
- w prędkości opływu kadłuba uwzględniono wektor prędkości indukowanej wirnika nośnego,
- siły i momenty aerodynamiczne działające na łopaty oblicza się metodą elementu łopaty niezależnie dla każdej z nich i następnie sumuje.

Siły uogólnione odpowiadające dodatkowym stopniom swobody wyznaczono według [2] z zależności:

$$Q_{A\mu} = \sum_{v=1}^n \bar{F}_v \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial q_{\mu}}, \quad \mu = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Po wykonaniu odpowiednich obliczeń i zsumowania otrzymanych wielkości dla wirnika nośnego, kadłuba i śmigła ogonowego uzyskano wektor uogólnionych sił aerodynamicznych

$$Q_A = \text{col}[X_A, Y_A, Z_A, L_A, M_A, N_A, Q_{A1}, Q_{A2}, Q_{A3}]. \quad (28)$$

b) Wektor uogólnionych sił grawitacyjnych  $Q_G$

Składowe przyspieszenia ziemskiego w układzie odniesienia  $0xyz$  związanym z kadłubem śmigłowca mają postać:

$$\bar{q} = A_g \cdot g, \quad (29)$$

gdzie:

$$A_g = \begin{bmatrix} -\sin\Theta \\ \cos\Theta \sin\Phi \\ \cos\Theta \cos\Phi \end{bmatrix},$$

$g$  — przyspieszenie ziemskie na danej wysokości.

Ponieważ środek masy śmigłowca nie pokrywa się z początkiem układu  $0xyz$  oprócz sił grawitacyjnych wystąpią również momenty:

$$\begin{bmatrix} L_G \\ M_G \\ N_G \end{bmatrix} = g \sum_{i=0}^4 S_{BCi}^T A_g. \quad (30)$$

Siły uogólnione odpowiadające dodatkowym stopniom swobody wyznaczono analogicznie jak w przypadku „a”. Otrzymano wektor uogólnionych sił grawitacyjnych w postaci:

$$Q_G = \text{col}[X_G, Y_G, Z_G, L_G, M_G, N_G, Q_{G1}, Q_{G2}, Q_{G3}]. \quad (31)$$

c) Wektor uogólnionych sił sprężystości i tłumienia  $\mathbf{Q}_s$ .

Siły uogólnione sprężystości i tłumienia wyznaczono na podstawie znajomości energii potencjalnej  $U_s$ , odkształceń sprężystych układu i sprężystych zawieszonych elementów ruchomych oraz przyjętej dyssypacyjnej funkcji Rayleigh'a  $U_R$ . Dla przyjętego modelu wyznaczono:

$$U_s = \frac{1}{2} k_\theta q_1^2 + \frac{1}{2} k_s q_2^2 + \frac{1}{2} k_\beta q_3^2, \quad (32)$$

$$U_R = -\frac{1}{2} k_\beta \dot{q}_3^2, \quad (33)$$

gdzie:

$$k_\theta = \omega_\theta^2 l_B \int_0^1 m(\bar{x}) \left\{ f^2(\bar{x}) + \frac{1}{4} q_1^2 l_B \left[ \int_0^{\bar{x}} f'^2(\bar{x}) d\bar{x} \right]^2 \right\} d\bar{x},$$

$$k_s = \omega_s^2 l_B \int_0^1 J_x(\bar{x}) F^2(\bar{x}) d\bar{x},$$

$k_\beta = \text{const.}$ , sztywność zawieszenia śmigła ogonowego,

$k_\beta = \text{const.}$ , współczynnik dyssypacji energii w układzie zawieszenia śmigła ogonowego,

$\omega_\theta, \omega_s$  — częstości drgań własnych odpowiadające postaciom  $f(\bar{x})$  i  $F(\bar{x})$  belki ogonowej,

$m(\bar{x}), I(\bar{x})$  — masa jednostkowa i jednostkowy moment bezwładności przekroju belki ogonowej względem osi obrotu.

Siły uogólnione różne od zera obliczono według wzoru:

$$Q_{s\mu} = -\frac{\partial U_s}{\partial q_\mu} + \frac{\partial U_R}{\partial \dot{q}_\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (34)$$

otrzymano:

$$\begin{aligned} Q_{s1} &= -k_\theta q_1, \\ Q_{s2} &= -k_s q_2, \\ Q_{s3} &= -k_\beta q_3 - k_\beta \dot{q}_3. \end{aligned} \quad (35)$$

Wektor  $\mathbf{Q}_s$  ma postać

$$\mathbf{Q}_s = \text{col}[0, 0, 0, 0, 0, 0, Q_{s1}, Q_{s2}, Q_{s3}]. \quad (36)$$

## 7. Równanie ruchu śmigłowca

Wykorzystując zależności podane w punktach 3÷6 opracowania układ równań (2) można przekształcić do postaci

$$\mathbf{T}'_2 \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}^* + \mathbf{Q}_L^*, \quad (37)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^* &= \mathbf{Q}_A + \mathbf{Q}_G + \mathbf{Q}_v, \quad \text{wektor sił uogólnionych,} \\ \mathbf{Q}_L &= \mathbf{T}_{0C}^* + \mathbf{T}_{1C}^* \omega + \omega^T \mathbf{T}_{2C}^* \omega, \\ \mathbf{T}_{0C}^* &= \mathbf{T}_{0x}^* - \mathbf{T}_{\omega t 0}^*, \\ \mathbf{T}_{1C}^* &= \mathbf{T}_{1x}^* - (\mathbf{T}_{\omega t 1}^* + \mathbf{T}_{\omega \pi 1}^*) - \mathbf{T}_{1\psi}^* \Gamma, \\ \mathbf{T}_{2C}^* &= \frac{1}{2} \mathbf{T}_{2x}^* - \mathbf{T}_{\omega \pi 2}^* - \mathbf{T}_{2\psi}^* \Gamma. \end{aligned}$$

Układ równań (37) jest układem dziewięciu równań nieliniowych o zmiennych współczynnikach. Poniżej podano przykładowo równanie drugie i dziewiąte w postaci rozwiniętej dla pokazania charakteru sprzężeń:

$$\begin{aligned} M\dot{V} - S_x \dot{P} + S_y \dot{R} + a_{27} \dot{q}_1 + a_{28} \dot{q}_2 + a_{29} \dot{q}_3 + M(UR - WP) + S_x PQ - S_y(P^2 + R^2) + \\ + S_z QR - a_{76}^2 \dot{q}_1 R - a_{77}^2 \dot{q}_1^2 - 2a_{78}^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2a_{79}^2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 - a_{84}^2 \dot{q}_2 P - a_{86}^2 \dot{q}_2 R + \\ - 2a_{89}^2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 - a_{84}^2 \dot{q}_3 P - a_{96}^2 \dot{q}_3 R - a_{99}^2 \dot{q}_3^2 - b_{24} P - b_{26} R - b_{27} \dot{q}_1 + \\ - b_{28} \dot{q}_2 - b_{29} \dot{q}_3 - C_2 = Q_{A2} + Q_{G2}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} a_{91} \dot{U} + a_{92} \dot{V} + a_{93} \dot{W} + a_{94} \dot{P} + a_{95} \dot{Q} + a_{96} \dot{R} + a_{97} \dot{q}_1 + a_{98} \dot{q}_2 + \\ + a_{99} \dot{q}_3 - 2[a_{15}^2 UQ + a_{16}^2 UR + a_{24}^2 VP + a_{26}^2 VR + a_{34}^2 WP + \\ + a_{35}^2 WQ + a_{45}^2 PQ + a_{46}^2 PR + a_{56}^2 QR] - a_{44}^2 P^2 - a_{55}^2 Q^2 + \\ - a_{66}^2 R^2 - (a_{47}^2 + a_{74}^2) \dot{q}_1 P - (a_{48}^2 + a_{84}^2) \dot{q}_2 P - (a_{57}^2 + a_{75}^2) \dot{q}_1 Q + \\ - (a_{58}^2 + a_{85}^2) \dot{q}_2 Q - (a_{67}^2 + a_{76}^2) \dot{q}_1 R - (a_{68}^2 + a_{86}^2) \dot{q}_2 R + \\ - a_{77}^2 \dot{q}_1^2 - (a_{78}^2 + a_{87}^2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - (a_{79}^2 + a_{97}^2) \dot{q}_1 \dot{q}_3 - b_{94} P + \\ - b_{95} Q - b_{96} R - b_{97} \dot{q}_1 - b_{98} \dot{q}_2 - c_9 = Q_{A9}^* + Q_{G9}^* - k_\beta q_3 - k_\beta \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (38a)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{2C}^* &= [a_{\mu j}], \quad \mathbf{T}_{1C}^* = [a_{k j}^*], \\ \mathbf{T}_{1C}^* &= [b_{\mu j}], \quad \mathbf{T}_{0C}^* = [c_\mu], \end{aligned}$$

$M, S_x, S_y, S_z$  odnoszą się do całego śmigłowca.

Po uzupełnieniu (33) związkami kinematycznymi otrzymano kompletny układ równań ruchu śmigłowca z odkształcalną belką ogonową i wahliwym dwułopatowym śmigłem ogonowym:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= (T_2^*)^{-1}(\mathbf{Q}^* + \mathbf{Q}_L^*), \\ \dot{\Phi} &= P + (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \operatorname{tg} \Theta, \\ \dot{\Theta} &= Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \\ \dot{\Psi} &= (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) / \cos \Theta, \\ \dot{z}_1 &= -U \sin \Theta + V \cos \Theta \sin \Phi + W \cos \Theta \cos \Phi, \\ \dot{q}_1 &= \dot{q}_1, \\ \dot{q}_2 &= \dot{q}_2, \\ \dot{q}_3 &= \dot{q}_3. \end{aligned} \quad (39)$$

Po zastosowaniu podstawienia

$$\mathbf{Y} = \text{col}[\omega, \Phi, \Theta, \Psi, z_1, q_1, q_2, q_3] \quad (40)$$

otrzymano ostatecznie

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t). \quad (41)$$

Układ równań w postaci (41) gotowy do obliczeń numerycznych.

### 8. Przykład obliczeniowy

Układ równań (41) scałkowano numerycznie dla warunków początkowych opisanych wektorem  $\mathbf{Y}_0$  i określonych jako warunki równowagi śmigłowca poruszającego się ruchem poziomym prostoliniowym z prędkością  $V_L = 210$  km/h ( $V = P = Q = R = 0$ ). Prędkość obrotowa wirnika nośnego  $n_w = 246$  obr/min (4.1 Hz), zaś śmigła ogonowego  $n_s = 1445$  obr/min (24.08 Hz). Układ równań równowagi składa się z ośmiu równań nieliniowych, z których sześć określa równowagę sił i momentów a dwa zależność na prędkość indukowaną wirnika nośnego  $V_{iw0}$  i śmigła ogonowego  $V_{is0}$ . W wyniku rozwiązania powyższego układu za pomocą procedury NONLIQ z biblioteki systemu CYBER otrzymano wartości kątów quasi-eulerowskich  $\Theta_0, \Phi_0$ , kątów sterowania wirnika nośnego  $\Theta_{0w}, \Theta_{1w}, \Theta_{2w}$ , kąta skoku ogólnego śmigła ogonowego  $\Theta_{0s}$  oraz prędkości indukowane  $V_{iw0}, V_{is0}$ . Ponadto wyliczono składowe prędkości lotu na osie  $0x(U_1)$  i  $0z(W_1)$  oraz  $\Psi_0$ . Wektor warunków początkowych  $\mathbf{Y}_0$  ma postać:

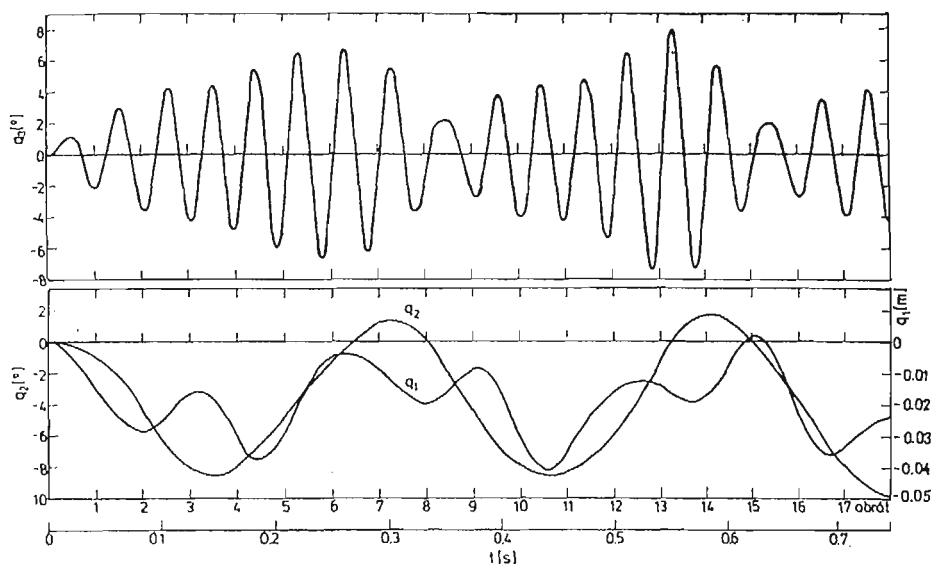
$$\mathbf{Y}_0 = \text{col}[U_1, 0, W_1, 0, 0, 0, \Phi_0, \Theta_0, \Psi_0, 0, 0, 0]. \quad (42)$$

Współczynniki wahań pionowych wirnika nośnego wyznaczono według zależności podanych w [4].

Na podstawie [6] dla belki ogonowej przyjęto postać drgań giętych  $f(x)$  dla częstości  $\omega_g = 20$  Hz oraz postać drgań skrętnych  $F(x)$  dla częstości  $\omega_s = 36$  Hz, pomijając drgania sprzężone z tymi postaciami. Przyjęto krok całkowania odpowiadający  $\Delta\psi_s = 12^\circ$  ( $\Delta t = 0.0014$  s). Obliczenia wykonano metodą Runge-Kutta IV rzędu (procedura systemowa RKINIT).

Zmiany współrzędnych uogólnionych w funkcji czasu przedstawiono na rys. 4:  $q_3 = \beta_s$  wahania śmigła ogonowego wokół przegubu poprzecznego,  $q_2 = \gamma_s$  skrócenie sprężyste belki ogonowej kadłuba wokół osi podłużnej i  $q_1 = y_g$  gięcie sprężyste belki ogonowej kadłuba w płaszczyźnie poziomej. Otrzymany przebieg wahań śmigła  $q_3$  rys. 4 ma podobny charakter do uzyskanego w czasie badań eksperymentalnych w locie i przedstawionego w [1] dla tzw. „zawijania ogonem” (tail wagging). Na rys. 4 widoczne jest wyraźne „dudnienie” wahań śmigła ogonowego wywołane sprężystymi drganiami giętno-skrętnymi belki ogonowej.

Przykładowo przedstawiono ze względu na objętość tylko dwa równania ruchu z dziewięciu: (38) równanie przemieszczeń bocznych  $V$  i (38a) równanie wahań śmigła ogonowego  $\beta_s$ . W równaniach bardzo wyraźnie występują sprzężenia ruchów wynikających ze stopnia kadłuba jako ciała sztywnego ( $U, V, W, P, Q, R, \Phi, \Theta, \Psi$ ) gięcie poziomego belki ogonowej  $q_1 = y_g$  oraz drgań skrętnych kadłuba  $q_2 = \gamma_s$ .



Rys. 4. Zmiany współrzędnych uogólnionych  $q_1, q_2, q_3$  w czasie ( $\mu = 0.3$ )

Zastosowanie równań Boltzmana-Hamela pozwala na uzyskanie właściwego modelu matematycznego śmigłowca w ruchu względnym z uwzględnieniem sprężystych stopni swobody i wahań elementów względem sztywnej bryły kadłuba.

W ramach prowadzonych badań teoretycznych opartych na symulacji numerycznej zjawiska dokonano analizy wpływu stopni swobody śmigłowca jako bryły sztywnej poruszającej się w przestrzeni oraz odpowiednio zmian sztywności belki ogonowej.

#### Literatura

1. R. W. BALKE, R. L. BENNETT, T. M. GAFFEY, R. R. LYNN, *Tail Rotor Design. Part II: Structural Dynamics*, Journal of the American Helicopter Society, Vol. 15, No 4, Oct. 1970.
2. R. GUTOWSKI, *Mechanika Analityczna*, PWN, Warszawa, 1971.
3. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace naukowe PW — Mechanika, Nr 32, Warszawa, 1975.
4. H. L. PRICE, *Rotor Dynamics and Helicopter Stability*, Aircraft Engineering, No 3, 4, 6, 7, 11, 12 z 1963 i 3, 4 z 1964.
5. S. WIŚNIEWSKI, *Dynamika maszyn*, Wyd. Politechnika Poznańska, Nr 697, Poznań, 1977.
6. *Próby rezonansowe śmigłowca Mi-2M*, Spr. wewn. ILOT nr 17/RW-W2/83.

#### Резюме

#### КОЛЕБАНИЯ ХВОСТОВОГО ВИНТА НА УПРУГОЙ ХВОСТОВОЙ БАЛКЕ ФЮЗЕЛЯЖА ВЕРТОЛЁТА

В статье представлено метод математического моделирования пространственного движения вертолёт с качающимся двуплостным хвостовым винтом осажженным на упругой хвостовой балке фюзеляжа. Применено шесть степеней свободы жёсткого вертолёт, изгибные и крутящие

колебания хвостовой балки с качающимся хвостовым винтом. Учтено изменение угловой скорости шарнирного вала хвостового винта. Уравнения движения выведено принимая уравнения Больцманна — Гамеля. Сделано примерные вычисления. Получены результаты представляющие сопряженные колебания хвостового винта с упругими колебаниями хвостовой балки механические биения.

#### S u m m a r y

#### FLUCTUATIONS OF THE HELICOPTER TAIL PROPELLER ON THE DEFORMABLE TAIL BOOM

In the paper a method of the mathematical modelling has been presented for a helicopter with the self-aligned tail propeller on deformable tail boom in an arbitrary motion. The following degrees of freedom were taken into account: six degrees of freedom of the main part of fuselage treated as rigid body, two elastic degrees of freedom due to bending and torsion of the tail boom and one degree of freedom connected with fluctuations of the two blades of the tail propeller. In addition, the changes of the angular velocity of the transmission shaft as a result of the deviations of shafts parts coupled by Cardan universal joint have been considered. Equations of motion of the mechanic system have been derived by means of Boltzmann-Hamel formulae. A numerical example is given. The computed fluctuations of the propeller indicate that there exist the tail wagging mode for the helicopter and a distinct beat of the tail propeller fluctuations generating transverse-torsional vibrations of the elastic tail boom.

*Praca wpłynęła do Redakcji 19 marca 1986 roku.*