

OPIS STANU ZARYSOWANIA LEPKOSPŘŻYSTEJ TARCZY W UJĘCIU DYSTRYBUCYJNYM

MACIEJ MINCH

Politechnika Wroclawska

W pracy wyprowadzono równanie różniczkowe lepkospřżystej tarczy zarysowanej. Wykorzystując zasadę wariacyjną typu Gurtina, aparat teorii funkcji uogólnionych oraz przyjmując związki fizyczne dane ogólnym przedstawieniem całkowym Boltzmannna, wyprowadzono równanie różniczkowe płaskiego stanu naprężenia w materiale liniowo lepkospřżystym. W równaniu tym warunki brzegowe, początkowe oraz graniczne w rysie zawarte są *explicite*. Podano przybliżony sposób rozwiązania wychodząc z analogii sprężysto-lepkospřżystej.

1. Wprowadzenie

W ramach liniowej teorii sprężystości istnieje wiele modeli opisujących zachowanie się ciał z defektami. Prace te rozwijają się w dwóch kierunkach. Pierwszy z nich wykorzystuje dyskretny model obliczeń (metoda różnic skończonych, metoda elementów skończonych) [4, 9, 12]. Globalny obraz efektów zarysowania otrzymany w tych pracach jest poprawny, jednak zaburzenia w miejscach rys są z założenia niedokładne. Drugi kierunek polega na formułowaniu różnych modeli matematycznych dla ciał kruchych z defektami. Literatura w tej dziedzinie jest niezwykle bogata. Wymienić tu można m.in.: pracę [18], w której rozwiązań poszukuje się poprzez przekształcenia całkowite i wprowadzenie funkcji zmiennych zespolonych oraz prace [11, 19] gdzie podano teorie defektów. Teorie te polegają na budowaniu pewnych potencjałów modelujących defekt.

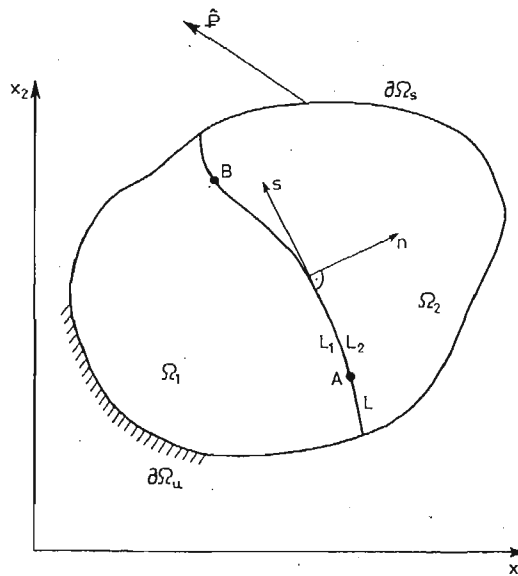
Wykorzystanie matematycznych modeli dla ciał kruchych w konstrukcjach z betonu zbrojonego napotyka jednak na pewne trudności. Dlatego też teorie żelbetu rozwijają się niezależnie, choć wykorzystują również rozwiązania matematycznych teorii defektów. Żelbetowe tarcze zarysowane projektuje się do dzisiaj jako sprężyste, jednorodne i izotropowe. Taki model obliczeniowy, przyjęty już kilkadziesiąt lat temu, wykazuje wiele sprzeczności. W przedziale obciążeń użytkowych w konstrukcji tarczy obserwuje się niejednorodności występujące w postaci rys oraz deformacji reologicznych i plastycznych. W tarczy takiej zachodzi znaczna redystrybucja sił wewnętrznych, w porównaniu do jej stanu sprężystego. Wniosek ten potwierdzony został także licznymi doświadczeniami.

W modelu teoretycznym konieczne jest zatem przyjęcie takiego sposobu opisu, aby można było uwzględnić w nim obserwowane nieciągłości deformacji. Odbywać się to może przez przyjęcie przemieszczeń w szerszej klasie funkcji, tzn. w klasie funkcji uogólnionych lub inaczej dystrybucji. Podejście takie dla konstrukcji żelbetowych belek, płyt i tarcz prezentują np. prace [1, 2, 5, 15]. Przyjęte w nich modele nie uwzględniają jednak zjawisk reologicznych w betonie poza miejscami defektów. Dla większości materiałów ich zachowanie w procesie odkształcenia odbiega od założeń przyjętych w liniowej teorii sprężystości. Istnieje zatem potrzeba dalszego uściślenia modeli przez uwzględnienie w opisie własności materiału zmiany odkształceń w czasie i ich wpływu na stan konstrukcji.

W niniejszej pracy wyprowadzono równanie różniczkowe płaskiego stanu naprężenia w ramach liniowej lepkosprężystości. Związki fizyczne przyjęto w formie ogólnego przedstawienia całkowego Boltzmanna. Podano przybliżony sposób rozwiązania wychodząc z analogii sprężysto-lepkosprężystej oraz określono związek fizyczny w rysie.

2. Założenia

Rozważa się jednorodną i izotropową tarczę cienką, której powierzchnia środkowa zajmuje obszar Ω parametryzowany kartezjańskim układem współrzędnych x_α , $\alpha = 1, 2$, ograniczoną dowolnym konturem $\partial\Omega$, na brzegu $\partial\Omega_u$ sztywno zamocowaną, ze swobodnym brzegiem $\partial\Omega_s$ i statycznym obciążeniem zewnętrznym \hat{p} (rys. 1). Ponadto obszar tarczy Ω podzielony jest pojedynczą, niepropagującą się rysą krzywoliniową L , kawałkami gładką w R^2 , na dwa podobszary Ω_1 i Ω_2 . Zakłada się, że rysa obejmuje całą grubość tarczy, przy czym L_1 i L_2 , stanowią odpowiednio lewy i prawy brzeg rysy $L = L_1 \cup L_2$. Przyjęcie większej liczby rys poza komplikacją natury rachunkowej nie wniesie nic nowego do przeprowadzanych tu rozważań.



Rys. 1. Rozpatrywany obszar tarczy Ω z rysą na krzywej L .

Warunki brzegowe zadania mają następującą postać:

— warunki przemieszczeniowe

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{na} \quad \partial\Omega_u \quad (2.1)$$

— warunki naprężeniowe

$$\mathbf{S}\mathbf{n} = \hat{\mathbf{p}} \quad \text{na} \quad \partial\Omega_s \quad (2.2)$$

Tutaj $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ oznaczają odpowiednio wektor przemieszczenia i tensor naprężenia określone czasoprzestrzennie, natomiast $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{p}}$ są funkcjami wektorowymi zadanymi odpowiednio na brzegach $\partial\Omega_u$ i $\partial\Omega_s$, zaś \mathbf{n} jest wektorem normalnym zewnętrznym do brzegu $\partial\Omega$.

Ponadto do warunków brzegowych zewnętrznych (2.1) i (2.2) dołączyć należy jeszcze warunek graniczny w rysie, w której przemieszczenie $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ doznaje skoku

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]_L = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in L, \quad (2.3)$$

gdzie $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ jest funkcją gęstości defektu ciągłą na krzywej L , zaś symbol $[f]_L$ oznacza różnicę prawostronnej i lewostronnej granicy funkcji f przy przejściu przez krzywą L .

Postać funkcji gęstości defektu może być przyjmowana w różny sposób w zależności od działania wymuszającego pola deformacji lub obciążeń na brzegi tarczy lub bezpośrednio w rysie. Jest ona przedmiotem oddzielnych badań [15]. Szerszy komentarz dotyczący gęstości defektu $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ dla konstrukcji betonowych ze zbrojeniem podany będzie w dalszej części pracy.

Całość dotychczasowych rozważań dotyczyła szczególnego przypadku rysy dzielącej obszar Ω na dwie części. Można wykazać [1], że uogólnienie na przypadek rysy wewnętrznej (np. na łuku \widehat{AB} — rys. 1) w niczym nie zmienia przeprowadzanych rozważań. Sprowadza się to do przyjęcia na pozostałej części krzywej L warunku:

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]_L = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \notin \widehat{AB}, \quad (2.4)$$

oraz związków definiujących zachowanie się funkcji gęstości defektu na końcach rysy:

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial s}(A) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial s}(B) = 0. \quad (2.5)$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że przyjęcie na krzywej L warunku (2.3) powoduje konieczność przeprowadzenia rozważań w klasie funkcji uogólnionych, stąd w dalszych działaniach opierano się na definicjach i związkach teorii dystrybucji podanych przez Schwartza [17]. Są one znane i nie wymagają tu przypomnienia. Można jedynie zaznaczyć, że w przypadku opisu zadania płaskiego dotyczą działań w przestrzeni $(D(\Omega))^2$ dwuwymiarowych wektorowych funkcji próbnych (gdzie Ω jest dowolnym otwartym obszarem przestrzeni euklidesowej R^2).

W dalszych rozważaniach, ze względu na dowolne zarysowanie tarczy wzdłuż krzywej L wynikające z wymuszającego pola obciążeń lub deformacji, istotne znaczenie mają dystrybucje singularne typu delta (będące uogólnieniem funkcji δ — Diraca), o danej gęstości ψ skoncentrowanej na krzywej $L \subset R^2$, których własności definiuje się nastę-

pująco [1]:

$$\langle \psi \delta_L, \varphi \rangle = \int_L \psi(x) \varphi(x) ds, \quad (2.6)$$

oraz pochodna dystrybucji na krzywej L wynikająca bezpośrednio z definicji dystrybucji regularnych:

$$\langle D^\alpha(\psi \delta_L), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_L \psi(x) D^\alpha \varphi(x) ds, \quad (2.7)$$

gdzie: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$.

Tutaj funkcja $\psi(x)$ jest funkcją ciągłą na krzywej L , zaś całki po prawej stronie wzorów (2.6) i (2.7) są całkami krzywoliniowymi po krzywej L .

Wynika stąd, że funkcjonały sformułowane powyżej dla jednostkowych gęstości funkcji ψ mają analogiczną własność odsiewającą jak funkcja typu δ — Diraca, polegającą na przyjmowaniu wartości funkcji φ lub jej pochodnych dla argumentów x leżących na krzywej L .

Obszerniejsze wyjaśnienie dystrybucji skoncentrowanych na krzywej, ich definicje i interpretacje dla zagadnień dwuwymiarowych znaleźć można w pracy [8], skąd po pewnych prostych przekształceniach można otrzymać m.in. własność (2.6).

3. Równanie różniczkowe lepkosprężystej tarczy zarysowanej

Rozpatruje się zachowanie lepkosprężystej tarczy zarysowanej zgodnie z założeniami podanymi w rozdziale 2.

Podstawowy układ równań płaskiego stanu naprężenia składa się z:

— równań równowagi:

$$\operatorname{div} S + b = 0, \quad (3.1)$$

— związków geometrycznych [3]:

$$E = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) = \hat{\nabla} u, \quad (3.2)$$

oraz związków fizycznych danych ogólnym przedstawieniem całkowym Boltzmanna [16]:

$$S = \int_0^t \psi_1(t-\tau) \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t [\psi_2(t-\tau) - \psi_1(t-\tau)] \mathbf{1} \frac{\partial \operatorname{tr} E}{\partial \tau} d\tau \quad (3.3)$$

Tutaj $E(x, t)$ i $b(x, t)$ oznaczają odpowiednio tensor odkształcenia i wektor sił masowych określone czasoprzestrzennie, ψ_1 i ψ_2 są pewnymi funkcjami relaksacji, zaś $\mathbf{1}$ jest tensorem jednostkowym.

Układ równań pola (3.1)÷(3.3) jest spełniony w przestrzeni $\Omega \times [0, \infty)$, gdzie $[0, \infty)$ jest przedziałem czasowym.

Do układu równań pola (3.1)÷(3.3) należy jeszcze dołączyć warunki brzegowe (2.1) i (2.2) oraz warunek początkowy na tensor odkształcenia

$$E(\cdot, 0) = E^0. \tag{3.4}$$

Tutaj wskaźnik „0” oznacza wielkość odkształcenia w chwili początkowej $t = 0$.

Wykorzystując rachunek operatorowy Mikusińskiego [13], można zapisać równanie (3.3) w alternatywnej postaci:

$$1 * S = \psi_1 * E + \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) * 1 \operatorname{tr} E - F, \tag{3.5}$$

gdzie:

$$F = \psi_1 * E^0 + \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) * 1 \operatorname{tr} E^0. \tag{3.6}$$

Mnożenie splotowe względem czasu oznaczono z poniższego związku:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau. \tag{3.7}$$

Do opisu omawianego zagadnienia wykorzystano, na podstawie analogii sprężystej, splotową zasadę wariacyjną typu Gurtina [6, 7], stowarzyszoną z układem równań pola (3.1)÷(3.3) oraz warunkami brzegowymi (2.1)÷(2.3) i warunkiem początkowym (3.4). Przyjęto funkcjonal postaci:

$$J(u) = \int_{\Omega} U d\Omega - \int_{\Omega} 1 * b * u d\Omega - \int_{\partial\Omega} 1 * \hat{p} * u d\partial\Omega, \tag{3.8}$$

gdzie:

$$U = \psi_1 * \left(\frac{1}{2} \hat{\nabla} u - E^0 \right) * \hat{\nabla} u + \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) * \left(\frac{1}{2} \operatorname{div} u - \operatorname{tr} E^0 \right) * \operatorname{div} u, \tag{3.9}$$

jest funkcją energii odkształcenia będącą odpowiednikiem energii odkształcenia w teorii sprężystości.

Dalej oblicza się wariację funkcjonału (3.8):

$$\begin{aligned} \delta J = & - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left\{ \left[\psi_1 * \nabla^2 + \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) * \operatorname{grad} \operatorname{div} \right] u + \right. \\ & \left. + 1 * b - \operatorname{div} F \right\} \delta u d\Omega + \\ & + \int_{\partial\Omega_s} [1 * \hat{p} - P(u)] \delta u d\partial\Omega + \int_L P(u) \delta u ds, \end{aligned} \tag{3.10}$$

gdzie:

$$P(\cdot) = - \left[\mathbf{F} - \left(\psi_1 \hat{\nabla} + \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) * \text{div} \right) (\cdot) \right] \mathbf{n}, \quad (3.11)$$

jest analogią do operatora napiecia powierzchniowego w teorii sprężystości.

Jeżeli $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ jest kinematycznie dopuszczalnym przemieszczeniem (tzn. jeśli stanowi rozwiązanie zagadnienia (2.1)÷(2.3) i (3.1)÷(3.4)) to wariacja (3.10) równa się zeru. Z drugiej strony jeśli prawa strona równania (3.10) znika dla dowolnego wyboru $\delta \mathbf{u}$ to otrzymuje się przemieszczeniowe równanie różniczkowe tarczy lepkosprężystej:

$$\left[\psi_1 * \nabla^2 + \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) \text{grad div} \right] \mathbf{u} + 1 * \mathbf{b} - \text{div} \mathbf{F} = 0, \quad (3.12)$$

naturalne warunki brzegowe dotyczące brzegu swobodnego lub sztywnego (gdzie dla brzegu sztywnego warunek $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ sprowadza się formalnie do warunku $\delta(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})|_{\partial\Omega_u} = \mathbf{0}$ oznaczającego zgodnie z (2.1) wypadkową przemieszczenia \mathbf{u} na sztywnym brzegu $\partial\Omega_u$)

$$[P(\mathbf{u}) - 1 * \hat{\mathbf{p}}]|_{\partial\Omega_s} = \mathbf{0} \vee \delta \mathbf{u}|_{\partial\Omega_u} = \mathbf{0}, \quad (3.13)$$

oraz dodatkowy warunek graniczny w rysie wyrażający ciągłość wypadkowego wektora napieć przy przejściu przez rysę L :

$$[P(\mathbf{u})]_L = \mathbf{0}. \quad (3.14)$$

Pojawienie się ostatniej całki krzywoliniowej we wzorze (3.10) i w efekcie warunku (3.14), wynika z uwzględnienia dodatkowego brzegu wewnątrz obszaru Ω , tzn. linii rysy $L = L_1 \cup L_2$, gdzie L_1 i L_2 stanowią przeciwległe jej brzegi. Całkę tę można przekształcić do postaci, w której będzie liczona ona wzdłuż linii, a wielkości podcałkowe składać się będą z sumy dwu składników związanych z przemieszczeniem stycznym do rysy δu_s i przemieszczeniem normalnym do niej δu_n . Wyrazi się to formalnie przez cosinusy kierunkowe n_α ($\delta \mathbf{u} = \delta u_s n_1 + \delta u_n n_2$). Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, że dla brzegów L_1 i L_2 posiadają one przeciwne zwroty. Uzyska się w ten sposób w warunku (3.14) zasadę akcji i reakcji napieć stycznych i normalnych na brzegach rysy L . Warunek (3.14) przedstawia zatem warunek ciągłości wypadkowego wektora napieć przy przejściu przez rysę L .

W celu uproszczenia zadania brzegowego zarysowanej tarczy lepkosprężystej, równanie różniczkowe (3.12) ze stowarzyszonymi warunkami brzegowymi i warunkiem granicznym w rysie zastąpi się dalej równoważnym równaniem opisanym w terminach dystrybucji przy założeniu, że $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ należy do szerszej klasy funkcji, tzn. klasy funkcji uogólnionych. W tym celu formalnie oblicza się wyrażenia:

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 \mathbf{u}, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \{ \nabla^2 \mathbf{u} \} \varphi d\Omega - \\ &- \int_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{\partial}{\partial n} \mathbf{u} \right) \varphi - \left(\frac{\partial}{\partial n} \varphi \right) \mathbf{u} \right] d\partial\Omega + \\ &+ \int_L \left[\left(\frac{\partial}{\partial n} \mathbf{u} \right)_L \varphi - \frac{\partial}{\partial n} \varphi [\mathbf{u}]_L \right] ds, \end{aligned} \quad (3.15)$$

oraz:

$$\begin{aligned} \langle \text{grad div } \mathbf{u}, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \{ \text{grad div } \mathbf{u} \} \varphi d\Omega + \\ &+ \int_{\partial\Omega} (\text{div } \varphi \mathbf{u} - \text{div } \mathbf{u} \varphi) d\partial\Omega - \\ &- \int_L ([\mathbf{u}]_L \text{div } \varphi - [\text{div } \mathbf{u}]_L \varphi) n ds. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Tutaj $\{ \}$ oznacza różniczkowanie w zwykłym sensie, $[\mathbf{u}]_L$ oznacza skok wektora przemieszczenia przy przejściu przez rysę L , zaś φ jest dowolną funkcją niekoniecznie z przestrzeni D .

Po elementarnych przekształceniach wzoru (3.12), wykorzystaniu relacji (2.1) i (3.13) ÷ (3.16) oraz używając dystrybucji δ , zapisano równanie różniczkowe na wektor przemieszczenia $\mathbf{u}(x, t)$ w lepkospęrzyściej tarczy zarysowanej w postaci funkcjonalowej:

$$\begin{aligned} \left[\psi_1 * \nabla^2 + \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) * \text{grad div} \right] \mathbf{u} + 1 * \mathbf{b} - \\ - \text{div } \mathbf{F} = -P(\mathbf{g} \delta_L) + [1 * \hat{\mathbf{p}} - P(\mathbf{u})] \delta_s + P[(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \delta_n] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Otrzymano w ten sposób równanie różniczkowe na wektor przemieszczenia $\mathbf{u}(x, t)$ tarczy lepkospęrzyściej zarysowanej, które zawiera w sobie komplet warunków brzegowych zewnętrznych na brzegu $\partial\Omega$, warunki początkowe oraz spełnia warunek graniczny w rysie powodujący skok wektora przemieszczenia przy przejściu przez jej brzeg.

Zwrócić należy uwagę na podobieństwo równania (3, 17) do równania przemieszczeniowego zagadnienia płaskiego z rysą podanego w pracy [5]:

$$\begin{aligned} \mu \left(\nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) \mathbf{u} = \\ = -N(\mathbf{g} \delta_L) + (\hat{\mathbf{p}} - N(\mathbf{u})) \delta_s + N[(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \delta_n], \end{aligned} \quad (3.18)$$

gdzie N jest operatorem napięcia powierzchniowego

$$N(\cdot) = \mu \left(\hat{\nabla} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{1} \text{div} \right) (\cdot) \mathbf{n}. \quad (3.19)$$

Różnica polega na występowaniu w funkcjach relaksacji wielkości λ i μ zależnych od czasu.

4. Związek fizyczny w rysie

Postać funkcji gęstości $\mathbf{g}(x, t)$ decyduje o stopniu trudności rozważanego problemu, stąd konieczność jej szerszego omówienia. Przy wyprowadzaniu równania różniczkowego tarczy lepkospęrzyściej (3.17) przyjęto gęstość defektu $\mathbf{g}(x, t)$, opisującą skok wektora przemieszczenia w rysie zgodnie z równaniem (2.3), na tyle regularną na ile wymagają tego obliczenia. Aby uzyskać postać funkcji gęstości $\mathbf{g}(x, t)$ należy w tarczy żelbetowej rozpatrzyć warunki równowagi w rysie pamiętając przy tym, że po powstaniu rysy istnieje

w niej uzewnętrznione zbrojenie, które wzajemnie oddziałują na sąsiednie brzegi rysy. Staje się zatem oczywiste, że rozwarcie rysy zależy będzie od wielkości sił występujących w odkrytym zbrojeniu w rysie. Złożoność niektórych procesów zachodzących w elementach żelbetonowych wymaga poczynienia szeregu założeń upraszczających koniecznych do określenia związku fizycznego w rysie. Jako główne wymienić tu można: rozpatrywanie statycznego zjawiska zarysowania (bez efektów dynamicznych podczas pęknięcia rysy itp.), założenie braku oddziaływań betonu między sąsiednimi brzegami rysy (wzajemne ząbienie się betonu) co powoduje, że napięcia w rysie przenoszone są tylko przez zbrojenie, ponadto przyjęcie krzywoliniowego wykresu naprężenie — odkształcenie $\sigma - \epsilon$ dla betonu oraz modelu sprężystoplastycznego $\sigma - \epsilon$ dla stali zbrojeniowej.

Rozpatrzenie wyrunków równowagi w rysie oraz założeń przyjętych z ogólnej teorii rys pozwala na otrzymanie prawa fizycznego opisującego jej rozwieranie się w procesie obciążenia — odciążenia w następującej postaci:

$$g(x, t) = g_0(x, t) + g_1(x)T(x, t), \quad x \in \widehat{AB} \quad (4.1)$$

Tutaj $g_0(x, t)$ oznacza deformacje trwałe w rysie zależne od historii obciążenia (pamięć konstrukcji), natomiast $g_1(x)T(x, t)$ deformacje sprężyste zależne od wypadkowego wektora napięć $T(x, t)$ działającego w zbrojeniu rysy.

Wartości funkcji $g_0(x, t)$ i $g_1(x)$ zależą od parametrów wytrzymałościowych, geometrii rysy, charakterystyki zbrojenia itp. i są funkcjami ciągłymi punktów krzywej L .

Związek (4.1) jest związkiem lokalnym ważnym jedynie dla rysy tzn. $g(x, t) = 0$ dla $x \notin \widehat{AB}$. Szczegółowe wyprowadzenie prawa fizycznego opisującego rozwarcie rysy dane zależnością (4.1) znaleźć można w pracy [15].

Wykorzystując sformułowany związek fizyczny w rysie (4.1) możliwe jest podanie rozwiązania w formie analogii sprężysto-lepkosprężystej. Prowadzi to jednak do znacznych komplikacji natury matematycznej, stąd przybliżony sposób rozwiązania możliwy jest do podania jedynie w formie pewnej przybliżonej procedury postępowania.

Przyjmując zależność (4.1) dla zagadnienia sprężystego za pierwsze przybliżenie rozwiązania równania lepkosprężystego (3.17) można przedstawić sprężyste rozwiązanie równania (3.18) w formie równania różniczkowo-całkowego:

$$u(x) = \int_{\widehat{AB}} [g_0(y) + g_1(y)T(y)]N(G(x, y))ds + \\ + \int_S \{N(G(x, y))[u(y) - \hat{u}(y)] - G(x, y)[N(u(y)) - \hat{p}(y)]\}ds \quad (4.2)$$

gdzie $G(x, y)$ jest funkcją Greena spełniającą równanie:

$$\mu \left(\nabla^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad div} \right) G(x) = \delta(x) \quad (4.3)$$

oraz założone warunki brzegowe (2.1) i (2.2).

Tutaj symbol $\delta(x)$ oznacza deltę Diraca.

Rozwiązanie zagadnienia sprężystego sprowadza się zatem do wyznaczenia z zależności (4.2) nieznannej wartości wektora napięć działającego w przekroju zarysowanym.

Różniczkując obustronnie równanie (4.2) oraz wiążąc przemieszczenia $u(x)$ z siłami wewnętrznymi przy pomocy zależności (3.2) i związków fizycznych dla płaskiego zadania sprężystego:

$$S = 2\mu \left(E + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \text{tr} E \right) \quad (4.4)$$

oraz odpowiednich transformacji naprężeniowych, doprowadza się je do postaci, w której po lewej stronie równania i w wyrażeniu podcałkowym występują te same wielkości, tzn. otrzymuje się równanie całkowe. Jest to silnie osobliwe równanie całkowe z osobliwościami typu $\frac{1}{x}$, z rzędem osobliwości wynikającej z postaci funkcji Greena G (por. np. [14]).

Zatem rozwiązanie zmodyfikowanego równania całkowego (4.2) istnieje i jest możliwe w sensie wartości głównej całki krzywoliniowej po krzywej \widehat{AB} .

Ze względu na skomplikowaną budowę równania (4.2), a właściwie równania całkowego opisanego powyżej, otrzymanie rozwiązania możliwe jest jedynie w formie przybliżonej za pomocą metod numerycznych np. metodą całek brzegowych.

Przemieszczenia „stowarzyszonego” problemu sprężystego $u(x, t)$ przyjęte w oparciu o równanie (4.2) posłużą do rozwiązania statycznego zagadnienia lepkospężyłość zadania płaskiego ze stacjonarną rysą w postaci splotu:

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial \tilde{u}(x, \tau)}{\partial \tau} \varphi(t - \tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Tutaj φ jest pewną kombinacją pochodnych funkcji relaksacji lub pełzania. Analogiczny splotowy sposób rozwiązania dotyczy naprężeń i odkształceń.

Rozwiązanie równania (4.5) w połączeniu z równaniem (4.2) możliwe jest jedynie w sposób przybliżony za pomocą metod numerycznych. Wymienić tu można np. metodę kolokacji rozwiązania całek brzegowych dla ustalonych punktów czasowych oraz punktów brzegu. Odbywać się to może w następujący sposób. Wychodząc od chwili początkowej $t_0 = 0$, rozwiązuje się całki brzegowe zmodyfikowanego równania (4.2) dla stanu sprężystego metodą kolokacji do uzyskania żądanej dokładności. Uzyskany w ten sposób końcowy podział brzegu tarczy na punkty kolokacyjne nie ulega już zmianie w procesie dalszego rozwiązywania tarczy dla iteracji czasowej. W kolejnym kroku następuje przejście do chwili czasowej $t_1 = \Delta t$ i powtórne rozwiązywanie całek brzegowych z wykorzystaniem zależności uzyskanych w chwili t_0 . Dalsza iteracja czasowa przebiega do wartości końcowej $t_i = t_k$, przy czym wyliczone wielkości kroku t_{i-1} (przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia) wykorzystywane są w rozwiązaniu całek brzegowych kroku t_i . Wielkość przyrostów czasowych Δt zależy od żądanej dokładności rozwiązania. Ze względu na charakter funkcji pełzania możliwe jest tu przyjęcie w procesie iteracji czasowej zmiennego kroku całkowania Δt , z krokiem zwiększającym się proporcjonalnie do miary stabilizacji odkształceń w czasie dla ustalonego poziomu obciążenia konstrukcji.

Uproszczenie przedstawionego powyżej zapisu iteracyjnego uzyskać by można przez sformułowanie metody całek brzegowych czasoprzestrzennych jako analogii do znanej czasoprzestrzennej metody elementów skończonych. Metody te stanowią jednak osobny

rozdział przybliżonych rozważań matematycznych i wykraczają poza ramy niniejszego artykułu.

5. Podsumowanie

Równanie (3.17) zostało wyprowadzone przy założeniu związków konstytutywnych w formie ogólnych przedstawień całkowych Boltzmann'a. Przejście do modeli reologicznych, w których związki fizyczne opisane są operatorami różniczkowymi możliwe jest przez zastosowanie rachunku operatorów Mikusińskiego [13]. Przy czym mają miejsce związki

$$\begin{aligned} P_\alpha(t) * \Psi_\alpha(t) &= 1 * Q_\alpha(t), \\ Q_\alpha(t) * \Phi_\alpha(t) &= 1 * P_\alpha(t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

ponadto

$$\Psi_\alpha(t) * \Phi_\alpha(t) = t, \quad \text{dla } \alpha = 1, 2. \quad (5.2)$$

Tutaj Φ jest wektorem pełzania, zaś P_α i Q_α są pewnymi operatorami różniczkowymi. Jawną postać tych operatorów w poszczególnych modelach reologicznych znaleźć można w monografii [16]. Również przejście do modeli reologicznych betonu nie następuje większych trudności matematycznych.

Wyprowadzone globalne równanie różniczkowe opisuje model lepkosprężystej tarczy zarysowanej, będący uściśleniem sformułowanego wcześniej modelu zarysowanej tarczy sprężystej [5]. Pojawienie się w równaniu (3.17) warunków brzegowych wynika z zastosowania do analizy funkcji uogólnionych. Równanie to uwzględnia nieciągłość wektora przemieszczenia w miejscu rysy, zapewniając jednocześnie ciągłość wektora napięć przy przejściu przez krzywą L , zaś przybliżone rozwiązanie tego równania podano na podstawie analogii sprężysto-lepkosprężystej.

W dotychczasowych pracach technicznych przyjmujących rozwiązania w terminach dystrybucji [1, 2] otrzymano numeryczne rozwiązania zadań dla konstrukcji zarysowanych, które zweryfikowano z doświadczeniami, uzyskując pozytywną ocenę metody obliczeniowej. Pozwala to mieć nadzieję, że rozwiązanie w wyniku analizy numerycznej lepkosprężystej żelbetowej tarczy zarysowanej uściśli otrzymane wyniki w stosunku do analogicznej tarczy zarysowanej o modelu sprężystym.

Literatura

1. A. BARYŁA, E. SOBOCIŃSKA, *Teoria płyt żelbetowych z rysami*, PWN, Warszawa-Lódź 1983.
2. A. BORCZ, *Teoria konstrukcji żelbetowych, cz. I*, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1973.
3. D. E. CARLSON, *Linear thermoelasticity*, in *Encyclopedia of Physics, Mechanics of Solids II*, IVa/2, Springer, Berlin etc. 1972.
4. H. GEISTEEFELDT, *Stahlbetonscheiben im gerissenen Zustand-Berechnung mit Berücksichtigung der rissabhängigen Schubsteifigkeit im Materialgesetz*, Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig, Bericht nr 76 - 19, Braunschweig 1976.
5. J. GŁADYSZ, M. MINCH, *Wykorzystanie rachunku dystrybucyjnego do opisu tarczy zarysowanej*, *Mech. Teoret. i Stos.* 23, 3 - 4, 1985, 467 - 473.

6. M. E. GURTIN, *Variational principles for linear elastodynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal., 16, 1, 1964.
7. M. E. GURTIN, *Variational principles for linear initialvalue problems*, Q. Appl. Math., 22, 3, 1964.
8. G. JEMIELITA, *Zginanie płyt prostokątnych obciążonych wzdłuż krzywej*, Arch. Inż. Łąd., XIX, 1, 1973, 117 - 134.
9. Н. КАРПЕНКО, *Теория деформирования железобетона с трещинами*, Строиздат, Москва 1976.
10. J. KORTAS, *Etude de L'ouverture des fissures en fonction du temps dans les poutres en beton arme, on partiellement proceint*, Diss. Lyon 1975.
11. E. KOSSECKA, *Mathematical theory of defects, Part I., Statics*, Arch. Mech. Stos., 26, 6, 1974, 995 - 1010.
12. F. LEONHARDT, E. MÖNNING, *Vorlesungen über Massivbau*, vol. 2, Springer, Berlin 1975.
13. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
14. M. MINCH, *Funkcja Greena tarczy sprężystej*, Arch. Inż. Łąd., XXV, 1, 1979, 113 - 128.
15. M. MINCH, *Metoda teoretycznego wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach zarysowanych*, Rozpr. Inż., 28, 3, 1980, 445 - 468.
16. W. NOWACKI, *Teoria pelzania*, PWN, Warszawa 1963.
17. L. SCHWARTZ, *Theorie des distributions*, Paris 1966.
18. J. SNEDDON, *Zagadnienia szczelin w matematycznej teorii sprężystości*, PWN, Warszawa 1962.
19. H. ZORSKI, *Theory of discrete defects*, Arch. Mech. Stosow., 18, 3, 1966, 301 - 372.

Р е з ю м е

ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ДИСКА С ТРЕЩИНОЙ
В КЛАССЕ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

В работе выведено дифференциальное уравнение вязкоупругого диска с трещиной. Используя вариационный принцип типа Гуртина, класс обобщённых функций и физическую связь типа Больцмана, получено дифференциальное уравнение плоского напряжённого состояния для линейного вязкоупругого материала. В этом уравнении появляются краевые условия, начальные условия и внутренние условия в трещине. Представлено приближённый способ решения основан на упруго-вязкоупругой аналогии.

S u m m a r y

DESCRIPTION OF A CRACKED STATE OF A VISCOELASTIC
PLATE BY DISTRIBUTIONAL FORMULATION

The paper contains a mathematical model of viscoelastic plate with cracks loaded in its plane. The crack has been characterized by the discontinuity of the displacement vector. The distributional differential equation of the viscoelastic plate with crack, appropriate boundary conditions, initial conditions and compatibility conditions, have been derived by the variational method of Gurtin in the space of general Functions. An approximate method of solution resulting from the elastic — viscoelastic analogy has been given.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 stycznia 1987 roku.