

## QUASI-STATYCZNA SPRĘŻYSTO-LEPKOPLASTYCZNOŚĆ DLA MATERIAŁU NIEŚCIŚLIWEGO. ROZWIĄZANIE MES

MACIEJ BANYŚ

*Politechnika Wroclawska*

### 1. Wprowadzenie

Zagadnienia quasistatycznej lepkoplastyczności są rozwiązywane efektywnie przy zastosowaniu procedur iteracyjno-przyrostowych typu Newtona-Raphsona [3, 2]. Tego typu metody zarówno w przypadku bez wzmocnienia, jak i ze wzmocnieniem kinematycznym są bezwarunkowo stabilne dla parametru aproksymacji liniowej  $\Theta \geq \frac{1}{2}$  i umożliwiają uzyskanie rozwiązań sprężysto-plastyczności, jako stanów ustalonych odpowiadających dużym czasom. Dotychczasowe rozwiązania pozwalają na stwierdzenie, że jedynie dla parametru  $\Theta = 1$  niezależnie od wielkości przyrostu czasu  $\delta t$  uzyskuje się wyniki praktycznie dowolnie dokładne. Dla parametru  $\Theta \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$  dokładność w istotny sposób zależała od wartości przyrostu  $\delta t$ , przy czym im mniejsza wartość  $\Theta$  tym, w celu zapewnienia dokładności, należy stosować mniejsze  $\delta t$ . W dotychczasowych rozważaniach koncentrowano się głównie na weryfikacji metod pod kątem ich stabilności i dokładności pomijając przypadek materiału nieściśliwego w zakresie sprężystym i plastycznym. Istnieje kilka możliwości uwzględnienia tej własności materiału [7], jednakże istnieją procedury, które „załamują” się i uniemożliwiają osiągnięcie pożądanej dokładności. W pracy skoncentrowano się na przebadaniu jednej z częściej stosowanych możliwości, która zadowalająco uwzględniła efekt nieściśliwości.

### 2. Procedura numeryczna

Model lepkoplastyczny zaproponowany w pracy [4] umożliwia stosowanie różnych kryteriów uplastycznienia i typów wzmocnienia. Dla kryterium Hubera-Misesa i wzmocnienia kinematycznego można zapisać model lepkoplastyczny w postaci:

$$\dot{\epsilon}^a = \frac{3}{2} \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{\sigma_{kint}}{\sigma_e} - 1 \right) \right\rangle \cdot \frac{1}{\sigma_{kint}} \|S_D \sigma_k, \quad (2.1)$$

gdzie  $\varepsilon^a$  — wektor odkształceń niesprężystych,

$\gamma$  oznacza lepkość,

$$\sigma_{kint} = \sqrt{\frac{3}{2} s_k^T || s_k}, \quad \langle \Phi \rangle = \begin{cases} \Phi, & \Phi \geq 0, \\ 0, & \Phi < 0, \end{cases}$$

$\sigma_e$  — aktualna granica plastyczności na rozciąganie,

$s_k = S_D \sigma_k$ ,  $s_k$  oznacza wektor dewiatora naprężenia względnego,

$S_D$  — macierz dewiatorowa,

$\sigma_k = \sigma - c ||| \varepsilon^a$ ,  $\sigma_k$  oznacza naprężenie względne.

Macierz  $||$  jest macierzą diagonalną wynikającą z zastosowania zapisu wektorowego tensora  $\sigma$ , a macierz  $|||$  przedstawia macierz diagonalną wynikającą ze stosowania odkształceń inżynierskich (z pominięciem  $\frac{1}{2}$  przy odkształceniach  $\varepsilon_{xy}$ ). Współczynnik  $c$  określa wzmocnienie kinematyczne. Metody opisane w pracach [2, 6] uwzględniają odkształcenia sprężyste poprzez równanie konstytutywne:

$$\sigma = D \varepsilon^e, \quad (2.2)$$

gdzie:  $D$  — macierzą sprężystości,

$\varepsilon^e$  — oznacza wektor odkształceń sprężystych.

Równanie równowagi dla obszaru  $V$  dla zastosowanej dyskretyzacji wprowadzonej przez macierz odkształceń  $B$  ma postać

$$\int_V B^T \sigma dV = R, \quad (2.3)$$

gdzie:  $\varepsilon = Bu$ ,  $u$  oznacza wektor przemieszczeń węzłów,

$R$  jest wektorem wszystkich obciążeń zewnętrznych.

Wprowadzając iteracyjno-przyrostowy zapis powyższych równań, aproksymację liniową i rozwinięcie w szereg Taylora prędkości odkształceń niesprężystych  $\dot{\varepsilon}^a$  możemy wyprowadzić procedurę typu Newtona-Raphsona tak jak w pracy [2]. Rozwiązanie sprowadza się wówczas do rozwiązywania układu równań liniowych tworzonych na nowo dla kolejnej  $i$ -tej iteracji w zastosowanym  $(n+1)$ -szym przyroście:

$$K' \cdot \Delta u_{n+1}^i = J - Y_{n+1}^i, \quad (2.4)$$

gdzie:  $K'$  jest macierzą sztywności postaci:

$$K' = \int_V B^T D'' B dV, \quad (2.5)$$

$\Delta u$  przedstawia przyrost przemieszczeń pomiędzy kolejnymi iteracjami.

Wektory prawej strony równania (2.4) tzw. sił równoważących mają postać:

$$J = \int_V B^T D' D^{-1} X_{n+1}^i dV, \quad Y_{n+1}^i = \int_V B^T \sigma_{n+1}^i dV - R_{n+1}, \quad (2.6)$$

gdzie:  $X_{n+1}^i = \delta \sigma_{n+1}^{i-1} - D(\delta \varepsilon_{n+1}^{i-1} - \dot{\varepsilon}_{n+1,0}^a \cdot \delta t)$ .

Macierz  $D''$  jest macierzą sprężysto-lepkoplastyczną uwzględniającą wzmocnienie i ma

postać:

$$D'' = G^T \left[ G D^{-1} G^T + \delta t \cdot \Theta \cdot \left( \frac{\partial \dot{\epsilon}^a}{\partial \sigma} \Big|_{n+\theta} \right)^T \right]^{-1} \cdot G. \quad (2.7)$$

Przyrost  $\delta \sigma_{n+1}^i = \sigma_{n+1}^{i+1} - \sigma_n$ .

Macierz  $D'$  jest związana z macierzą  $D''$  równaniem

$$D'' = D' G,$$

gdzie macierz  $G$  jest macierzą „wzmocnienia” postaci

$$G = I - \delta t \cdot \Theta \cdot \left( \frac{\partial \dot{\epsilon}^a}{\partial \sigma} \Big|_{n+\theta} \right)^T. \quad (2.8)$$

Macierz  $G$  w przypadku braku wzmocnienia, tzn. gdy  $c = 0$ , równa się macierzy jednostkowej  $I$ . W takim przypadku algorytm upraszcza się do opisanego w pracy [3].

Przyrost naprężeń pomiędzy kolejnymi iteracjami określony jest wzorem:

$$\Delta \sigma_{n+1}^i = D'' B \Delta u_{n+1}^i - D' D^{-1} X_{n+1}^i. \quad (2.9)$$

Algorytm powyższej procedury przedstawiony został w pracy [2].

### 3. Materiał nieściśliwy

Model lepkoplastyczny przedstawiony w punkcie II gwarantuje nieściśliwość materiału w zakresie plastycznym. Taką własność obserwujemy w przypadku metali. W niektórych przypadkach przyjmuje się również nieściśliwość w zakresie sprężystym, co odpowiada stosowaniu ułamka Poissona  $\nu = 0,5$ . Wówczas macierz sprężystości staje się nieokreślona ze względu na wyrażenie  $(1 - 2 \cdot \nu)$  w mianowniku. Możliwości rozwiązywania takich problemów zostały omówione ogólnie w pracy [7]. Jednakże w konkretnym przypadku konieczny jest wybór sposobu traktowania nieściśliwości dający gwarancję możliwie dokładnego rozwiązania. W pracy zastosowano często stosowany sposób polegający na przyjęciu ułamka Poissona o wartości bliskiej 0,5. Wybór ten podyktowany był własnościami procedury. Zwróćmy uwagę na równanie (2.7) określające macierz sprężysto-lepkoplastyczną. W przypadku wartości bliskich 0,5 macierz sprężystości posiada elementy o dużych wartościach. Z kolei macierz podatności  $D^{-1}$  ma elementy o małych wartościach, odwrotnie proporcjonalne do elementów macierzy  $D$ . Ten fakt powoduje, że w równaniu (2.7) dominuje drugi człon sumy wynikający ze stosowania modelu lepkoplastycznego. W równaniach (2.6) oraz (2.9) występuje iloczyn  $D^{-1} X_{n+1}^i$ . Ze względu na postać wektora  $X_{n+1}^i$  i własność macierzy podatności  $D^{-1}$  możemy stwierdzić, że powyższy iloczyn będzie równy wektorowi o skończonych wartościach. Decydujący ze względu na efektywność algorytmu będzie moment startu, gdy  $\sigma = 0$ . Wówczas drugi człon sumy związany z pochodnymi cząstkowymi przyjmie wartości zerowe i macierz  $D'' = D' = D$ . W miarę narastania odkształceń niesprężystych zwiększa się dominacja drugiego członu, a zmniejsza się wpływ wyrażenia  $(1 - 2 \cdot \nu)$ .

W pierwszym punkcie zaznaczyliśmy, że model lepkoplastyczny pozwala dla proporcjonalnego obciążania w prosty sposób generować rozwiązania dla plastyczności

Rozwiązanie plastyczne otrzymuje się jako graniczne rozwiązanie dla dużych czasów. Wówczas osiągamy stan stacjonarny i dalszy przyrost odkształceń plastycznych jest zerowy. Czas gra rolę fikcyjnego parametru. Również wielkość  $\gamma$  określana jako lepkość może przyjmować dowolną wartość bez wpływu na wynik obliczeń. Rozwiązanie sprężysto-epkopiastyczne dąży asymptotycznie do rozwiązania sprężysto-plastycznego. Z tego względu można weryfikować procedurę porównując wyniki obu metod tzn. sprężysto-lepkoplastyczności (stan stacjonarny) i sprężystoplastyczności. Należy podkreślić, że w MES rozwiązanie dla plastyczności otrzymuje się iteracyjnie lub przyrostowo. Zawsze na każdym etapie rozwiązywania problemem jest niedokładne spełnienie kryterium uplastycznienia  $\sigma_{kint} = \sigma_e$ . Stan naprężenia musi znaleźć się na powierzchni plastyczności i nie może jej przekroczyć. Takie przejście graniczne jest trudne do spełnienia numerycznie dla każdego punktu Gaussa całkowania numerycznego. Wykorzystanie modelu lepko-plastycznego omija ten problem dając rozwiązanie asymptotyczne i z tego względu jest konkurencyjne mimo pewnych wad [1, 6].

#### 4. Weryfikacja procedury

Do obliczeń wybraliśmy przykład rury grubościenniej nieskończenie długiej obciążonej ciśnieniem wewnętrznym. Przykład ten jest rozwiązany w literaturze i często jest stosowany do weryfikacji procedur numerycznych [1 ÷ 3]. Zastosowano prawo (2.1) z funkcją potęgową  $\Phi(F) = F^n$ .

Dane materiałowe przyjęliśmy tak jak w pracy [2]:

moduł Younga  $E = 3 \cdot 10^7$ ,

ułamek Poissona  $\nu = 0.495$  do  $0.499999995$ ,

granica plastyczności  $\sigma_e = 3 \cdot 10^4$ ,

wskaźnik potęgowania  $n = 1$ , promień wewnętrzny  $a = 1$ ,

lepkość  $\gamma = 1 \cdot 10^{-8}$ , promień zewnętrzny  $b = 2$ ,

współczynnik wzmocnienia  $c = 1,15 \cdot 10^7$ .

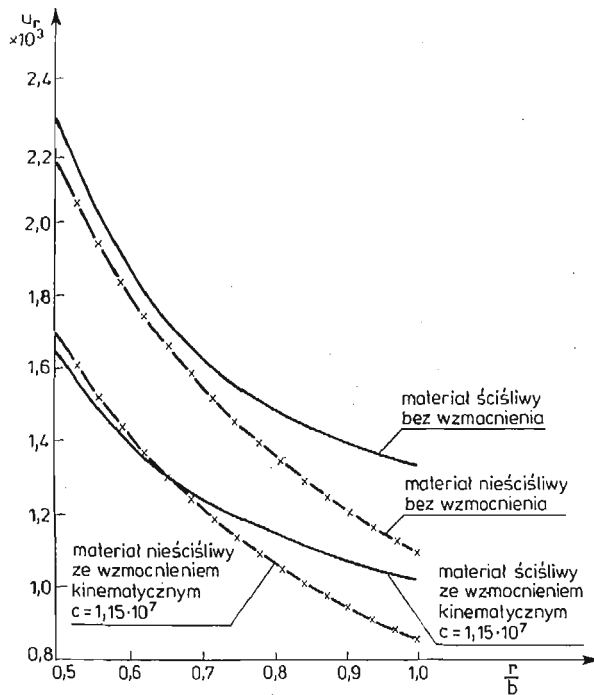
Zastosowano osiowo-symetryczne trójwęzłowe elementy Lagrange'a z ograniczoną możliwością odkształceń  $\epsilon_x = 0$  w kierunku osi symetrii oraz całkowanie numeryczne dwupunktowe kwadraturą Gaussa. Dyskretyzowano przekrój na 8 elementów z globalnie 17 węzłami. Wykonane obliczenia miały na celu potwierdzenie rozważań teoretycznych związanych z bezwarunkową stabilnością dla  $\theta \geq 1/2$  i dowolnie dużych przyrostów czasu  $\delta t$  oraz zbadanie wpływu wartości ułamka Poissona na dokładność i efektywność procedury. Ponieważ można uzyskać rozwiązanie sprężysto-plastyczne dla dużych czasów, z tego względu przyjęto przyrost czasu  $\delta t = 10^{10}$ . Przyrost ten umożliwia osiągnięcie stanu ustalonego już w drugim przyroście. Rozwiązaniem startowym było rozwiązanie czysto sprężyste. Przyjęto ciśnienie wewnętrzne  $p = 22420$ , które powoduje zarówno w przypadku bez wzmocnienia jak i ze wzmocnieniem znaczne uplastycznienie przekroju rury.

Zagadnienie rury grubościenniej nieskończenie długiej i obciążonej ciśnieniem wewnętrznym dla materiału nieściśliwego bez wzmocnienia redukuje się do prostych równań względem naprężeń [5]. W MES możliwe jest rozwiązanie tego zagadnienia poprzez przy-

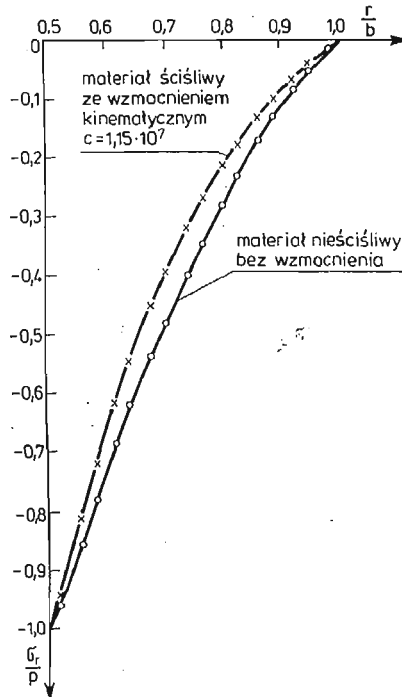
jęcie ułamka Poissona bliskiego wartości 0,5. W oparciu o opracowaną procedurę rozwiązano powyższe zagadnienie przyjmując różne wartości ułamka Poissona coraz bliższe 0,5. Praktycznie już dla wartości  $\nu = 0,495$  otrzymuje się bardzo zadowalające wyniki zarówno w zakresie przemieszczeń jak i naprężeń w przypadku bez oraz ze wzmocnieniem kinematycznym (rys. 1÷4). Przyjmowanie wartości coraz bliższych 0,5 nie powoduje znaczących zmian w wynikach. Różnice nie przekraczają przy tym 1%. Trzeba ponadto zaznaczyć, że aż do wartości  $\nu = 0,49999995$  nie występują zaburzenia w wynikach, co świadczy o dobrych własnościach procedury. Dopiero przyjęcie  $\nu = 0,499999995$  powoduje gwałtowne perturbacje w wynikach począwszy od rozwiązania sprężystego. Należy dodać, że wzrost wartości ułamka Poissona powoduje niekiedy wzrost liczby przyrostów potrzebnych w celu uzyskania stanu ustalonego. Powyższe obliczenia porównano dla materiału ściśliwego w zakresie sprężystym (rys. 1÷4). Praktycznie jedynie dla naprężenia osiowego  $\sigma_z$  widać istotne różnice pomiędzy materiałem ściśliwym a nieściśliwym. Wszystkie obliczenia zamieszczone na poniższych rysunkach wykonano dla parametru aproksymacji liniowej  $\Theta = 1$  i ułamka Poissona  $\nu = 0,495$  otrzymując stan ustalony w drugim przyroście przy nieprzekraczaniu pięciu iteracji. Warunek plastyczności w strefie plastycznej został spełniony idealnie w każdym punkcie Gaussa (błąd 0%). Obliczenia wykonano w podwójnej precyzji na komputerze SM4.

Następnie dla różnych wartości parametru aproksymacji  $\Theta$  testowano zachowanie się procedury związane z wpływem wartości ułamka Poissona  $\nu = 0,495$ . Obliczenia przeprowadzono dla przypadku bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym. Wpływ parametru aproksymacji możemy obserwować na podstawie spełnienia warunku plastyczności, tzn. poprzez statyczną funkcję uplastycznienia  $F = \frac{\sigma_{kint}}{\sigma_e} - 1$ . W przypadku osiągnięcia granicy plastyczności funkcja  $F$  przyjmuje wartość zero. W celu analizy wpływu parametru aproksymacji liniowej przyjmijmy różne wartości parametru dla naprężeń  $\Theta_\sigma$  oraz odkształceń niesprężystych  $\Theta_\epsilon$ . Przyjęcie obu wartości równych zero powodowało niestabilność numeryczną procedury zarówno w przypadku bez wzmocnienia, jak i ze wzmocnieniem kinematycznym (dla przyrostów czasu  $\delta t$  większych niż  $10^8$ ). W przypadku

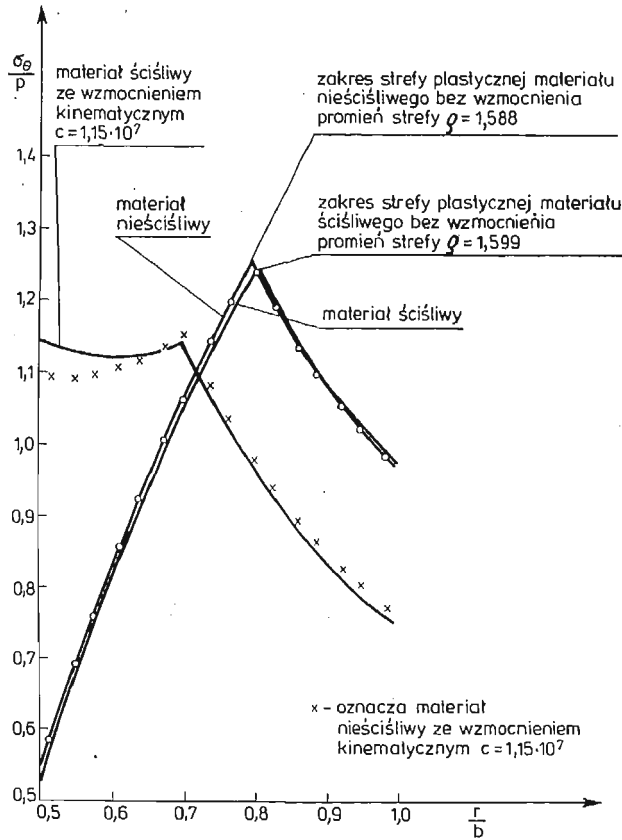
bez wzmocnienia, gdy  $\Theta_\epsilon = 0$  otrzymujemy algorytm stabilny dla  $\Theta_\sigma \geq \frac{1}{2}$ , jednakże, im mniejsza wartość  $\Theta_\sigma$ , tym mniejsza dokładność wyników (rys. 5); zwłaszcza dla granicznej wartości  $\Theta_\sigma = 0,5$  obserwujemy duże zaburzenia. W przypadku ze wzmocnieniem kinematycznym najbardziej interesujący jest wpływ drugiego parametru aproksymacji, tzn.  $\Theta_\epsilon$  (przy  $\Theta_\sigma = 1$ ). Jeżeli  $\Theta_\epsilon = 0$ , to pomijamy wpływ pochodnej cząstkowej względem  $\epsilon^a$  i procedura jest typu Newtona-Raphsona dla  $\sigma$  oraz początkowych obciążeń dla  $\epsilon^a$ . Wówczas macierz wzmocnienia  $G = I$  (patrz wzór 2.8). Okazuje się, że taki przypadek prowadzi do bardzo dużych błędów (rys. 6). Wzrost wartości  $\Theta_\epsilon$  zdecydowanie polepsza dokładność i w przypadku, gdy  $\Theta_\sigma = \Theta_\epsilon = 1$  otrzymuje się bardzo dobre wyniki (niezależnie od wartości przyrostu  $\delta t$ ). Należy zaznaczyć, że nie obserwowano znaczących różnic w wartościach funkcji uplastycznienia  $F$  dla ułamków Poissona bliskich 0,5 (rys. 6, 7).



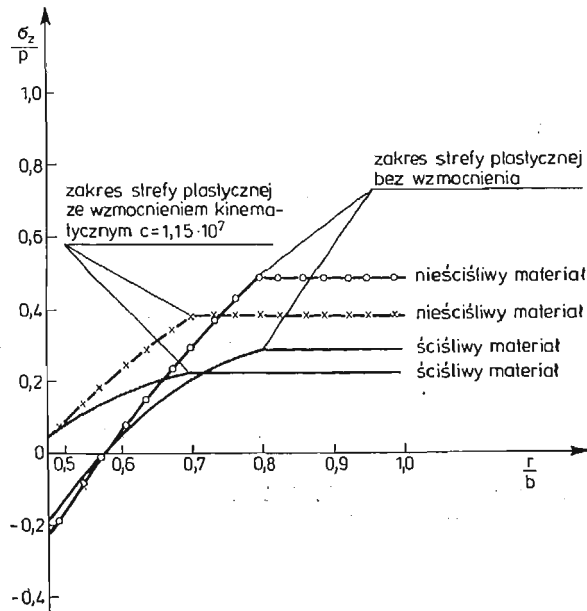
Rys. 1. Rura grubościenna. Wykresy przemieszczeń promieniowych  $u_r$  dla materiału nieściśliwego i ściśliwego. Przyjęto materiał bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym. Zastosowano 8 elementów; wartości przemieszczeń w węzłach; linie ciągłe — rozwiązanie ścisłe [5]



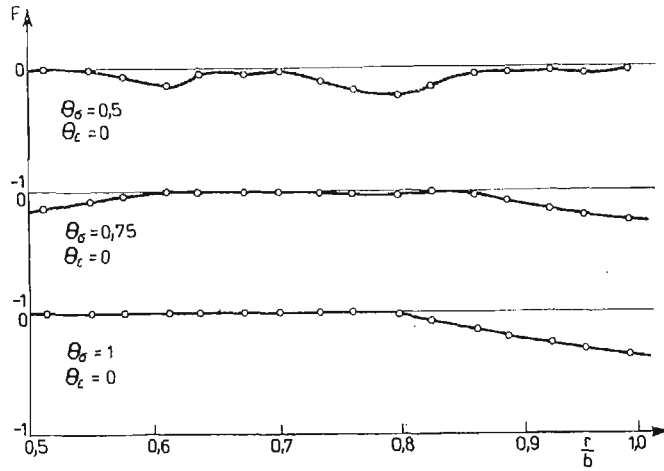
Rys. 2. Wykresy naprężeń promieniowych  $\sigma_r$  dla rury grubościennej z materiału ściśliwego i nieściśliwego;  $p$  — oznacza ciśnienie wewnętrzne;  $r$  — promień; linie ciągłe — obliczenia ścisłe [5]. Przyjęto materiał bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym. Wartości naprężeń w punktach Gaussa; zastosowano 8 elementów



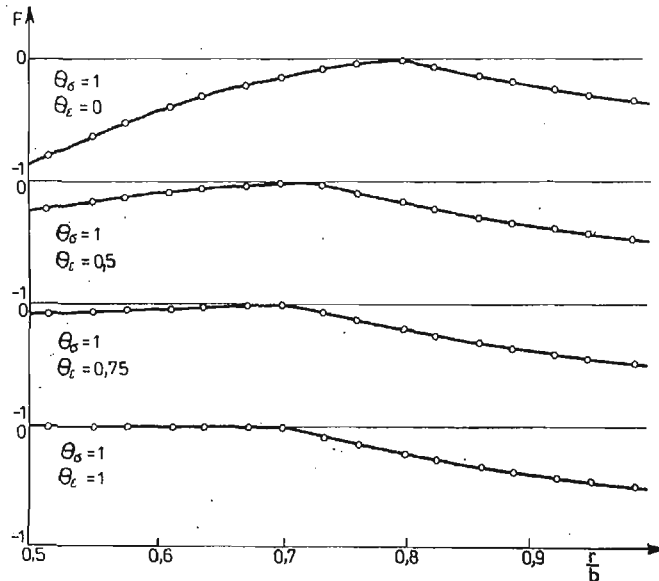
Rys. 3. Rura grubościenna. Wykresy naprężeń obwodowych dla materiału ściśliwego i nieściśliwego. Przyjęto materiał bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym. Linie ciągłe — obliczenia porównawcze [5]; wartości naprężeń w punktach Gaussa



Rys. 4. Rura grubościenna. Wykresy naprężeń osiowych  $\sigma_z$  dla materiału ściśliwego i nieściśliwego. Przyjęto materiał bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym. Wartości naprężeń w punktach Gaussa; zastosowano 8 elementów i dwupunktową kwadraturę Gaussa

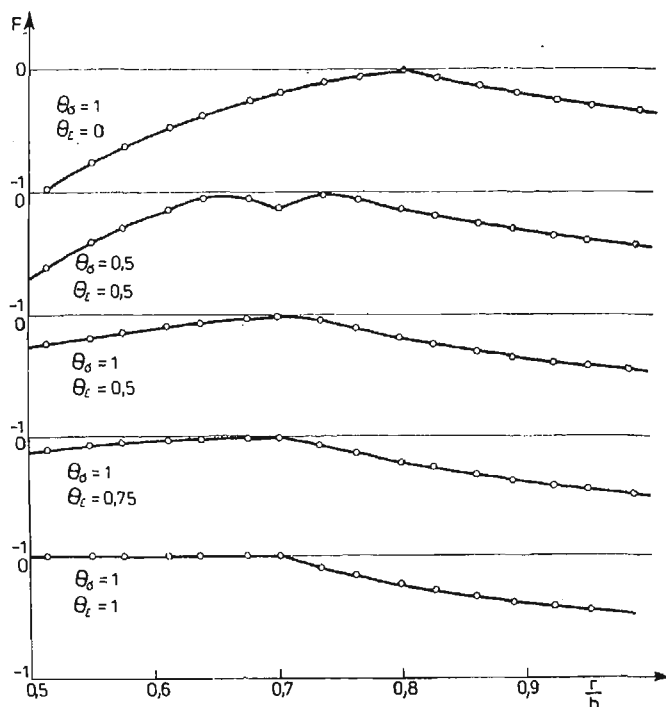


Rys. 5. Zależność statycznej funkcji uplastycznienia  $F$  od parametrów aproksymacji liniowej  $\Theta$ . Przypadek bez wzmocnienia



Rys. 6. Zależność statycznej funkcji uplastycznienia  $F$  od parametrów aproksymacji liniowej  $\Theta$ . Przypadek ze wzmocnieniem kinematycznym





Rys. 7. Analogiczny wykres jak na rys. 6; przypadek materiału ściśliwego z ułamkiem Poissona  $\nu = 0.3$

## 5. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych rozważań i weryfikacji numerycznej można stwierdzić, że procedura typu Newtona-Raphsona jest bezwarunkowo stabilna dla parametrów aproksymacji liniowej  $\theta \geq \frac{1}{2}$ . Umożliwia ona efektywne rozwiązywanie zagadnień quasi-statycznej sprężysto-lepkoplastyczności oraz sprężysto-plastyczności dla różnych wartości ułamka Poissona praktycznie dowolnie bliskich 0,5, co odpowiada przyjęciu materiału nieściśliwego.

## Literatura

1. J. H. ARGYRIS, L. F. VAZ, K. J. WILLAM, *Improved solution methods for inelastic rate problems*, Comp. Meth. App. Mech. Eng. 16, 31 - 77, 1978.
2. M. BANYŚ, *Rozwiązywanie problemów quasi-statycznej sprężysto-lepkoplastyczności ze wzmocnieniem kinematycznym*, Mech. Teor. i Stos. (w druku).
3. T. J. R. HUGHES, R. L. TAYLOR, *Unconditionally stable algorithms for quasistatic elasto-visco-plastic finite element analysis*, Comp. Struct. 8, 169 - 173, 1978.
4. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, 1966.
5. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley, 1951.

6. O. C. ZIENKIEWICZ, I. CORMEAU, *Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solids — a unified numerical solution approach*, Int. J. Num. Meth. Eng. 8, 821 - 845, 1974.
7. O. C. ZIENKIEWICZ, *Viscoplasticity, plasticity, creep and viscoplastic flow-problems of small, large and continuing deformations*, Computational Mechanics, ed. J. T. Oden, Austin, Texas, 297 - 328, 1974.

Р е з ю м е

КВАЗИ-СТАТИЧЕСКАЯ УПРУГО ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТЬ ДЛЯ  
НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ.

Применен метод конечных элементов для квазистатических проблем упруго вязкопластичности с учетом кинематического упрочнения. Принят несжимаемый материал в упругой области для числа Пуассона близкого 0.5. Не наблюдалось значительное влияние числа Пуассона на снижение эффективности алгоритма области стабильности как и точности. Для параметра аппроксимации  $\Theta = 1$  и число Пуассона  $\nu = 0.495$  получены очень удовлетворительные результаты для несжимаемых материалов.

S u m m a r y

QUASI — STATIC ELASTO — VISCOPLASTICITY FOR INCOMPRESSIBLE MATERIAL  
SOLUTION BY FEM.

The finite element method has been applied to quasi-static elasto-viscoplasticity with kinematic hardening. Incompressible material in the elastic range has been considered for the Poisson ratio close to 0.5. The substantial influence of the Poisson ratio on deterioration of the algorithm effectiveness in the range of stability and accuracy was not observed. The satisfactory result for the incompressible material with application of parametr  $\Theta = 1$  and the Poisson ratio  $\nu = 0.495$  has been obtained.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 30 marca 1987 roku.*