

## ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA PRZEPŁYWU IDEALNEGO CZYNNIKA ŚCIŚLIWEGO W PALISADZIE PROFILI METODĄ WARIACYJNĄ

M. J. CIAŁKOWSKI

*Politechnika Poznańska*

### Wykaz ważniejszych oznaczeń

$w$	— wektor prędkości względnej
$\omega$	— wektor prędkości kątowej
$u$	— wektor prędkości obwodowej
$c$	— wektor prędkości bezwzględnej
$a$	— lokalna prędkość dźwięku
$\Phi$	— potencjał prędkości
$P$	— ciśnienie
$P_0$	— ciśnienie całkowite
$\rho$	— gęstość
$\kappa$	— wykładnik izentropy
$F_r$	— jednostkowa siła odśrodkowa
$F_{Cor}$	— jednostkowa siła Coriolisa
$V, H^1(\Omega)$	— przestrzeń Hilberta
$\Omega$	— obszar przepływu
$\partial\Omega$	— brzeg obszaru $\Omega$
$\hat{n}$	— jednostkowy wektor normalny do brzegu

W zagadnieniach przepływowych maszyn wirnikowych ważną rolę odgrywa wyznaczenie pól prędkości, ciśnień, gęstości itp. W związku z rozwojem metod numerycznych oraz elektronicznych maszyn cyfrowych stało się możliwe wyznaczenie rozkładów prędkości dla niektórych ważnych technicznie przypadków. W niniejszej pracy wyprowadzono funkcjonal energii dla przepływu potencjalnego czynnika ściśliwego z uwzględnieniem doprowadzenia pracy w kole wirnikowym. Minimalizacja funkcjonału energii jest równoważna równaniom ruchu [12]. Ujęcie opisu przepływu w postaci całki energii jest bardzo wygodne do stosowania metody elementu skończonego, która w naturalny sposób pozwala uwzględnić nieregularne obszary. Wariacyjne (energetyczne) ujęcie różnych przy-

padków przepływu czynnika ściśliwego było przedmiotem prac [2, 3, 5, 6, 8]. Dla przepływu transonicznego w maszynach przepływowych szereg pozycji bibliograficznych jest przedstawionych w pracy [13]. W niniejszej pracy zbadano możliwość minimalizacji funkcjonału energii za pomocą metody odwzorowania zwięźającego oraz metody Newtona dla przepływu poddźwiękowego i transonicznego. W końcowej części pracy przedstawiono algorytm znalezienia rozwiązania w obszarze dyskretnym dla przypadku stacjonarnego przepływu przez płaską palisadę profilów.

### 1. Podstawowe równania

— Równanie ruchu.

Równanie to dla przypadku stacjonarnego ma postać [4]:

$$\frac{D\mathbf{w}}{dt} = \nabla \left( \frac{1}{2} w^2 \right) - \mathbf{w} \cdot \text{rot } \mathbf{w} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P,$$

lub po obustronnym pomnożeniu przez  $\mathbf{w}$ :

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{1}{2} w^2 \right) = \mathbf{w} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} w^2 \right) = \mathbf{w} \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathbf{w} \nabla P, \quad (1)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_{cor}.$$

— Równanie ciągłości przepływu:

$$\text{div}(\rho \mathbf{w}) = 0 \quad \text{lub} \quad \rho \text{div } \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (2)$$

— Równanie energii.

W maszynach przepływowych wygodnie jest używać równania energii nie w postaci różniczkowej lecz skończonej. Ma to miejsce szczególnie w przypadkach, w których następuje doprowadzenie (względnie odprowadzenie) pracy. W adiabatycznym przepływie stacjonarnym ilość pracy przekazanej czynnikowi wzdłuż linii prądu wyraża zależność [1, 9]:

$$I_t = i_2 - i_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2). \quad (3)$$

Przekazana praca może być wyrażona również równaniem Eulera dla maszyn przepływowych w postaci:

$$I_t = u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u} = \mathbf{u}_2 \mathbf{c}_2 - \mathbf{u}_1 \mathbf{c}_1. \quad (4)$$

Z porównania (1) i (2) otrzymujemy nową funkcję  $I$  zwaną rotalpią:

$$I = i_1 + \frac{1}{2} c_1^2 - u_1 c_{1u} = i_2 + \frac{1}{2} c_2^2 - u_2 c_{2u} = i + \frac{1}{2} c^2 - u c_u = \text{const}. \quad (5)$$

Z trójkąta prędkości (rys. 1) wynika, że iloczyn  $u c_u$  z równania (4) możemy wyrazić przez prędkość względną  $w$  i wypadkową  $c$ , mianowicie:

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2u c_u = c^2 + u^2 - 2u c,$$

a stąd:

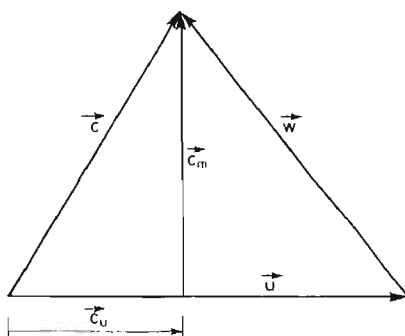
$$I = i + \frac{1}{2} c^2 - u c_u = i + \frac{1}{2} w^2 - \frac{1}{2} u^2 = i + \frac{1}{2} w^2 - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \text{const}. \quad (6)$$

Ponieważ rotacja jest stała wzdłuż linii prądu więc jej gradient jest wektorem prostopadłym do linii prądu, co prowadzi do zerowania się następującego iloczynu:

$$\boldsymbol{w} \cdot \nabla I = 0 \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{w} \cdot \nabla a_0^2 = 0. \quad (6a)$$

— Równanie przemiany:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} i. \quad (7)$$



Rys. 1.

W dalszych rozważaniach wykorzystamy zależność:

$$a^2 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_s = \kappa \frac{P}{\rho} \quad \text{skąd} \quad a^2 = (\kappa - 1) \cdot i,$$

więc:

$$\nabla P = a^2 \nabla \rho. \quad (9)$$

Ze względu na jednolitość oznaczeń oraz ciągłość przejścia z  $\omega \rightarrow 0$ , prędkość dźwięku odpowiadająca rotacji całkowitej będziemy oznaczać również przez  $a_0$  jak w przypadku  $\omega = 0$ ; wtedy  $a_0 = (\kappa - 1) \cdot I$ . Przeto zależność (6) przyjmie postać:

$$I = \frac{a_0^2}{\kappa - 1} = \frac{a^2}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{w}^2 - \boldsymbol{u}^2) \quad \text{lub} \quad a_0^2 = a^2 + \frac{\kappa - 1}{2} (\boldsymbol{w}^2 - \boldsymbol{u}^2) \quad (10)$$

Wykorzystując zależność (9) wprowadzimy równanie ruchu (1) do równania ciągłości (2), stąd otrzymujemy równanie:

$$a^2 \operatorname{div} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \cdot \left[ \boldsymbol{F} - \nabla \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{w}^2 \right) \right] = 0.$$

Prędkość dźwięku w powyższym równaniu możemy wyznaczyć z zależności (10), stąd mamy następującą postać równania ciągłości:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} + \frac{\boldsymbol{w} \cdot \left[ \boldsymbol{F} - \nabla \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{w}^2 \right) \right]}{a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} (\boldsymbol{w}^2 - \boldsymbol{u}^2)} = 0. \quad (11)$$

Wyznamy następujący iloczyn występujący w równaniu (11):

$$\boldsymbol{w} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{w} (\boldsymbol{F}_r + \boldsymbol{F}_{Cor}) = \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{i} \cdot \omega^2 x + \boldsymbol{j} \cdot \omega^2 y) - 2\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{F}_r, \quad (12)$$

gdyż iloczyn

$$\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{w}) = 0,$$

tzn. siła Coriolisa nie wykonuje pracy.

Rozważmy teraz drugi składnik zależności (11); wykorzystamy zależności (6a) i (12):

$$\boldsymbol{w} \cdot \left[ \boldsymbol{F} - \nabla \left( \frac{1}{2} w^2 \right) \right] = \boldsymbol{w} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} w^2 \right) = a_0^2 f^{\kappa-1} \cdot \boldsymbol{w} \cdot \nabla (\ln f), \quad (13)$$

gdzie:

$$f = \frac{\rho}{\rho_0} - \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}; \quad a_*^2 = \frac{2}{\kappa+1} a_0^2. \quad (14)$$

Stąd:

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa = \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a_*^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad (15)$$

przy czym wielkości  $P_0, \rho_0$  są odniesione do rotalpii  $I_0$ .

Po uwzględnieniu zależności (13) równanie ciągłości (11) jest następujące:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \cdot \nabla (\ln f) = 0 \quad \text{lub} \quad \operatorname{div}(f\boldsymbol{w}) = 0. \quad (16)$$

Zakładamy dalej, że przepływ bezwzględny jest niewirowy, tzn. istnieje potencjał prędkości  $\Phi$  spełniający zależność:

$$\nabla \Phi = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \quad (17)$$

Wprowadzając zależność (17) do równania (16) i wykonując różniczkowanie otrzymujemy podstawowe równanie gazodynamiki dla maszyn przepływowych:

$$(a^2 - w_x^2) \Phi_{xx} + (a^2 - w_y^2) \Phi_{yy} + (a^2 - w_z^2) \cdot \Phi_{zz} - 2w_x w_y \Phi_{xy} - 2w_x w_z \Phi_{xz} - \\ - 2w_y w_z \Phi_{yz} + \boldsymbol{w} (\Phi_x \cdot \nabla u_x + \Phi_y \cdot \nabla u_y + \Phi_z \cdot \nabla u_z) = 0, \quad (18)$$

a dla przypadku dwuwymiarowego:

$$(a^2 - w_x^2) \Phi_{xx} - 2w_x w_y \Phi_{xy} + (a^2 - w_y^2) \Phi_{yy} = 0, \quad (19)$$

przy czym  $\Phi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \dots$  itd.

Wyznaczmy wyróżnik równania (19):

$$\Delta = 4w_x^2 w_y^2 - 4(a^2 - w_x^2)(a^2 - w_y^2) = -4a^4 \left( 1 - \frac{w^2}{a^2} \right) = \\ = -4a^4 \frac{1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a^2} - \frac{w^2}{a^2}}{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{u^2}{a^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{w^2}{a^2}}. \quad (20)$$

Znak wyróżnika  $\Delta$  decyduje o charakterze równania (19), mianowicie:

$$\Delta < 0 \text{ (typ eliptyczny) wtedy } \frac{w^2}{a^2} < 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a^2},$$

$$\Delta > 0 \text{ (typ hiperboliczny) wtedy } \frac{w^2}{a^2} > 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a^2}, \quad (21)$$

$$\Delta = 0 \text{ (linia paraboliczności) wtedy } \frac{w^2}{a^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a^2} = 1.$$

Miejsce geometryczne punktów dla których  $\Delta = 0$  dzieli obszar przepływu na obszar poddźwiękowy oraz obszar naddźwiękowy. Wyróżnik  $\Delta$  będzie odgrywać istotną rolę przy badaniu zbieżności procesów iteracyjnych.

## 2. Ujęcie wariacyjne równania ciągłości

Równanie (16) na mocy (17) możemy napisać w następującej postaci:

$$\operatorname{div}(fw) = \operatorname{div} \left\{ \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} (\nabla\Phi - u) \right\} = 0. \quad (22)$$

Równanie Eulera rachunku wariacyjnego [7] jest następujące:

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi_z} \right) = 0, \quad (23)$$

gdzie funkcja  $F = F(\Phi, \Phi_x, \Phi_y)$  jest funkcją tworzącą.

Z porównania (23) z (22) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Phi} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \Phi_x} &= - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{1-\kappa}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - u_x \right), \\ \frac{\partial F}{\partial \Phi_y} &= - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} - u_y \right), \\ \frac{\partial F}{\partial \Phi_z} &= - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} - u_z \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Całkowanie układu równań (24) daje:

$$F(\nabla\Phi, u, a_*) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} a_*^2 \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + \frac{\kappa+1}{2\kappa} \cdot C, \quad (25)$$

lub

$$F(w, u, a_*) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \cdot a_*^2 \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + \frac{\kappa+1}{2\kappa} \cdot C. \quad (25a)$$

Stałą całkowania określamy z warunku istnienia ciągłego przejścia od przepływu czynnika ściśliwego do przepływu czynnika nieściśliwego ( $a_* \rightarrow \infty$ ). Łatwo pokazać, że  $C = -a_*^2$  a stąd:

$$F(w, u, a_*) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} a_*^2 \left[ \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a_*^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right]. \quad (26)$$

Na mocy (15) otrzymujemy:

$$F(w, u, a_*) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \cdot a_*^2 \left( \frac{P}{P_0} - 1 \right) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} a_*^2 \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa - 1 \right]. \quad (26a)$$

Funkcja  $F$  posiada wymiar energii:

$$[F] = [a_*^2] = [m^2/s^2] = [J/kg].$$

W szczególnym przypadku dla przepływu czynnika nieściśliwego ( $a_* \rightarrow \infty$ ) funkcja  $F$  ma postać:

$$F(w, u, \infty) = -\frac{1}{2} (w^2 - u^2) = -\frac{1}{2} [(\nabla\Phi)^2 - 2u \cdot \nabla\Phi]. \quad (26b)$$

Całka wariacyjna z uwzględnieniem warunków brzegowych wyraża się następującym wzorem:

— dla przepływu czynnika ściśliwego:

$$J(\Phi, u, a_*) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right\} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \chi(s, \Phi, \Phi_s) ds, \quad (27)$$

— dla przepływu czynnika nieściśliwego:

$$J(\Phi, u, \infty) = \lim_{a_* \rightarrow \infty} J(\Phi, u, a_*) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\nabla\Phi)^2 - 2u \cdot \nabla\Phi] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \chi(s, \Phi, \Phi_s) \cdot ds. \quad (28)$$

W przedstawiony sposób zagadnienie stacjonarnego przepływu idealnego czynnika ściśliwego sprowadziliśmy do zagadnienia optymalizacji funkcjonału energii. Aby wyznaczyć nieznaną funkcję  $\chi$  wyznaczmy pierwszą wariację funkcjonału (27) [14].

$$\delta J = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} [F]_{\Phi} \delta\Phi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( F_{\Phi_x} \frac{dy}{ds} + F_{\Phi_y} \frac{dx}{ds} + F_{\Phi_z} \frac{dz}{ds} + \chi_{\Phi} - \frac{d}{ds} \chi_{\Phi_s} \right) \delta\Phi ds,$$

$$[F]_{\Phi} = F_{\Phi} - \frac{\partial}{\partial x} F_{\Phi_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{\Phi_y} - \frac{\partial}{\partial z} F_{\Phi_z},$$

oraz  $[F]_{\Phi} = 0$  na podstawie (23) i (27). Zatem na brzegu  $\partial\Omega$  mamy:

$$F_{\Phi_x} \frac{dy}{ds} - F_{\Phi_y} \frac{dx}{ds} + F_{\Phi_z} \frac{dz}{ds} + \chi_{\Phi} - \frac{d}{ds} \chi_{\Phi_s} = 0. \quad (29)$$

Przekształćmy dalej pierwszą część zależności (29) do innej postaci, mianowicie:

$$F_{\Phi_*} \frac{dy}{ds} - F_{\Phi_y} \frac{dx}{ds} + F_{\Phi_z} \frac{dz}{ds} = f(\nabla\Phi - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = f \cdot w_n \quad (30)$$

$w_n$  — składowa normalna prędkości  $\vec{w}$

Ponieważ  $\chi_{\Phi_*} = 0$  przeto z zależności (29) po uwzględnieniu wyniku (30) mamy:

$$\chi_{\Phi} = f \cdot w_n = p(s),$$

a stąd funkcja  $\chi$  ma postać:

$$\chi = \Phi(s) \cdot p(s).$$

Ostatecznie funkcjonał energii (wzięty ze znakiem przeciwnym) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} J(\Phi, \mathbf{u}, a_*) &= -\frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right\} d\Omega + \\ &- \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot p(s) ds = -\frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left[ 1 - \frac{P(\Phi, \mathbf{u}, a_*)}{P_0} \right] \cdot d\Omega - \\ &- \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot p(s) \cdot ds, \end{aligned} \quad (31)$$

gdzie funkcja:

$$p(s) = \frac{\rho}{\rho_0} w_n = \Delta m,$$

wyraża jednostkowe natężenie przepływu masy przez jednostkowy element powierzchni  $\partial\Omega$ .

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcjonału energii (31) jest zerowanie się I wariacji. Niech  $v \in V(\Omega)$ ,  $\alpha \in R^1$ , wtedy:

$$\begin{aligned} \delta J &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(\Phi + \alpha \cdot v, \mathbf{u}, a_*) - J(\Phi, \mathbf{u}, a_*)}{\alpha} = \\ &= \int_{\Omega} (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \cdot \nabla v \cdot \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} d\Omega - \int_{\partial\Omega} v \cdot p(s) \cdot ds, \end{aligned} \quad (32)$$

lub:

$$\delta J = \int_{\Omega} w \cdot \nabla v \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a_*^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} d\Omega - \int_{\partial\Omega} v \cdot p(s) ds. \quad (32a)$$

Kładąc  $\delta J = 0$  otrzymujemy równanie wariacyjne:

$$\int_{\Omega} (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \cdot \nabla v \cdot \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \cdot p(s) \cdot ds, \quad (33)$$

z którego można wyznaczyć rozkład prędkości dla zadanej funkcji  $p(s)$ .

Dla przepływu czynnika nieściśliwego ( $a_* \rightarrow \infty$ ):

$$\delta J = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} vp(s) \cdot ds. \quad (34)$$

Zauważmy, że równanie wariacyjne (33) jest nieliniowe. Stanowi to dość duże utrudnienie numeryczne, które można pokonać stosując metody iteracyjne rozwiązywania równań nieliniowych. O zbieżności procesów iteracyjnych decyduje znak drugiej wariacji  $\delta^2 J$  funkcjonału energii (31). Ponieważ  $\delta^2 J = \delta(\delta J)$  przeto dla  $\alpha \in R^1$  mamy:

$$\begin{aligned} \delta^2 J(\mathbf{w}, \mathbf{u}, a_*, v, h) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta J(\mathbf{w} + \alpha \nabla h, \mathbf{u}, a_*, v) - \delta J(\mathbf{w}, \mathbf{u}, a_*, v)}{\alpha} = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2-\kappa} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{\mathbf{u}^2}{a_*^2} - \frac{\mathbf{w}^2}{a_*^2} \right) \nabla h \nabla v \, d\Omega \\ &+ \frac{2}{\kappa+1} \int_{\Omega} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2-\kappa} [(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) \cdot (\nabla h \cdot \nabla v) - (\mathbf{w} \cdot \nabla h) \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla v)] \, d\Omega. \end{aligned}$$

Wektory  $\mathbf{w}$ ,  $\nabla v$ ,  $\nabla h$  są wektorami współliniowymi, więc funkcja podcałkowa w drugiej całce jest równa tożsamościowo zeru.

Ostatecznie mamy:

$$\delta^2 J = \int_{\Omega} f^{2-\kappa} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{\mathbf{u}^2}{a_*^2} - \frac{\mathbf{w}^2}{a_a^2} \right) \nabla h \nabla v \, d\Omega,$$

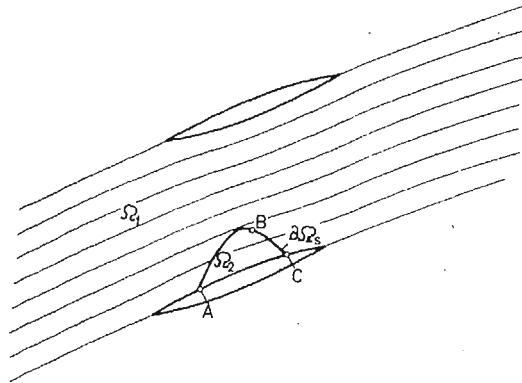
w szczególności dla  $h = v$ :

$$\delta^2 J = \frac{\kappa}{\kappa+1} \int_{\Omega} f^{2-\kappa} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{\mathbf{u}^2}{a_*^2} - \frac{\mathbf{w}^2}{a_*^2} \right) (\nabla v)^2 \, d\Omega. \quad (35)$$

Druga funkcja podcałkowa w nawiasie jest wyróżnikiem charakterystycznym podstawowego równania gazodynamiki dla maszyn przepływowych, zależność (20).

Druga wariacja funkcjonału energii (31) spełnia nierówności:

- dla przepływu poddźwiękowego ( $\Delta < 0$ )  $\delta^2 J > 0$ ,
- dla przepływu nadźwiękowego ( $\Delta > 0$ )  $\delta^2 J < 0$ .



Rys. 2.



Aby druga wariacja funkcjonału energii była dodatnia również w obszarze naddźwiękowym należy zmodyfikować funkcjonal poprzez dodanie członu regularyzującego  $H(\Phi, u)$  ujmującego przyrost entropii na fali uderzeniowej. Różne możliwości regularyzacji przedstawiono w pracy [27].

### 3. Funkcjonał energii dla przepływu transonicznego

Pod pojęciem przepływu transonicznego rozumiemy taki przepływ, w którym występują lokalne pola naddźwiękowe prędkości, to znaczy, w obszarze  $\Omega_2$  (rys. 2) prędkość jest większa od prędkości dźwięku ( $\Delta > 0$ ,  $\delta^2 J < 0$ ) a w obszarze  $\Omega_1/\Omega_2$  prędkość jest mniejsza od prędkości dźwięku. Interesujące są tutaj tylko takie przypadki, gdy przyrost entropii na poszczególnych liniach prądu za falą uderzeniową jest bardzo mały. Wtedy wielkość wektora rotacji prędkości jest do pominięcia [15, 16] i przepływ za falą uderzeniową możemy traktować jako bezwirowy i potencjał prędkości będzie funkcją ciągłą na fali uderzeniowej.

Na linii  $AB$ , (rys. 2,) prędkość przepływu jest równa prędkości dźwięku. Na linii  $BC$  występuje fala uderzeniowa. Dla obszaru  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  całki energii mają postać (funkcja  $p(s)$  na profilu zeruje się):

$$J_1 = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi_1 - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right\} d\Omega +$$

$$- \int_{\partial\Omega} \Phi_1 p_1(s) ds - \int_{\partial\Omega_s} \Phi_1 p_1(s) ds$$

$$J_2 = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi_2 - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right\} d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\Omega_s} \Phi_2 p_2(s) \cdot ds + H(\Phi, u).$$

Ze względu na ciągłość masy i potencjału prędkości na fali uderzeniowej zachodzi równość:

$$\Phi_1 \varrho_1 w_{n_1} = \Phi_2 \varrho_2 w_{n_2} \quad \text{na} \quad \partial\Omega_s; \quad \varrho w_n|_{\partial\Omega} = p(s),$$

przeto:

$$\int_{\partial\Omega_s} \Phi_1 \cdot p_1(s) \cdot ds - \int_{\partial\Omega_s} \Phi_2 p_2(s) ds = 0,$$

oraz na mocy ciągłości funkcji  $\Phi$  w całym obszarze  $\Omega$ :

$$J = J_1 + J_2 = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - \mathbf{u})^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right\} d\Omega +$$

$$- \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot p(s) \cdot ds + H(\Phi, u).$$

#### 4. Minimalizacja funkcjonału energii

Funkcjonał energii w postaci (31) nie jest funkcjonałem kwadratowym. Zatem I wariacja nie jest formą dwuliniową. Istnieje wiele metod minimalizacji funkcjonałów w zależności od pewnych własności funkcjonału (ściśła wypukłość, nieujemność II wariacji). Dalej zbadamy czy funkcjonał (31) może zostać zminimalizowany za pomocą metody odwzorowania zwężającego, dla funkcjonałów ściśle wypukłych. Zakładamy, że  $\Phi \in V(V$  — przestrzeń Hilberta). Zajmiemy się teraz zbadaniem ściślej wypukłości funkcjonału energii, ciągłości I i II wariacji. Spełnienie tych własności oraz nieujemność i ograniczoność II wariacji gwarantują istnienie odwzorowania zwężającego [10].

**4.1. Wypukłość funkcjonału energii.** Musimy zbadać, czy spełniony jest warunek ( $0 < \alpha < 1$ ):

$$J[(1-\alpha) \cdot \Phi + \alpha \cdot \varphi] \leq (1-\alpha)J(\Phi) + \alpha \cdot J(\varphi), \quad \varphi, \Phi \in V,$$

$$\begin{aligned} J(\Phi) = & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_{\Omega} a_*^2 \left\{ \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2}{a_*^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right\} d\Omega + \\ & + \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot p(s) \cdot ds = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \int_{\Omega} a_*^2 [1 - f(\Phi)] \cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot p(s) \cdot ds. \end{aligned} \quad (36)$$

Ze względów fizycznych funkcja  $\Phi$  musi spełniać następujący warunek:

$$1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\Phi - u)^2 - u^2}{a_*^2} \geq 0. \quad (37)$$

Zajmijmy się zbadaniem wypukłości funkcji  $f(\Phi)$ . Dla wektora prędkości obwodowej istnieje funkcja  $U$  taka, że  $u = \nabla U$ .

Dokonyamy zatem przedstawienia  $\bar{\Phi} = \Phi - U$ , stąd:

$$\begin{aligned} f(\bar{\Phi}) &= - \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left( \frac{\nabla\bar{\Phi}}{a_*} \right)^2 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \\ &= - \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = f(\lambda), \end{aligned}$$

oraz:

$$f''(\lambda) = \frac{2\kappa}{\kappa+1} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2 \right)^{\frac{2-\kappa}{\kappa-1}} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \lambda^2 \right); \quad \lambda = \frac{\nabla\bar{\Phi}}{a_*}.$$

Zatem funkcja  $f(\bar{\Phi})$  na mocy nieujemności  $f''(\bar{\Phi})$  [19] jest wypukła w zakresie prędkości określonych nierównościami:

$$\begin{aligned} f''(\bar{\Phi}) &= \frac{2\kappa}{\kappa+1} \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{(\nabla\bar{\Phi} - u)^2 - u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{2-\kappa}{\kappa-1}} \left[ 1 - \frac{(\nabla\bar{\Phi} - u)^2}{a_*^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} \right] \\ &= \frac{2\kappa}{\kappa+1} \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{w^2 - u^2}{a_*^2} \right)^{\frac{2-\kappa}{\kappa-1}} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{w^2}{a_*^2} \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (38)$$

jeśli:

$$1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{w^2}{a_*^2} \geq 0,$$

to znaczy w zakresie przepływów poddźwiękowych.

Z nieujemności i wypukłości funkcji  $f(\Phi)$  wynika wypukłość funkcjonału energii (31). Ścisła wypukłość zachodzi zawsze, gdy  $f'' > 0$

**4.2. Ciągłość I i II wariacji funkcjonału energii.** Musimy sprawdzić, czy z warunku  $\Phi_n \rightarrow \Phi_0$  wynika  $J(\Phi_n) \rightarrow J(\Phi_0)$  oraz  $\delta^2 J(\Phi_n) \rightarrow \delta^2 J(\Phi_0)$ . Nietrudno zauważyć, że warunek ten dla (32) i (35) jest spełniony.

**4.3. Nieujemność (koercywność) II wariacji funkcjonału energii.**

— Przepływ poddźwiękowy

Dla przepływu poddźwiękowego nieujemność II wariacji wynika ze znaku wyróżnika (21) równania charakterystycznego i zawsze  $\delta^2 J > 0$ .

— Przepływ transoniczny

Dla słabych fal uderzeniowych przyrost entropii jest proporcjonalny do trzeciej potęgi z różnicy prędkości za i przed falą [16]:

$\Delta s = -A \cdot [(\nabla\Phi - \mathbf{u}) \cdot \nabla n_+ - (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \cdot \nabla n_-]^3 > 0$  skąd  $w \cdot \nabla n_+ - w \cdot \nabla n_- \leq B$ ,  $A, B > 0$ , lub pisząc w postaci ogólniejszej [27]:

$$\operatorname{div}[(\nabla\Phi - \mathbf{u})] \leq B,$$

albo w postaci słabej;

$$- \int_{\Omega} (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \nabla \eta d\Omega \leq B \int_{\Omega} \eta d\Omega, \quad \eta \in V_+ = \{\eta: \eta \in H_0^1(\Phi), \eta \leq 0\}. \quad (39)$$

Przyjmując skończenie wymiarową przestrzeń  $V$  z funkcjami bazowymi  $\{\varphi_i\}$ , nierówność (39) przyjmie postać:

$$- \int_{\Omega} (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \nabla \varphi_i d\Omega \leq B \int_{\Omega} \varphi_i d\Omega \quad \bigwedge \varphi_i \in V. \quad (39a)$$

Nierówność (39a) dołączamy do funkcjonału energii przez zastosowanie funkcji kary, otrzymamy wtedy zmodyfikowany funkcjonał energii:

$$J_K(\Phi, \mathbf{u}, a_*) = J(\Phi, \mathbf{u}, a_*) + H(\Phi, \mathbf{u}),$$

gdzie:

$$H(\Phi, \mathbf{u}) = K \cdot \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ - \int_{\Omega} (\nabla\Phi - \mathbf{u}) \nabla \varphi_i d\Omega - B \int_{\Omega} \varphi_i d\Omega \right]^+ \right\}^2, \quad t^+ = \max(0, t), \quad K > 0,$$

oraz:

$$\begin{aligned} \delta^2 J_K &= \frac{\kappa}{\kappa+1} \int_{\Omega} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2-\kappa} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{u^2}{a_*^2} - \frac{w^2}{a_*^2} \right) \cdot (\nabla v)^2 d\Omega + 2K \cdot \left( \int_{\Omega} \nabla v \nabla \eta d\Omega \right)^2 \geq \\ &\geq (\mu_1 + \mu_2) \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega = \mu \cdot \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2. \end{aligned}$$

Stałą  $B$  i kary  $K$  należy dobrać tak aby  $\delta^2 J_K > 0$  (wtedy  $\mu > 0$ ), oraz był spełniony warunek (39).

Dalej wykorzystamy nierówność Friedrichsa [18], otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\delta^2 J_K &= \mu \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega = \mu \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (\nabla v)^2 + \frac{1}{2} (\nabla v)^2 \right] d\Omega = \\
&= \mu \frac{C}{2} \int_{\Omega} \left[ v^2 d\Omega + \frac{1}{2} (\nabla v)^2 \right] d\Omega = \\
&\geq \mu \min \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} C \right) \int_{\Omega} [v^2 + (\nabla v)^2] d\Omega = \mu C_1 \|v\|_{H^1}^2, \\
C_1 &= \min \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} C \right) > 0.
\end{aligned} \tag{40}$$

Ograniczoność II wariacji wynika z ciągłości II wariacji. Wykazaliśmy zatem ciągłość I i II wariacji, nieujemność i ograniczoność II wariacji przeto na mocy twierdzenia [10] operacja  $T\Phi = \Phi - \gamma \cdot G(\Phi)$  jest operacją zwiężającą. Operacja  $T$  jest zawsze zwiężająca dla przepływów poddźwiękowych ( $\delta^2 J_K > 0$ ) oraz dla przepływów transonicznych, dla których  $\mu > 0$ .

Liczba  $\gamma \in \left( 0, \frac{2}{M^2} \right)$ ,  $\mu > 0$ , a stała  $M$  wynika z nierówności [10]:

$$\|G(u) - G(v)\| \leq M \|u - v\|.$$

W zależności od wyboru parametru  $\gamma$  proces iteracyjny oparty na metodzie odwzorowania zwiężającego jest szybciej lub wolniej zbieżny, najlepszą wartością jest  $\gamma = \mu/M^2$ . Dla przepływów transonicznych szczególnie trudno jest określić wartość dodatniej liczby  $\mu$ , gdyż obszar  $\Omega_2$  zależy od wielkości wektora prędkości napływu na palisadę oraz kąta napływu jak również geometrii palisady. Określenie zatem optymalnej wartości parametru  $\gamma$  jest stosunkowo trudne. Proces iteracyjny z parametrem  $\gamma \neq \gamma_{opt}$  jest wolnozbieżny. Znacznie szybszą zbieżność gwarantuje metoda Newtona, która jest zbieżna przy tych samych założeniach [10] co metoda odwzorowania zwiężającego. W zagadnieniach opływu palisady profili obok warunków brzegowych oraz geometrii palisady zadaje się kąt napływu w nieskończoności. Uwzględnienie kąta napływu jest łatwe przez wykorzystanie cyrkulacji. Mianowicie w przekroju  $\partial\Omega_3$  (który przyjmujemy jako leżący w nieskończoności) składowa styczna  $v_y$ , prędkości jest związana z cyrkulacją następująco:

$$\Gamma_3 = \int_{\partial\Omega_3} \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy = \Phi_2 - \Phi_1,$$

a z drugiej strony uwzględniając fakt, że składowa  $v_y$  ma stałą wartość w przekroju  $\partial\Omega_3$  mamy:

$$\Gamma_3 = \int_{\partial\Omega_3} \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy = \int_{\partial\Omega_3} v_y dy = v_y (y_2 - y_1) = (y_2 - y_1) v_x \operatorname{tg} \alpha_{-\infty}.$$

Zatem:

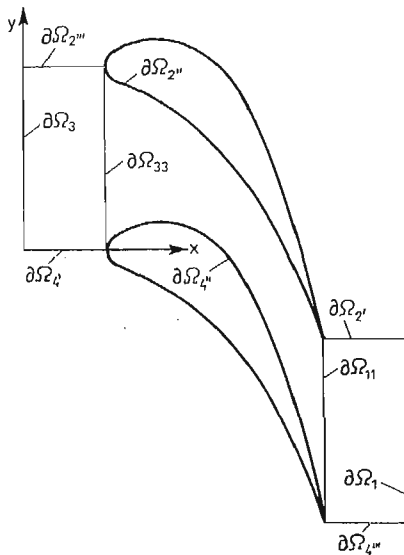
$$\Phi_2 - \Phi_1 = (y_2 - y_1) v_x \operatorname{tg} \alpha_{-\infty}, \tag{46}$$

gdzie indeksy 1 i 2 oznaczają punkt początkowy i końcowy leżący w przekroju  $\partial\Omega_3$  w kierunku osi  $y$ .

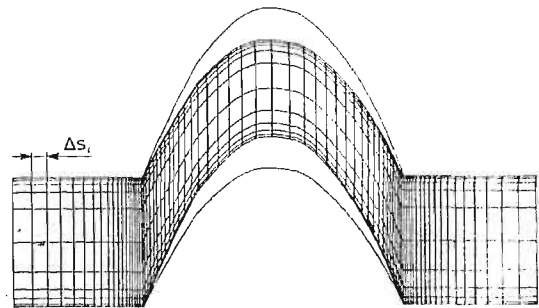
W przypadku zadanego kąta napływu  $\alpha_{-\infty}$  równanie wariacyjne (33) należy rozwiązać łącznie z warunkiem (46). Wprowadzenie liniowego ograniczenia (46) nie zmienia przedstawionych własności funkcjonału  $J(\Phi, u, \alpha_*)$ .

## 5. Przykład obliczeniowy

Przedstawione rozważania wykorzystamy do określenia wielkości przepływowych w stacjonarnym przepływie idealnego czynnika ściśliwego przez płaską palisadę o nieskończonej liczbie łopatek. Ze względu na stacjonarność przepływu ograniczymy się do obszaru pokazanego na rys. 3. W szczególnym przypadku obszar pokazany na rys. 3 może się zawierać między kolejnymi szczelinami międzywieńcowymi (linie  $\partial\Omega_1$  i  $\partial\Omega_3$  leżą w środku szczeliny międzywieńcowej).



Rys. 3.



A1 = 10,00	A4 = 16,00
A2 = 10,00	A5 = 16,00
A3 = 16,00	A6 = 10,00
L1 = 10	LV = 20
L2 = 80	LN = 20

Rys. 4.

Na liniach  $\partial\Omega_2'''$  i  $\partial\Omega_4'''$  oraz  $\partial\Omega_2'$  i  $\partial\Omega_4'''$  ze względu na periodyczność mamy takie same składowe prędkości (wielkości nieznanne). Na linii  $\partial\Omega_3$  rozkład prędkości jest zadany. Natomiast na linii  $\partial\Omega_1$  nieznanne rozkład prędkości spełnia warunek ciągłości. Ponadto nieznanne jest kąt spływu. Funkcjonał energii (31) wymaga znajomości rozkładu prędkości  $p(s)$  na całej linii  $\partial\Omega$ .

Funkcja  $p$  spełnia warunek ciągłości:

$$\int_{\partial\Omega} p(s) ds = 0, \quad p \in L^2(\partial\Omega). \quad (41)$$

Zastosowanie zasady minimum energii potencjalnej (zasady najmniejszego działania) spowoduje wybranie z klasy funkcji  $p(s)$  spełniających warunek ciągłości (41) takiej, która nada całce energii wartość minimalną. W klasie funkcji  $\Phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$  odpowiada to spełnieniu równania ciągłości nie tylko w postaci wariacyjnej (33) lecz również w postaci różniczkowej. W omawianym zagadnieniu rozwiązania poszukujemy w skończeniu wymiarowej przestrzeni  $H^1(\Omega) \cap L^2(\partial\Omega)$ . W tej przestrzeni na brzegu zadajemy funkcję  $p(s)$  (równanie wariacyjne (33)) a równanie ciągłości na brzegu  $\partial\Omega$  jest spełnione

w następującym sensie:

$$\int_{\partial\Omega} v \left[ p(s) - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] ds = 0 \quad v, \Phi \in H^1(\partial\Omega). \quad (42)$$

W dyskretnym obszarze  $\Omega$  fizycznemu rozwiązaniu najbliższe jest to rozwiązanie, które na każdym odcinku obszaru dyskretnego spełnia najlepiej równanie ciągłości w zwykłym sensie. Dla obszaru pokazanego na rysunku nr 4 otrzymujemy:

$$\delta = \sum_i \left| \int_{\partial\Omega_i} \left[ p(s) - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] ds \right| = \sum_i \delta_i = \delta_{min}. \quad (43)$$

W otoczeniu krawędzi napływu i spływu występują stosunkowo duże gradienty prędkości a długość przedziału całkowania  $|\partial\Omega|$  jest stosunkowo mała i udział wielkości  $\delta_i$  w sumie (43) może być niewielki i numeryczne poszukiwanie minimum funkcji (43) może okazać się kłopotliwe. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy:

$$\delta_i = \left| \int_{\partial\Omega_i} \left[ p(s) - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] ds \right| = |\Delta s_i| \left| p(s) - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{s=s^*}, \quad s^* \in \partial\Omega_i.$$

Zatem pomijając tłumiący charakter wielkości  $|\Delta s_i|$  nowe wyrażenie odpowiadające wielkości  $\bar{\delta}$  charakteryzujące jakość rozwiązania ma postać:

$$\bar{\delta} = \sum_i \frac{1}{|\Delta s_i|} \left| \int_{\partial\Omega_i} \left[ p(s) - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] ds \right| = \sum_i \frac{\delta_i}{|\Delta s_i|}. \quad (44)$$

Otrzymaliśmy zatem wyrażenie na defekt masy z jednakowym stopniem wrażliwości dla każdego przedziału o długości  $|\Delta s_i|$ . Jako rozwiązanie fizyczne, będziemy uważać takie, które będzie minimalizować wyrażenie  $\bar{\delta}$  dla funkcji  $p(s)|_{\partial\Omega}$  spełniających warunków ciągłości.

Do generacji siatki obliczeniowej zastosowano zasadę zagęszczania siatki w otoczeniu punktów wokół których panują największe gradienty prędkości. Ponadto dla uproszczenia algorytmu numerycznego przyjęto taką samą liczbę węzłów w każdym przekroju prostokątnym do osi  $x$ , rys. 4.

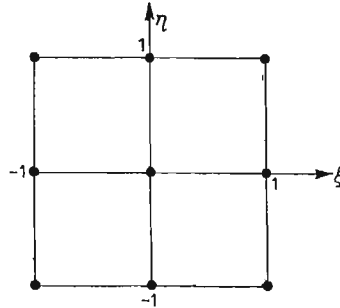
Na rys. 4 przedstawiono kierunki zagęszczania siatki. Wielkość zagęszczania w danym kierunku jest scharakteryzowana liczbą  $AI, I = 1, \dots, 6$ , która jest równa ilorazowi długości kroku pierwszego i ostatniego siatki w obszarze zagęszczania. Wyróżniono sześć obszarów zagęszczania, rys. 4:

- obszar 1, od pionowej linii środkowej kanału w kierunku linii  $\partial\Omega_{11}$
- obszar 2, od pionowej linii środkowej kanału w kierunku przekroju wlotowego palisady (linia  $\partial\Omega_{33}$ )
- obszar 3, od linii środkowej kanału w kierunku
- obszar 4, od przekroju  $\partial\Omega_1$  w kierunku przekroju wlotowego palisady (linia  $\partial\Omega_{11}$ )
- obszar 5, od przekroju  $\partial\Omega_3$  w kierunku przekroju wlotowego palisady (linia  $\partial\Omega_{33}$ )
- obszar 6, od linii środkowej kanału w kierunku linii  $\partial\Omega_4$ .

Na rys. 4 zaznaczono również liczbę podziału w kierunku osi  $y-L_1$ , w kierunku osi  $x-L_2$ , w obszarze dolotowym —  $LV$ , w obszarze wylotowym —  $LN$ .

Jeśli  $AI > 1$ ,  $I = 1, \dots, 6$ , wówczas następuje zagęszczenie siatki w kierunkach zaznaczonych na rys. 4. Jeśli  $AI < 1$ , wówczas kierunek zagęszczania jest przeciwny.

Zagęszczenie następuje według postępu geometrycznego. Jako parametry podstawowe służą: liczba  $AI$  określająca stopień zagęszczenia i liczba przedziałów w kierunku zagęszczania.



Rys. 5.

Do obliczeń numerycznych zastosowano metodę elementu skończonego z elementem czworokątnym typu lagranżowskiego z dziewięcioma węzłami. Uzyskano dzięki temu:

- wysoki stopień aproksymacji zadania wyjściowego,
- wysoki stopień aproksymacji profilu.

Minimalizacji funkcjonau (31) dokonano przez rozwiązanie nieliniowego równania wariacyjnego (33). Równanie to zlinearyzowano metodą Newtona [25, 26]. Proces iteracyjny ma następującą postać:

$$\int_{\Omega} \left\{ f_n \cdot (\nabla \Phi_{n+1} - \mathbf{u}) \nabla v - \frac{2}{\kappa + 1} \cdot \frac{[(\nabla \Phi_{n+1} - \mathbf{u})(\nabla \Phi_n - \mathbf{u})] \cdot [(\nabla \Phi_n - \mathbf{u}) \nabla v]}{a_*^2} f_n^{2-\kappa} \right\} d\Omega =$$

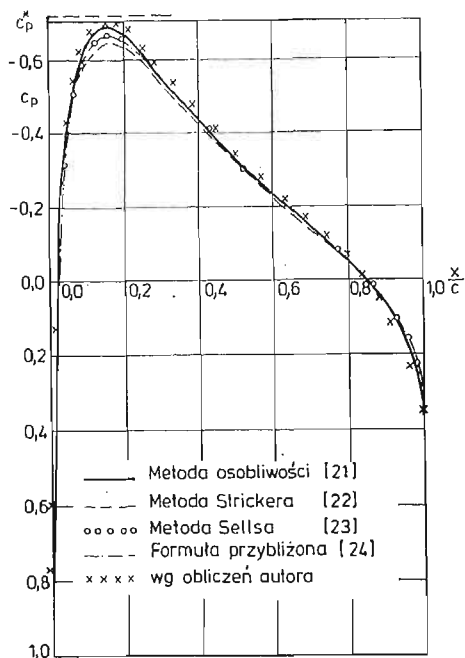
$$= \int_{\partial \Omega} v \cdot p(s) ds - \frac{2}{\kappa + 1} \int_{\Omega} \frac{(\nabla \Phi_n - \mathbf{u})^2 [(\nabla \Phi_n - \mathbf{u}) \nabla v]}{a_*^2} f_n^{2-\kappa} d\Omega, \quad n = 0, 1, \dots \quad (45)$$

Dla  $n = 0$  przyjęto  $\Phi_0 = 0$  i równanie (45) redukuje się do równania opisującego przepływ czynnika nieściśliwego. Podstawową zaletą procesu (45) jest uzyskanie szybkiej zależności oraz symetryczności macierzy głównej układu równań odpowiadającego zależności (45).

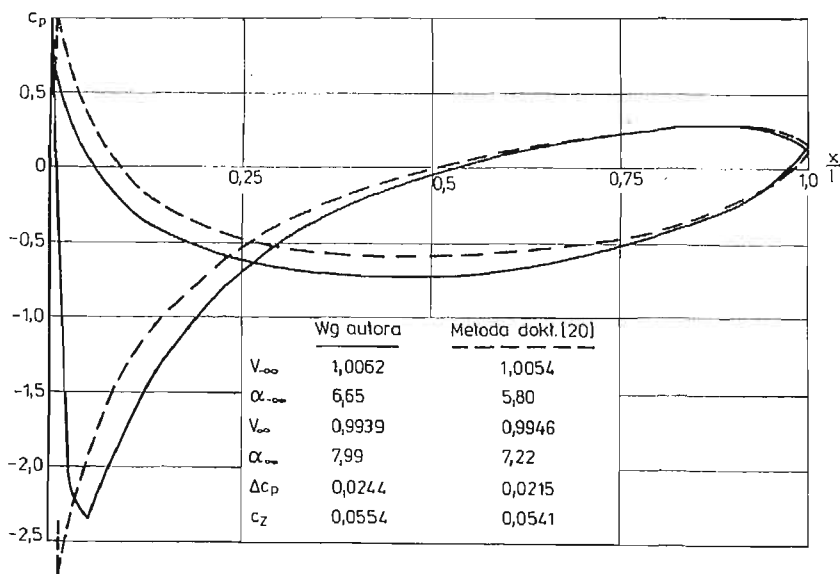
Na rys. 6 przedstawiono porównanie wyników przebiegu współczynnika ciśnienia w przypadku opływu profilu NACA 0012 według przedstawionej metody z wynikami innych autorów. Przedstawione wyniki uzyskano na siatce z 675 węzłami. Ze względu na wykorzystanie metody Newtona do rozwiązania nieliniowego równania (33), proces iteracyjny przerwano po 5 iteracji uzyskując oszacowanie w normie  $\|\Phi_5 - \Phi_4\|_{H^1} < 10^{-5}$ . Dla przypadku opływu palisady profili (złożonych z pojedynczych profili Bondera [20]) ciecżą doskonałą, porównanie wyników według metody odwzorowania konforemnego [20] z wynikami autora, przedstawiono na rys. 7.

Czas obliczeń na siatce o 675 węzłach kształtował się następująco (maszyna cyfrowa ODRA 1305)

— opływ pojedynczego profilu płynem ściśliwym, 5 iteracji  $\times$  7 min./iterację  
 --- opływ palisady ciecżą doskonałą  $\sim 15$  min.



Rys. 6.



Rys. 7.



## Literatura

1. E. TULISZKA, *Sprężarki, dmuchawy i wentylatory*, WNT Warszawa 1969.
2. W. FISZDON, *Application of Variational Methods to the Solution of Practical Supersonic Flow Problems*, ZAMM, Tagungsheft 42, 1962
3. W. FISZDON, *Known applications of variational methods to transonic flow calculations*, Symposium Transsonicum Aachen, 1964.
4. W. J. PROSNAK, *Mechanika płynów*, Vol. II, PWN Warszawa 1971.
5. R. L. SELIGER, G. B. WHITHAM, *Variational principles in continuum mechanics*, Proc. Roy. Soc. A 305, 1-25, 1968.
6. K. G. GUDERLEY, O. P. BHUTANI, *On the Relation between Variational Principles for Inviscid Gas Flows in Spaces of Different Dimensions*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). Vol. 24, 1973
7. A. KNECHSKE, *Differentialgleichungen*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1962.
8. B. KRAJEWSKI, *Variational Problems of the Theory of Three-Dimensional Flow Through Thermal Turbomachinery*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 6, 15, 1963.
9. W. TRAUPEL, *Thermische Turbomaschinen*, Bd. I, Springer-Verl. 1966
10. J. CEA, *Optimisation: Theorie et algorithmes*, Dunod, Paris 1971.
11. J. SZMELTER, *Metody komputerowe w mechanice*, BNI Warszawa 1980.
12. B. ŚREDNIAWA, *Hydrodynamika i teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1977
13. R. PIEPRZYK, M. CIAŁKOWSKI, *Analiza porównawcza istniejących metod obliczania osiowo-symetrycznego przepływu przez osiowe wieńce sprężarek transonicznych*, Opracowanie wykonane w ramach Problemu Międzyresortowego MR. I. 26, Praca niepublikowana. Poznań 1978.
14. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, Tom 4, cz. I. PWN, Warszawa 1962
15. A. H. SHAPIRO, *Compressible Fluid Flow*, The Ronald Press Company, New York, 1954.
16. L. LANDAU, E. LIFSZYC, *Mechanika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa 1958.
17. K. MAURIN, *Analiza. Elementy cz. I.*, PWN, Warszawa 1974.
18. G. N. POŁOŻY, i inni, *Metody przybliżonych obliczeń*, WNT, Warszawa 1966
19. D. S. MITRINOVIĆ, *Elementarne nierówności*, PWN, Warszawa 1972.
20. M. E. KLONOWSKA, W. J. PROSNAK, J. K. SZYMAŃSKI, *Obliczanie opływu palisady prostoliniowej*, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN. Nr 44, 1976.
21. H. JÄGER, *Singularitätenverfahren höherer Ordnung zur Berechnung der ebenen Unterschallströmung*, Dissertation, Stuttgart 1984.
22. R. STRICKER, *Zur Berechnung der stationären unterkritischen Potentialströmung um ebene Profile beliebiger Form*, MMB — Bericht Nr UD — 135-74 (Ö), 1975.
23. C. C. L. SELLS, *Plane Subcritical flow past a lifting aerofil*, Proc. Roy. Soc. A. 308, 377-401, 1968.
24. Th. E. LABRUJERE, W. LOEVE, J. W. SLOFF, *An approximate method for the determination of the pressure distribution on wings in the lower critical speed range*, AGARD Cp 35, 71-1-17-10, 1968.
25. M. CIAŁKOWSKI, *Linearizacja wybranych równań mechaniki płynów za pomocą metody Newtona*, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej — Maszyny Robocze i Pojazdy, 25, 1985.
26. M. CIAŁKOWSKI, *Linearisierung der gasdynamischen Grundgleichung für Strömungsmaschinen*, ZAMM, 66, 1986, 4, T 197-200.
27. M. O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, P. PERIAUX, O. PIRONNEAU, G. POIRIER, *Application of Optimal Control and Finite Element Methode to the Calculation of Transonic Flows and Incompressible Viscous Flows*, Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique, Rapport de Recherche, No 294, Avril 1978.

*Praca została wykonana na podstawie badań przeprowadzonych w ramach stypendium im. A. v. Humboldta w „Institut für Strahlantriebe und Turboarbeitsmaschinen der RWTH Aachen”. Dir. Prof. Dr.-Ing. H. E. Gallus.*

Р е з ю м е

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИДЕАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ТЕКУЧЕЙ  
СРЕДЫ В РЕШЁТКЕ ПРОФИЛЕЙ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

В работе представлено вариационный подход к решению задачи течения невязкой и сжимаемой текучей среды в турбомашинах. Исследованы свойства первой и второй вариации функционала энергии, а также приведено метод решения нелинейного вариационного уравнения. Теоретические рассуждения иллюстрированы расчётным примером. Численные результаты получены методом конечных элементов с четырёхугольным элементом изопараметрическим с 9 узлами.

S u m m a r y

SOLUTION TO A PROBLEM OF THE IDEAL FLOW OF COMPRESSIBLE  
LIQUID IN CASCADE PROFILES BY VARIATIONAL METHOD

A variational approach to a problem of the flow of a non-viscous, compressible liquid in flow machines has been presented. The properties of the first and the second variation of the energy functional have been investigated as well as a method of solution of nonlinear variational equation. Theoretical investigations have been illustrated by numerical examples. The numerical results have been obtained by FEM method with quadrangle element isoparametric with 9 knots.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 kwietnia 1985 roku.*