

WARUNEK OSCYLACYJNOŚCI WAHAŃ RAKIETY JAKO KRYTERIUM DOBORU DŁUGOŚCI WYRZUTNI

STANISŁAW DUBIEL
RYSZARD KURNATOWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna

1. Wstęp

Zejsście rakiety z prowadnic wyrzutni posiada istotne znaczenie w dynamice raket zarówno sterowanych jak i niesterowanych. W przypadku raket sterowanych decyduje o wejściu w pole sterowania, a więc o realizacji zadania w ogóle. W przypadku natomiast raket niesterowanych wpływa w sposób istotny na rozrzut.

Proces dynamiczny po zejściu z wyrzutni zależy w zasadniczy sposób od prędkości zejścia, a ta z kolei od długości prowadnic i przyspieszenia zespołu napędowego, oraz charakterystyki aerodynamicznej. Określenie zatem właściwej długości prowadnic wyrzutni odgrywa zasadniczą rolę w badaniu dynamiki ruchu. Rozwiązanie tego problemu jest przedsięwzięciem bardzo skomplikowanym ze względu na konieczność spełnienia wielu kryteriów ograniczających. Przyjęta długość prowadnicy powinna zapewnić osiągnięcie przez raketę pewnych początkowych parametrów lotu, z których najważniejszym jest prędkość początkowa rakiety V_0 . Parametr ten determinuje w znacznym stopniu zachowanie się rakiety po zejściu z prowadnicy wyrzutni na niekierowanym, aktywnym odcinku toru.

Zasadnicze kryterium według Helmholtza [1] wymaga pełnej stabilizacji lotu zakłóconego rakiety po zejściu z wyrzutni.

Jako kryteria ograniczające przyjęto:

1. Stateczność dynamiczną rakiety po zejściu z prowadnicy wyrzutni, którą dla ruchu przyspieszonego w zakresie $M = 0 \div 0.5$ sprowadza się do zachowania oscylacyjności zmian kąta natarcia α .
2. Zachowanie dopuszczalnych wartości kąta przepadania i pochylenia stycznej do toru $\Delta\gamma$ przy zadanej prędkości końcowej V_k .

Warunek oscylacyjności ruchu rakiety po zejściu z wyrzutni był wykorzystywany jako kryterium doboru długości prowadnic, ale przy zastosowaniu znanej metody zamrażania współczynników równania wahań podłużnych [2]. Zasada zamrożenia eliminowała wpływ przyspieszenia zespołu napędowego, który jest bardzo wyraźny, szczególnie przy małych prędkościach ruchu. Nic też dziwnego, że otrzymywano długości prowadnic niepomiarne długie i rzadko spotykane w praktyce. Właściwą odpowiedź daje badanie stateczności

ruchu nieustalonego, a więc ze zmiennymi współczynnikami równania. Problemowi temu poświęcone jest niniejsze opracowanie.

2. Wyprowadzanie równania ruchu rakiety

Rozważa się płaski ruch rakiety w płaszczyźnie pionowej, ograniczając się do zakresu kątów natarcia α , umożliwiających linearyzację charakterystyki aerodynamicznej. Przyjęto również, że w przedziale $0 - 0.5 M$ współczynniki aerodynamiczne są niezależne od liczby Macha.

Przy założeniach tych mamy:

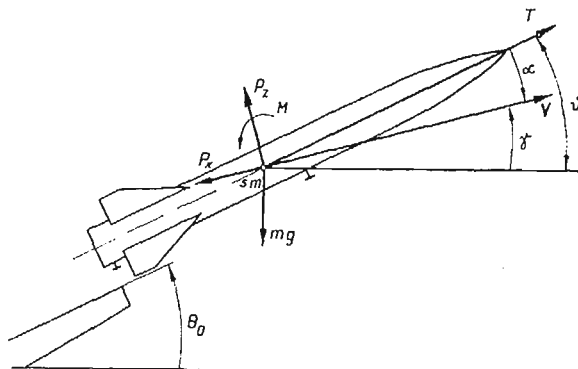
$$\begin{aligned} C_x &= C_{x0}, \\ C_z &= C_z^\alpha \cdot \alpha, \\ C_M &= C_M^\alpha \cdot \alpha + C_M^{\ddot{\alpha}} \frac{d\alpha}{dl} + C_M^{\dot{\gamma}} \left(\frac{d\alpha}{dl} + \frac{d\gamma}{dl} \right) + C_M^\delta \delta + C_M^{\dot{\delta}} \frac{d\delta}{dl}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Układ równań opisujących ruch rakiety w płaszczyźnie pionowej jest następujący:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= -mg \sin \gamma + T \cos \alpha - P_x, \\ mV \frac{d\gamma}{dt} &= -mg \cos \gamma + T \sin \alpha + P_z, \\ I_y \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right) &= M, \\ \frac{dl}{dt} = V, \quad \frac{dh}{dt} = V \sin \gamma, \quad \frac{dx}{dt} = V \cos \gamma, \\ \frac{dm}{dt} &= -m_s. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Oznaczenia podano na rys. 1. Ponadto:

m — masa rakiety,



Rys. 1

ρ — gęstość powietrza,

S — powierzchnia nośna (odniesienia),

C_x, C_z, C_M — współczynniki sił i momentów aerodynamicznych.

Dla zakresu małych kątów natarcia umożliwiającą linearyzację charakterystyki aerodynamicznej można przyjąć:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &\approx 1, \\ \sin \alpha &\approx \alpha.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Wprowadza się oznaczenia:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\rho \cdot S}{m} \\ \kappa &= \frac{\rho_0 S t_A}{2 I_y} \\ a_T &= \frac{T}{m} \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho(h)}{\rho_0}\end{aligned}\quad (2.4)$$

i po dokonaniu przekształceń z uwzględnieniem zależności (2.3) i przejściu na drogę jako zmienną niezależną otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dl} &= \frac{a_T - g \sin \gamma}{V} - \frac{\lambda}{2} \bar{\rho} C_x V, \\ \frac{d\gamma}{dl} &= -\frac{g \cos \gamma}{V^2} + \frac{a_T}{V^2} \alpha + \frac{\lambda}{2} \bar{\rho} C_z^x \alpha, \\ \frac{d^2 \alpha}{dl^2} + \frac{d^2 \gamma}{dl^2} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dl} \left(\frac{d\alpha}{dl} + \frac{d\gamma}{dl} \right) &= \kappa \bar{\rho} \\ &\left[C_\alpha^M \alpha + C_M^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{d\alpha}{dl} + C_M^{\bar{\omega}} \left(\frac{d\alpha}{dl} + \frac{d\gamma}{dl} \right) \right], \\ \frac{dh}{dl} &= \sin \gamma, \quad \frac{dx}{dl} = \cos \gamma, \quad \frac{dm}{dl} = \frac{-m_s}{V}\end{aligned}\quad (2.5)$$

$\bar{\alpha}, \bar{\delta}, \bar{\omega}_y$ — względne prędkości kątowe.

W trzecim równaniu układu (2.5) z prawej strony pominięto człony zależne od kąta wychylenia sterów δ i pochodnej $\frac{d\delta}{dl}$ gdyż bezpośrednio po zejściu z prowadnic wyrzutni stery aerodynamiczne są zablokowane ze względu na małą efektywność, wynikającą z małej prędkości rakiety.

Ponieważ bezpośrednio po zejściu rakiety z prowadnic wyrzutni zmiana wysokości jest nieznaczna, pociąga to za sobą również nieznaczną zmianę gęstości względnej powietrza. Dopuszczalne jest więc przyjęcie w dalszych rozważaniach:

$$\bar{\rho} = \text{const}, \quad \frac{d\bar{\rho}}{dl} = 0 \quad (2.6)$$

Różniczkując drugie równanie układu (2.5) i przy podstawieniu pierwszego i drugiego równania układu (2.5) oraz uwzględnieniu (2.6) otrzymamy trzecie równanie różniczkowe układu (2.5) opisujące zmianę kąta natarcia rakiety α w postaci:

$$\frac{d^2\alpha}{dl^2} + C_d(l) \frac{d\alpha}{dl} + C_s(l) \alpha = f(l), \quad (2.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} C_d[V(l), \gamma(l), l] &= K_d(l) + \frac{2a_T - g \sin \gamma}{V^2}, \\ K_d(l) &= \frac{\lambda}{2} \bar{\rho} (C_z^\alpha - C_x) - \kappa \bar{\rho} (C_M^\alpha + C_M^{\omega y}), \\ C_s[V(l), \gamma(l), l] &= K_s(l) + \frac{\lambda}{2} \bar{\rho} \left(C_z^\alpha + C_x - \frac{2\kappa}{\lambda} \cdot C_M^{\omega y} \right) \cdot \frac{a_T}{V^2} + \\ &+ \frac{2g \sin \gamma - a_T}{V^2} \cdot \frac{a_T}{V^2} + \tilde{C}_s[V(l), l] \\ \tilde{C}_s[V(l), l] &= \frac{a_T}{V^3} \left(\frac{dT}{dt} \cdot \frac{1}{T} + \frac{m_s}{m} \right) \frac{1}{V} \frac{\lambda}{2} \bar{\rho} C_z^\alpha \frac{m_s}{m} \\ K_s(l) &= -\kappa \bar{\rho} C_M^\alpha - \frac{\lambda^2}{4} \bar{\rho}^2 C_z^\alpha \left(C_x + \frac{2\kappa}{\lambda} C_M^{\omega y} \right) \\ f[V(l), \gamma(l), l] &= -\frac{g \cos \gamma}{V^2} \left(\frac{a_T - 2g \sin \gamma}{V^2} - \frac{\lambda}{2} \bar{\rho} C_x + \kappa \bar{\rho} C_M^{\omega y} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Jak wynika z zależności (2.8) współczynniki $C_d[V(l), \gamma(l), l]$, $C_s[V(l), \gamma(l), l]$ oraz funkcja wymuszająca $f[V(l), \gamma(l), l]$ nie są jawnymi funkcjami drogi, lecz poprzez prędkość i funkcje trygonometryczne kąta pochylenia stycznej do toru.

Ze względu na wolnozmienną prawą stronę równania (2.7) rozpatrywany problem sprowadza się do zbadania warunku oscylacyjności rozwiązań równania:

$$\frac{d^2\alpha}{dl^2} + C_d(l) \frac{d\alpha}{dl} + C_s(l) \alpha = 0 \quad (2.9)$$

Wprowadzimy nową zmienną $z(l)$:

$$\alpha(l) = z(l) \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{l_0}^l C_d(s) ds \right), \quad (2.10)$$

tak, aby w powstałym z zamiany zmiennej $\alpha(l)$ przez $z(l)$ równaniu różniczkowym znikły współczynniki przy pierwszej pochodnej:

$$\frac{d^2z}{dl^2} + \Phi(l) \cdot z = 0, \quad (2.11)$$

gdzie:

$$\Phi(l) = C_s(l) - \frac{1}{4} C_d^2(l) - \frac{1}{2} \frac{dC_d(l)}{dl}. \quad (2.12)$$

Wykonując wskazane działania mamy:

$$\Phi[V(l)] = \frac{1}{V^4} (AV + BV^3 + CV^2 + DV + E) \quad (2.13)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A = & -\kappa\bar{\varrho}C_M^\alpha - \frac{\lambda\kappa}{2} \cdot \bar{\varrho}^2 \cdot C_z^\alpha \cdot C_{M'}^{\bar{\omega}}, - \frac{\lambda^2}{4} \bar{\varrho}^2 C_z^\alpha C_x + \\ & - \frac{\lambda^2}{16} \bar{\varrho}^2 (C_z^\alpha - C_x)^2 - \frac{\kappa^2}{2} \bar{\varrho}^2 (C_M^{\bar{\alpha}} + C_{M'}^{\bar{\omega}})^2 + \\ & + \frac{\lambda\kappa}{2} \bar{\varrho} (C_z^\alpha - C_x) (C_M^{\bar{\alpha}} + C_{M'}^{\bar{\omega}}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$B = \frac{\lambda}{4} \bar{\varrho} (C_z^\alpha + C_x) \frac{m_s}{m} - \frac{\kappa}{2} \bar{\varrho} (C_M^{\bar{\alpha}} + C_{M'}^{\bar{\omega}}) \frac{dJ_y}{dt} \cdot \frac{1}{J_y} \quad (2.15)$$

$$C = a_T \kappa \bar{\varrho} C_M^{\bar{\alpha}} + g \sin \gamma \frac{\lambda}{4} \bar{\varrho} \left[C_z^\alpha + C_x - \frac{2\kappa}{\lambda} \cdot (C_M^{\bar{\alpha}} + C_{M'}^{\bar{\omega}}) \right] \quad (2.16)$$

$$D = 0 \quad (2.17)$$

$$E = g^2 \left(\frac{5}{4} \sin^2 \gamma - \frac{1}{2} \right) \quad (2.18)$$

Odrzucając czony, w których występują współczynniki λ^2 , κ^2 i $\lambda\kappa$, jako bardzo małe otrzymamy w przybliżeniu:

$$A \cong -\kappa\bar{\varrho}C_M^\alpha. \quad (2.19)$$

2. Warunek oscylacyjności ruchu rakiety

Warunkiem oscylacyjności rozwiązań równania (2.11) według twierdzenia Szturma [4] jest, aby $\Phi(l)$ była funkcją dodatnią, rosnącą i ograniczoną dla wszystkich $l > l_0$.

Ponieważ

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi(l) = \lim_{V(l) \rightarrow \infty} \frac{AV^4 + BV^3 + CV^2 + DV + E}{V^4} = A \quad (3.1)$$

i dla rakiety mającej spełniony warunek stateczności statycznej $C_M^\alpha < 0$ a więc zgodnie z zależnością (2.14) lub (2.19)

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi(l) = A > 0 \quad (3.2)$$

Wtedy warunek oscylacyjności rozwiązań (2.11) sprowadza się do:

$$\begin{aligned} \Phi[V(l)] &= \frac{AV^4 + BV^3 + CV^2 + DV + E}{V^4} > 0, \\ \Phi'[V(l)] &= -\frac{BV^3 + 2CV^2 + 3DV + 4E}{V^5} \frac{dV}{dt} > 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

W najczęściej spotykanych przypadkach przy pracującym zespole napędowym $\frac{dV}{dl} > 0$. Uwzględniając ponad to, że $V > 0$, otrzymamy warunki (2.23) w postaci:

$$\begin{aligned} F_1(V) &= AV^4 + BV^3 + CV^2 + DV + E > 0, \\ F_2(V) &= BV^3 + 2CV^2 + 3DV + 4E < 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aby określić V_{0min} , dla której warunki (3.4) są spełnione, rozpatrzmy przebieg $\Phi[V(l)]$ dla różnych, technicznie możliwych przypadków warunkujących wielkość i znak współczynników A, B, C, D i E . Jak wykazano wyżej, dla wszystkich rakiet mających zapewnioną stateczność statyczną $A > 0$.

W najczęściej technicznie spotykanych przypadkach współczynnik B jest ujemny, gdyż zazwyczaj projektuje się rakiety w taki sposób, aby $\left| \frac{m_s}{m} \right| < \left| \frac{dI_y}{I_y} \right|$ natomiast, wielkości pozostałych współczynników wyrażen (2.15) są tego samego rzędu. Współczynnik C dla rakiet z pracującym zespołem napędowym jest przeważnie ujemny, ale nie wykluczone są też i takie przypadki, np. dla $a_T \cong g \sin \gamma_{sr}$, lub $C_M^{\bar{\alpha}} = 0$, że otrzymamy $C > 0$. Wielkość i znak współczynnika E zależy od kąta nachylenia stycznej do toru.

W zakresie:

$$-\arcsin \sqrt{0,4} < \gamma < \arcsin \sqrt{0,4} \quad (3.5)$$

mamy: $E < 0$, dla pozostałych kątów $E > 0$.

Ponieważ dla $E \neq 0$:

$$\lim_{V(l) \rightarrow 0} \Phi[V(l)] = \infty \cdot \text{sign } E, \quad (3.6)$$

lub w przypadku, gdy $E = 0$

$$\lim_{V(l) \rightarrow 0} \Phi[V(l)] = \infty \cdot \text{sign } C. \quad (3.7)$$

Miejsca zerowe $\Phi(V)$ i $\Phi'(V)$ pokrywają się z odpowiednimi zerami wielomianów $F_1(V)$ i $F_2(V)$. Zgodnie z regułą Descartesa [6], w zależności od ilości zmian znaku współczynników A, B, C i E wielomian $F_1(V)$, a więc również i $\Phi(V)$ może mieć trzy, dwa, jedno lub nie mieć wcale rzeczywistych zer dodatnich (dla $V > 0$). Wobec powyższego wykresy $\Phi(V)$ i $\Phi'(V)$ dla różnych, technicznie możliwych przypadków będą miały charakter przebiegów jak pokazano na rys. 2a, 2b, 2c.

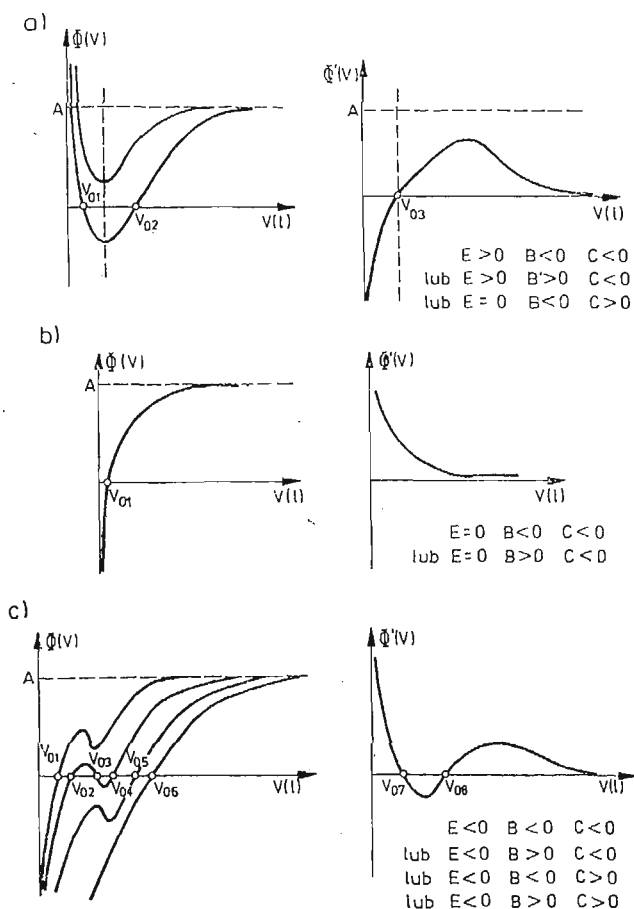
Z układu nierówności (3.4.) wynika, że istnieje pewna minimalna prędkość rakiety V_{0min} , po przekroczeniu której zmiany kąta natarcia α spowodowane zakłóceniami początkowymi będą miały charakter oscylacyjny, gdyż zostaną spełnione warunki (3.3) wynikające z twierdzenia Szturma. Rozwiązanie układu (3.4) w celu wyznaczenia V_0 można dokonać metodami numerycznymi lub graficznie przyjmując:

$$V_{0min} = \max_{i,j} \{V_{0i}, V_{0j}\}, \quad (3.8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} V_{0i} &\text{ — miejsce zerowe } F_1(V), \\ V_{0j} &\text{ — miejsce zerowe } F_2(V). \end{aligned}$$

Projektowana długość prowadnicy musi być tak dobrana, aby gwarantowała osiągnięcia tej prędkości przed zejściem rakiety z prowadnicy wyrzutni.



Rys. 2

4. Określenie minimalnej długości prowadnic wyrzutni

Minimalną długość prowadnic wyrzutni można określić znając zmianę prędkości rakiety w czasie ruchu po prowadnicach wyrzutni.

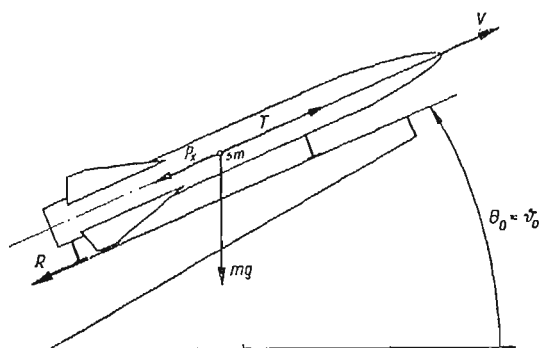
Równanie różniczkowe opisujące ruch rakiety po prowadnicach jest analogiczne do pierwszego równania układu (2.2) (przy stałej sile tarcia podpór rakiety o prowadnice wyrzutni). Pominięcie pozostałych równań wynika z istnienia równowagi sił normalnych z reakcjami belki wyrzutni:

$$m \frac{dV}{dt} = T - mg \sin \theta_0 - P_x - R, \tag{4.1}$$

gdzie: R — siła tarcia podpór rakiety.

Równanie (4.1) po uwzględnieniu zależności (2.4) można przedstawić w postaci:

$$\frac{dV}{dt} = a_r - g \sin \theta_0 - 2 \frac{R}{m} - \frac{\lambda}{2} \bar{q} C_x V^2. \tag{4.2}$$



Rys. 3

Jeżeli oznaczymy:

$$a_1 = 2(a_T - g \sin \theta_0) - 2 \frac{R}{m} \quad (4.3)$$

i przejdziemy na drogę jako zmienną niezależną otrzymamy:

$$\frac{d[V^2]}{dl} = a_1 - \bar{C}_x V^2, \quad (4.4)$$

gdzie: $\bar{C}_x = \lambda \bar{\rho} C_x$.

W przypadku ruchu rakiety po prowadnicach można przyjąć:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{1sr} = \text{const.}, \\ \bar{C}_x &= \text{const.} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Rozwiązanie równania (4.4) z uwzględnieniem (4.5) przy zerowych warunkach początkowych jest następujące:

$$V^2(l) = \frac{a_1}{\bar{C}_x} (1 - e^{-\bar{C}_x l}). \quad (4.6)$$

Mając określoną wg zależności (3.8) V_{0min} możemy po podstawieniu do wzoru (4.6) obliczyć długość prowadnic wyrzutni l_0 :

$$V_{0min}^2 = \frac{a_1}{\bar{C}_x} (1 - e^{-\bar{C}_x l_0}) \quad (4.7)$$

skąd:

$$l_0 = \frac{1}{\bar{C}_x} \ln \frac{1}{1 - V_{0min}^2 \frac{\bar{C}_x}{a_1}} \quad (4.8)$$

ponieważ:

$$V_{0min}^2 \frac{\bar{C}_x}{a_1} \ll 1 \quad (4.9)$$

to rozkładając logarytm naturalny na szereg potęgowy [5] i po uwzględnieniu tylko pierwszego wyrazu tego szeregu zależność określająca minimalną długość prowadnic wyrzutni przyjmuje postać [7]:

$$l_0 = \frac{V_0^2}{a_{1min}} \quad (4.10)$$

Zależność (4.6) opisuje zmianę prędkości taktety zarówno w ruchu po przewodnicy wyrzutni jak i w locie swobodnym. Jeżeli rozłożymy występującą we wzorze (4.6) funkcję wykładniczą w szereg potęgowy i uwzględnimy tylko dwa pierwsze wyrazy tego szeregu to otrzymamy:

$$V^2(l) \cong a_1 l \quad (4.11)$$

Zależność (4.1) po podstawieniu do (2.8) pozwala wyznaczyć bezpośrednio minimalną długość przewodnicy wyrzutni. Otrzymamy wtedy:

$$C_d(l) = K_d + \frac{1}{l}, \quad (4.12)$$

$$C_s(l) = K_s + \frac{\lambda}{4} \bar{\varrho} \left(C_z^\alpha + C_x - \frac{2\kappa}{\lambda} C_{M'}^{\bar{\varrho}} \right) \frac{1}{l} - \frac{1}{4} \frac{1}{l^2} +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\sqrt{a_1}} \bar{\varrho} C_z^\alpha \frac{m_s}{m} \frac{1}{\sqrt{l}} + \frac{1}{2\sqrt{a_1}} \left(\frac{dT}{dt} + \frac{m_s}{m} \right) \frac{1}{l\sqrt{l}}, \quad (4.13)$$

$$f(l) = -\frac{1}{2} \frac{g \cos \gamma}{a_1} \frac{1}{l^2} + \frac{g \cos \gamma}{a_1} \left(\frac{\lambda}{2} \bar{\varrho} C_x - \kappa \bar{\varrho} C_{M'}^{\bar{\varrho}} \right) \frac{1}{l}. \quad (4.14)$$

Po zastosowaniu podstawienia (2.10)

$$\alpha(l) = z(l) \cdot e^{-\frac{1}{2} \int_{l_0}^l C_d(s) ds} = f(l) \sqrt{\frac{1}{l_0}} \cdot e^{-\frac{1}{2} K_d (l - l_0)}, \quad (4.15)$$

otrzymamy równania (2.7) w postaci:

$$\frac{d^2 z}{dl^2} + \varphi(l) z = \check{f}(l), \quad (4.16)$$

gdzie $\varphi(l)$ wyznaczono z zależności (2.12):

$$\varphi(l) = A^* + \frac{B^*}{\sqrt{l}} + \frac{C^*}{l} + \frac{D^*}{l\sqrt{l}}, \quad (4.17)$$

$$A^* = K_s - \frac{1}{4} K_d^2 \cong -\kappa \bar{\varrho} C_M^\alpha > 0, \quad (4.18)$$

$$B^* = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\sqrt{a_1}} \bar{\varrho} C_z^\alpha \frac{m_s}{m}, \quad (4.19)$$

$$C^* = \frac{\lambda}{2} \bar{\varrho} C_x + \frac{\kappa}{2} \bar{\varrho} C_{M'}^{\bar{\varrho}}, \quad (4.20)$$

$$D^* = \frac{1}{2\sqrt{a_1}} \left(\frac{dT}{dt} + \frac{m_s}{m} \right). \quad (4.21)$$

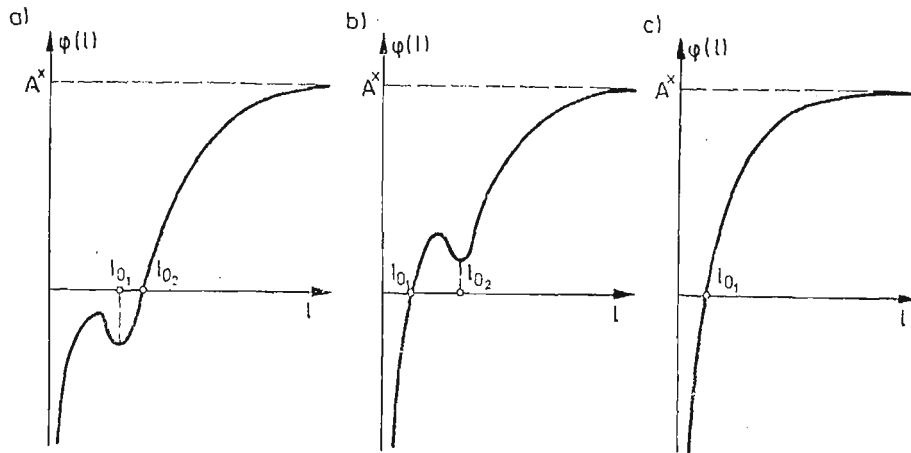
Warunek oscylacyjności rozwiązań równania (4.16) wynikający z twierdzenia Szturma to:

$$\begin{aligned}\varphi(l) &= \frac{A^*l\sqrt{l} + B^*l + C^*\sqrt{l} + D^*}{l\sqrt{l}} > 0, \\ \varphi(l) &= -\frac{1}{2} \frac{B^*l + 2C^*\sqrt{l} + 3D^*}{l^2\sqrt{l}} > 0.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Oznaczając $\sqrt{l} = x$ warunki (4.22) dla $l > 0$ sprowadzą się do układu nierówności:

$$\begin{aligned}F_1(x) &= A^*x^3 + B^*x^2 + C^*x + D^* > 0, \\ F_2(x) &= B^*x^2 + 2C^*x + 3D^* < 0.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Ponieważ $A^* > 0$ i $B^* > 0$; $C^* < 0$; $D^* > 0$ to zgodnie z regułą Descartesa $F_1(x)$ posiada jeden lub dwa pierwiastki rzeczywiste dodatnie. Natomiast $F_2(x)$ może mieć dwa pierwiastki rzeczywiste dodatnie dla $\Delta = 4(C^* - 3B^*D^*) > 0$ lub nie mieć ich wcale. Wobec tego przebieg $\varphi(l)$ może mieć charakter jak na rys. 4a, 4b, 4c.



Rys. 4

5. Przykład obliczeniowy

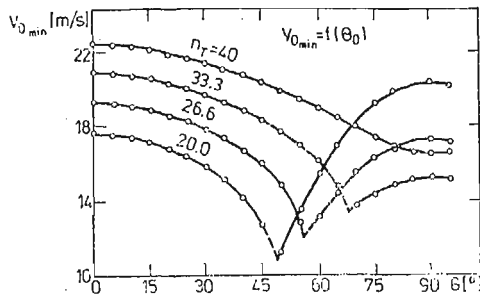
Obliczono minimalną długość prowadnicy dla rakiety o następujących charakterystykach:

$$\begin{aligned}m_0 &= 75 \text{ [kg]}; & m_s &= 10,25 \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]; & J_{y_0} &= 70 \text{ [kgm}^2\text{]}; \\ \frac{dJ_y}{dt} &= -8 \left[\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \right]; & s &= 0,256 \text{ [m}^2\text{]}; & t_n &= 0,47 \text{ [m]}; \\ C_{x_0} &= 0,0293; & C_2^z &= 1,514; & C_M^z &= -1,755;\end{aligned}$$

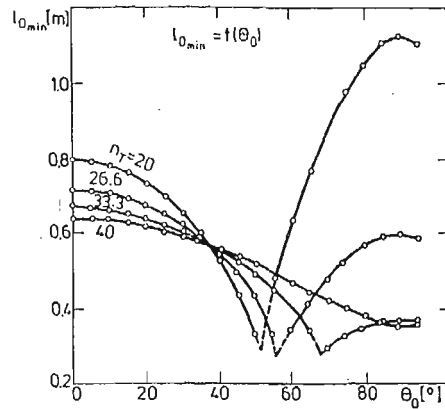
$$C_M^{\dot{\alpha}} = -2,01; \quad C_M^{\bar{\omega}_y} = -5,97 \quad T = T_{max} = \text{const}$$

$$n_T = \frac{T}{mg} = 40,0; \quad 26,7; \quad 23,3; \quad 20,0$$

Wyniki obliczeń pokazano na rys. 5 i rys. 6.



Rys. 5



Rys. 6

6. Wnioski

W niniejszej pracy rozpatrzono problem wyznaczenia długości prowadnicy wyrzutni akiet, przyjmując jako kryterium oscylacyjność zmian kąta natarcia α rakiety po zejściu z prowadnicy. W dostępnej literaturze jest mało materiałów analizujących warunki startu pocisków raketowych z wyrzutni prowadnicowych. Dotychczas jako kryterium określające długość prowadnicy przyjmowano prędkość, przy osiągnięciu której siła nośna rakiety P_z przewyższy jej ciężar Q [1] lub też przyjmując jako kryterium oscylacyjności ruchu rakiety wokół środka ciężkości, traktowano prędkość rakiety jako parametr oraz zaniebdywano wpływ wielkości kąta pochylenia strzały wyrzutni na prędkość minimalną pocisku [2] i [3].

Przeprowadzona analiza wykazała, że minimalna prędkość rakiety a zatem i minimalna długość prowadnicy wyrzutni, przy przyjętym kryterium zależy nie tylko od takich parametrów rakiety jak jej charakterystyki aerodynamiczne, geometryczne, ciężarowe oraz wielkości siły ciągu silnika startowego, lecz także od kąta pochylenia prowadnicy wyrzutni w chwili startu.

Ponieważ najczęściej ta sama wyrzutnia zabezpiecza start dla różnych kątów pochylenia, zatem należy przyjąć długość prowadnic dla warunków dających jej wartość największą. Jest to warunek o istotnym znaczeniu.

Proponowany sposób wyznaczania minimalnej długości prowadnic daje wyniki bardzo bliskie spotykanym w praktyce. Spotykane dotychczas kryteria w literaturze dawały wyniki znacznie przekraczające długości w rozwiązaniach praktycznych i to nawet kilkakrotnie. Tak na przykład warunek oscylacyjności pomijający zmianę prędkości (zamrażanie współczynników równania) daje długości około 4-5 razy większe od długości wyznaczonej dla lotu nieustalonego.

Kryterium oscylacyjności dla lotu nieustalonego należy traktować jako warunek konieczny, choć w wielu przypadkach jest decydujący. Dodatkowym warunkiem może być ograniczenie zmiany pochylenia stycznnej do toru lotu, lub położenie i wielkość obszaru sterowalności, do którego raketę doprowadza się lotem niesterowanym [8]. Stanowi to jednak oddzielny problem.

Literatura

1. Г. МЕРИЛЛ, Г. ГОЛБЕРГ, Р. ГЕЛЬМОЛЬЦ, *Исследование операций, боевые части, пуск снарядов*, Москва, 1953
2. Z. PAŃCZKOWSKI, *Balistyka zewnętrzna pociski rakietowego artylerii polowej*. Biuletyn WAT 6, 2, 1953.
3. L. WASILEWSKI, *Zagadnienie stabilizacji początkowej pocisków rakietowych brzechwowych*. Technika Rakietowa 10, 1961
4. Э. КАМКЕ, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва, 1952.
5. М. Я. ВЫГОДСКИЙ, *Справочник по высшей математике*, Москва, 1961.
6. A. TUROWICZ, *Geometria zer wielomianów*. Warszawa, 1967
7. J. B. ROSSER, R. R. NEWTON, G. L. GROSS, *Mathematical Theory of Rocket Flight*, Mc Graw Gill Book Company 1947.
8. S. DUBIEL, *Szerokość wiązki i wzmocnienie sygnału niezbędne do sterowania raket*. Biul. WAT nr 11 1982 r.

Резюме

УСЛОВИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙНОСТИ КАЧАНИЯ РАКЕТЫ КАК КРИТЕРИЙ ПОДБОРА ДЛИНЫ НАПРАВЛЯЮЩИХ ПУСКОВОГО УСТРОЙСТВА

Содержанием статьи является проблема определения минимальной длины направляющих пускового устройства ракетных снарядов. Как критерии принята осцилляционность движения ракеты по отношению к центру массы после выхода из направляющих пускового устройства. Исследуя уравнения движения ракеты выведены зависимости определяющие: минимальную скорость выхода из направляющих ПУ V_{0min} обеспечивающую осцилляционность изменению угла атаки α , а также минимальную длину направляющих l_{0min} обеспечивающую достижение этой скорости.

Summary

CONDITION OF AN OSCILLATORY MOTION OF A ROCKET AS A CRITERION FOR THE DETERMINATION OF THE LAUNCHER LENGTH

The paper deals with the problem of determination of the minimum guide length of a rocket missile launcher of variable velocity. As a criterion, the oscillability of the rocket motion with respect to the mass center after leaving the launcher guides has been assumed. Investigating the equations of the rocket motion we have derived the relations from which we can determine:

- the minimum velocity V_{0min} of the missile, when it leaves the launcher guides, ensuring the oscillability of variation of the angle of attack;
- the minimum guide length l_{0min} which allows to obtain such a velocity.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 7 kwietnia 1986 roku.