

## NUMERYCZNE OBLICZENIA PŁASKICH LEPKICH PRZEPŁYWÓW NADDŹWIĘKOWYCH Z FALĄ UDERZENIOWĄ

STANISŁAW WRZESIEŃ

*Wojskowa Akademia Techniczna*

Rozpatrzono niektóre przypadki przepływów gazu lepkiego i przewodzącego ciepło, wykorzystując układ równań Naviera-Stokesa oraz równania ciągłości i energii.

Równania zapisane w niestacjonarnej formie rozwiązano stosując metodę iteracji po czasie z wykorzystaniem metody dekompozycji.

Zbadano wpływ niektórych parametrów modelowania na proces ustalania się przepływu i formowania fali uderzeniowej.

### 1. Wstęp

Przy rozwiązywaniu zagadnień naddźwiękowego opływu z falami uderzeniowymi, stosowane najczęściej rozdzielanie obszaru na obszar strumienia nielepkiego i obszar warstwy przyściennej nie zawsze jest przydatne. Dla małych i umiarkowanych liczb Reynoldsa konieczne jest rozpatrywanie całego obszaru przepływu przy zastosowaniu równań Naviera-Stokesa. Zagadnienia oddziaływania strumienia zewnętrznego z warstwą przyścienną, przepływy z obszarami oderwania, wzajemne oddziaływanie warstwy przyściennej z falą uderzeniową występujące np. we wlotach silników samolotów naddźwiękowych, są przykładami, dla których poprawny opis zjawisk można uzyskać rozwiązując pełne równania Naviera-Stokesa.

Aktualnie obserwuje się znaczny wzrost zainteresowania numerycznym rozwiązywaniem równań Naviera-Stokesa. Poczyniono też wiele prób zastosowania różnorodnych metod numerycznego całkowania, np. [1], [2], [3], [4], [5].

Początkowo do badania laminarnych przepływów lepkiego ściśliwego gazu stosowane były jawne schematy różnicowe [1], [2] pozwalające budować proste i ekonomiczne algorytmy dla maszyn cyfrowych o małej pojemności pamięci operacyjnej i stosunkowo niewielkiej szybkości obliczeń. Jednak jawne schematy różnicowe wykazują szereg istotnych wad m.in. charakteryzują się warunkową stabilnością co znacznie ogranicza zakres ich stosowania. Wady tej nie mają niejawnie schematy różnicowe, ale z kolei prowadzą do skomplikowanych różnicowych równań algebraicznych wymagających do ich rozwiązania maszyn cyfrowych o b. dużej pamięci operacyjnej i dużej szybkości działania.

Pewien kompromis można tu osiągnąć stosując metody pozwalające łączyć prostotę i ekonomiczność jawnych schematów różnicowych ze stabilnością niejawnych.

Jedną z najbardziej interesujących metod jest tu metoda dekompozycji, zaproponowana w pracy [6], pozwalająca na sprowadzenie  $N$ -wymiarowych równań do ciągu jednowymiarowych równań, co pozwala na stosunkowo łatwe stosowanie niejawnych schematów różnicowych. Metoda ta łączy niektóre z zalet jawnych i niejawnych schematów różnicowych, eliminując jednocześnie podstawowe trudności w stosowaniu każdego z nich oddzielnie. Ponieważ, jednak metoda ta nie ma jeszcze pełnego teoretycznego ujęcia, przy wykorzystywaniu nowych wariantów schematów różnicowych wynikających m.in. ze sposobu aproksymacji pochodnych, aproksymacji warunków brzegowych, rodzaju siatki różnicowej itp., konieczne jest testowanie algorytmu skonstruowanego z pomocą danego wariantu schematu różnicowego z równoczesnym badaniem granic jego stosowalności.

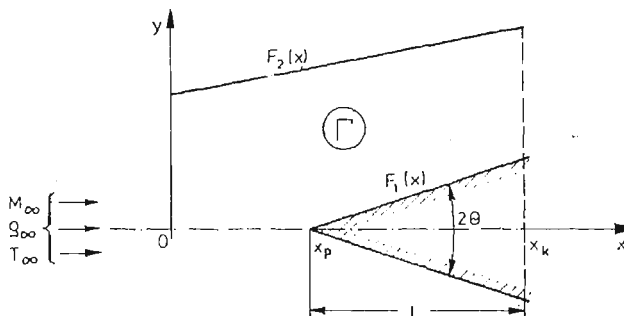
W pracy niniejszej rozpatrzono naddźwiękowy opływ klina i dokonano analizy wpływu dysypatywnych własności gazu na formowanie się pola przepływu, z wykorzystaniem zachowawczego schematu różnicowego stosowanego do pełnych równań Naviera-Stokesa [3].

Podobnego typu zagadnienie rozpatrywano w pracy [7], jednak stosowany tam schemat dekompozycji przy ustaleniu ( $t \rightarrow \infty$ ) nie miał właściwości schematu zachowawczego, co znacznie obniżało dokładność otrzymanych rezultatów i nie pozwalało na szczegółową analizę wpływu dysypatywnych własności gazu.

W niniejszej pracy, poprzez podwójne przekształcenie obszaru całkowania, otrzymano algorytm pozwalający na łatwą zmianę obszaru całkowania, jak również zagęszczenie siatki różnicowej w obszarze warstwy przyściennej w zależności od liczby Reynoldsa przepływu.

## 2. Sformułowanie zagadnienia

Poszukiwać będziemy pola ustalonego przepływu w sąsiedztwie pewnej początkowej części  $L$  klina o kącie rozwarcia  $2\theta$ , na który napływa naddźwiękowy strumień gazu lepkiego i przewodzącego ciepło (rys. 1).



Rys. 1. Obszar całkowania w kartezjańskim układzie współrzędnych

Numeryczną analizę zagadnienia przeprowadzimy na podstawie rozwiązań pełnych równań Naviera-Stokesa w pewnym obszarze  $I'$  ograniczonym brzegiem  $\partial I'$ , zapisanych w prostokątnym układzie współrzędnych  $(x, y)$ . Wprowadzimy bezwymiarowe wielkości

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, & \bar{y} &= \frac{y}{L}, & \bar{t} &= \frac{t \cdot u_\infty}{L}, & \bar{u} &= \frac{u}{u_\infty}, & \bar{v} &= \frac{v}{u_\infty}, \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, & \bar{T} &= \frac{T \cdot c_p}{u_\infty^2}, & \bar{p} &= \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2}, & \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_\infty}, & \bar{\kappa} &= \frac{\kappa}{\kappa_\infty}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty u_\infty \cdot L}{\mu_\infty}, \quad \text{Pr} = \frac{c_p \cdot \mu_\infty}{\kappa_\infty},$$

gdzie:

$t$  — czas,

$u, v$  — rzuty wektora prędkości odpowiednio na oś  $x, y$ ,

$\rho$  — gęstość gazu,

$T$  — temperatura gazu,

$p$  — ciśnienie gazu,

$\mu$  — współczynnik lepkości dynamicznej,

$\kappa$  — współczynnik przewodności cieplnej gazu,

Re — liczba Reynoldsa przepływu,

Pr — liczba Prandtla,

$c_p$  — ciepło właściwe gazu przy stałym ciśnieniu.

Układ równań dla ściśliwego gazu zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial y} (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u \left( E + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho v \left( E + \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\text{RePr}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ &\quad \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} u (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} v \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} u \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} u \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} v (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} v \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big] = 0,$$

$$E = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + e, \quad \lambda = -\frac{2}{3} \mu.$$

Dla wygody zapisu opuszczono symbole przyjęte dla oznaczenia wielkości bezwymiarowych.

W celu zamknięcia układu do równań (3.2) dołączymy równanie stanu gazu doskonałego

$$p = \frac{k-1}{k} \rho T. \quad (2.3)$$

Współczynnik lepkości dynamicznej  $\mu$  przyjmiemy jako znaną funkcję temperatury  $T$  w postaci wykładniczej zależności

$$\mu = \left( \frac{T}{T_0} \right)^\omega. \quad (2.4)$$

Przyjmujemy następujące założenia, przy których badać będziemy wpływ dysypatywnych właściwości gazu na jakościowy i ilościowy charakter pola przepływu:

- 1) napływający strumień gazu jest naddźwiękowy ( $M_\infty > 1$ ), jednorodny i niezaburzony;
- 2) przepływ w całym obszarze jest symetryczny względem płaszczyzny symetrii klina;
- 3) nie uwzględnia się przemian fizyko-chemicznych t.j. gaz przyjmuje się jako doskonały o stałej Prandtla  $Pr$ , stałym wykładniku adiabaty Poissona  $k$  i  $e = C_p T$ ;

Rozwiązania tak sformułowanego zagadnienia poszukiwać będziemy dla stacjonarnych warunków brzegowych:

$$\rho = \rho_0, \quad u = u_0, \quad v = v_0, \quad T = T_0 \quad \text{dla } x = 0 \text{ i } 0 < y \leq F_2(x),$$

$$\text{oraz } 0 < x < x_k \text{ i } y = F_2(x)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = v = 0 \quad \text{dla } 0 \leq x \leq x_p \text{ i } y = 0,$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{dla } x_p < x \leq x_k \text{ i } y = F_1(x),$$

$$\frac{\partial^r u}{\partial S^r} = \frac{\partial^r v}{\partial S^r} = \frac{\partial^r T}{\partial S^r} = 0 \quad \text{dla } x = x_k \text{ i } F_1(x) < y < F_2(x),$$

gdzie:

$S$  — kierunek wektora prędkości ( $r = 1, 2$  — bez sumowania).

Dla wygody numerycznego całkowania przekształcimy obszar całkowania w/g zależności

$$x_1 = \frac{x}{x_k},$$

$$y_1 = \frac{y - F_1(x)}{F_2(x) - F_1(x)}, \quad (2.6)$$

sprowadzając go do standartowej postaci  $Q \{0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq y_1 \leq 1\}$ . Dokonamy ponadto zgęszczenia siatki różnicowej w obszarze warstwy przyściennej przyjmując:

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1, \\ q_2 &= \frac{\ln(1+by_1)}{\ln(1+b)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie stałą  $b$  przyjmiemy w postaci zależnej od wartości  $\sqrt{\text{Re}}$ . Wprowadzimy oznaczenia:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\partial y}{\partial q_2}, & z_4 &= \frac{\partial q_1}{\partial x}, \\ z_2 &= -\frac{\partial x}{\partial q_2}, & z_5 &= \frac{\partial q_2}{\partial x}, \\ z_3 &= \frac{\partial x}{\partial q_1}, & z_6 &= \frac{\partial q_2}{\partial y}, \\ \Delta &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(q_1, q_2)} = z_1 \cdot z_3 \neq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

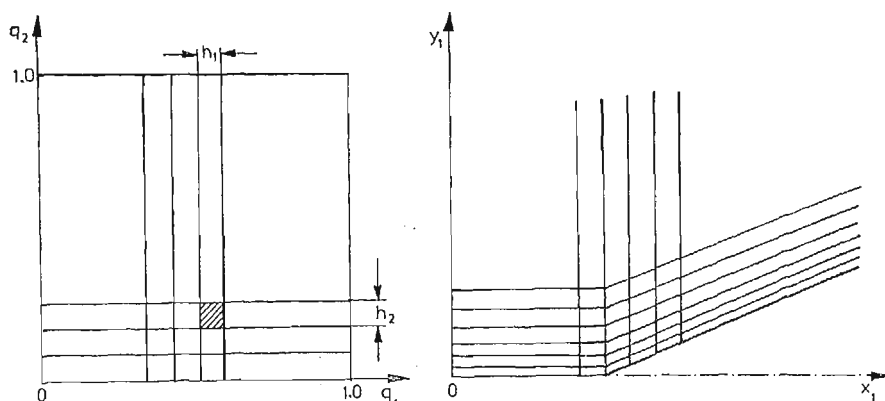
Układ równań (2.2) zapiszemy w układzie współrzędnych  $(q_1, q_2)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varrho) &= - \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (z_1 \varrho u) + \frac{\partial}{\partial q_2} (z_2 \varrho u + z_3 \varrho v) \right] = \tilde{W} \varrho, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varrho u) &= - \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ z_1 \varrho u^2 + z_1 p - \frac{1}{\text{Re}} \left[ z_1 z_4 (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial q_1} + \lambda \frac{\partial v}{\partial q_2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. z_1 z_5 (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial q_2} \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ (z_2 u + z_3 v) \varrho u + z_2 p - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\text{Re}} \left[ z_3 z_6 \mu + z_2 z_5 (2\mu + \lambda) \right] \frac{\partial u}{\partial q_2} + \mu \frac{\partial v}{\partial q_1} + \right. \\ &\quad \left. 2z_2 z_6 (\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial q_2} + z_1 z_5 (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial q_1} \right\} = \tilde{W} \varrho u, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varrho v) &= - \tilde{W} \varrho v, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varrho E) &= - \tilde{W} \varrho E, \end{aligned} \quad (2.9a)$$

lub krócej:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \tilde{W} \mathbf{U}. \quad (2.9b)$$

Tak zapisany układ rozwiązywać będziemy w sposób numeryczny, dokonując dyskretyzacji obszaru całkowania siatką różnicową, przy czym w układzie  $(q_1, q_2)$  będzie to siatka równomierna a odpowiadająca jej siatka w obszarze rzeczywistym nierównomierna, zgęszczona w pobliżu powierzchni klina (rys. 2).

Rys. 2. Siatka różnicowa w układzie wsp.  $(q_1, q_2)$  i  $(x_1, y_1)$ 

### 3. Algorytm dekompozycji. Schemat różnicowy

Dla numerycznego rozwiązywania układu równań (2.9) z warunkami brzegowymi (2.5) wykorzystamy metodę dekompozycji [3], [6], pozwalającą na sprowadzeniu zagadnienia do ciągu prostszych zadań poprzez pewne rozdzielanie układu równań wyjściowych przy jednoczesnym zachowaniu warunku aproksymacji globalnej. Sposób rozdzielania uwarunkowany jest przede wszystkim:

- statecznością schematu różnicowego i prostotą realizacji algorytmu,
- sposobem określania warunków brzegowych,
- żądaną dokładnością rozwiązań numerycznych,
- wyborem układu współrzędnych i postacią zapisu równań wyjściowych.

W tym celu zapiszemy układ równań (2.9) w prostszej postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Omega f = F_p, \quad (3.1)$$

gdzie:  $f = f\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  — wektor szukanych funkcji gazodynamicznych,

$\Omega$  — operator wydzielonej części układu (2.9) aproksymowany dalej niejawnym schematem różnicowym,

$F_p$  — pozostała część układu równań aproksymowana w sposób jawny.

Jeśli przy tym układ (2.9b) wykazuje właściwości ustalenia (a zakładamy, że tak jest) to dla  $t \rightarrow \infty$  mamy:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial f}\right)^{-1} \tilde{W} = -\Omega f + F_p. \quad (3.2)$$

Dokonując teraz aproksymacji lewej części układu (3.1) niejawnym dwuwarstwowym schematem typu Cranka-Nicholsona ze współczynnikami wagowymi otrzymamy schemat różnicowy:

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} + \Lambda_h [\alpha f^{n+1} + (1 - \alpha)f^n] = F_p, \quad (3.3)$$

aproxymujący układ równań (3.1) z dokładnością  $0(\tau + h^k)$ , który przedstawimy w kanonicznej postaci z uwzględnieniem (3.2):

$$(I + \tau \alpha \Lambda_h^k) \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial f} \right)^{-1} \tilde{W} \right]^n. \quad (3.4)$$

Wprowadzając w obszarze  $A_h = Q \times C$ , gdzie  $Q$  — jednostkowy kwadrat,  $C = [0, T]$  dla  $t \in C$ , różnicową siatkę o stałym kroku przestrzennym  $h_1 = 1/NI$ ,  $h_2 = 1/NJ$  i kroku iteracyjnym  $\tau$ , otrzymamy po aproksymacji pochodnych w (3.3) układ równań algebraicznych dla niewiadomych funkcji sieciowych:

$$(f_s)_{i,j}^n, \quad (s = 1, \dots, 4). \quad (3.5)$$

Układ ten można rozwiązać stosując np. metodę macierzowej „progonki”. Dla dostatecznie dużej liczby węzłów jest to operacja bardzo trudna, a czasem wręcz niemożliwa z uwagi na znaczne wymagania odnośnie pamięci operacyjnej EMC i czasu obliczeń.

Wybierając w charakterze wektora funkcji gazodynamicznych wektor o składowych:

$$f = \begin{Bmatrix} \varrho \\ u \\ v \\ T \end{Bmatrix}, \quad (3.6)$$

dokonyamy wieloskładnikowej dekompozycji [3] i napiszemy (2.9) w postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{l=1}^4 \Omega_l f = F_f, \quad (3.7)$$

gdzie:

$$\Omega_l = \sum_{i=1}^1 \left[ z_i^l u_i \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{\varrho \text{Re}} \left( z_i^l \frac{\partial}{\partial q^i} z_i^l \mathbf{b}_l \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \right] \mathbf{I} \quad (\text{dla } l = 1, 2),$$

$$z_2^1 = 0, \quad z_1^1 = z_4, \quad z_1^2 = z_5, \quad z_2^2 = z_6,$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\text{Pr}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\text{Pr}} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & z_4 \varrho \frac{\partial}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ z_4 \frac{1}{\varrho} \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_1} & 0 & 0 & z_4 \frac{k-1}{k} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_4 \frac{p}{\varrho} \frac{\partial}{\partial q_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} 0 & z_5 \varrho \frac{\partial}{\partial q_2} & z_6 \varrho \frac{\partial}{\partial q_2} & 0 \\ z_5 \frac{1}{\varrho} \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_2} & 0 & 0 & z_5 \frac{k-1}{k} \frac{\partial}{\partial q_2} \\ z_6 \frac{1}{\varrho} \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_2} & 0 & 0 & z_6 \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_2} \\ 0 & z_5 \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_2} & z_6 \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$u_1 = u, u_2 = v,$$

$I$  — macierz jednostkowa.

Operatory różniczkowe  $\Omega_i$  zastąpimy operatorami różnicowymi  $\Omega_{ijh}^k$  w węzłach siatki  $n, i, j$  otrzymanymi po aproksymacji pochodnych ilorazami różnicowymi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} f &\approx A_{q_1} f_{i,j} = \pm \frac{1}{h_1} (f_{i,j} - f_{i \mp 1,j}), \\ \frac{\partial}{\partial q_1} a \frac{\partial}{\partial q_1} f &\approx A_{q_1} a_{i,j} A_{q_1} f_{i,j} = \frac{1}{2h_1^2} [(a_{i,j} + a_{i+1,j}) \cdot \\ &\quad (f_{i+1,j} - f_{i,j}) - (a_{i,j} + a_{i-1,j})(f_{i,j} - f_{i-1,j})], \\ \frac{\partial}{\partial q_1} b \frac{\partial}{\partial q_2} f &\approx A_{q_1} b_{i,j} A_{q_2} f_{i,j} = \frac{1}{4h_1 h_2} [b_{i+1,j}(f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}) - \\ &\quad b_{i,j-1}(f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1})]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Analogicznie aproksymujemy pochodne:  $\frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_2} c \frac{\partial}{\partial q_2}$  i  $\frac{\partial}{\partial q_2} d \frac{\partial}{\partial q_1}$ .

Po zastąpieniu operatora  $I + \tau \alpha \Omega_h$  w ogólnym schemacie różnicowym (3.4), operatorem przybliżonym:

$$(I + \tau \alpha_1 \Omega_{1h})(I + \tau \alpha_2 \Omega_{2h})(I + \tau \alpha_3 \Omega_{3h})(I + \tau \alpha_4 \Omega_{4h}) \approx \left( I + \tau \alpha \sum_{i=1}^4 \Omega_h \right) \quad (3.10)$$

można już prowadzić obliczenia w czterech kolejnych etapach schematu dekompozycji:

$$\begin{aligned} (I + \tau \alpha_1 \Omega_{1h}) \varphi^{n+1/4} &= - \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial f} \right)^{-1} \right]^n \sum_{i=1}^4 \Omega_h W_h^n, \\ (I + \tau \alpha_2 \Omega_{2h}) \varphi^{n+1/2} &= \varphi^{n+1/4}, \\ (I + \tau \alpha_3 \Omega_{3h}) \varphi^{n+3/4} &= \varphi^{n+1/2}, \\ (I + \tau \alpha_4 \Omega_{4h}) \varphi^{n+1} &= \varphi^{n+3/4}, \\ f_{i,j}^{n+1} &= f_{i,j}^n + \tau \cdot \varphi_{i,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

W każdym z etapów, z uwagi na rodzaj aproksymacji pochodnych i warunków brzegowych, uzyskuje się układy równań algebraicznych z macierzą trójdziagonalną, łatwe do rozwiązywania na maszynach cyfrowych o średnich zdolnościach obliczeniowych (serii



ODRA i R-32). W tym przypadku zastosowano metodę faktoryzacji (zwaną często metodą „przeznania”).

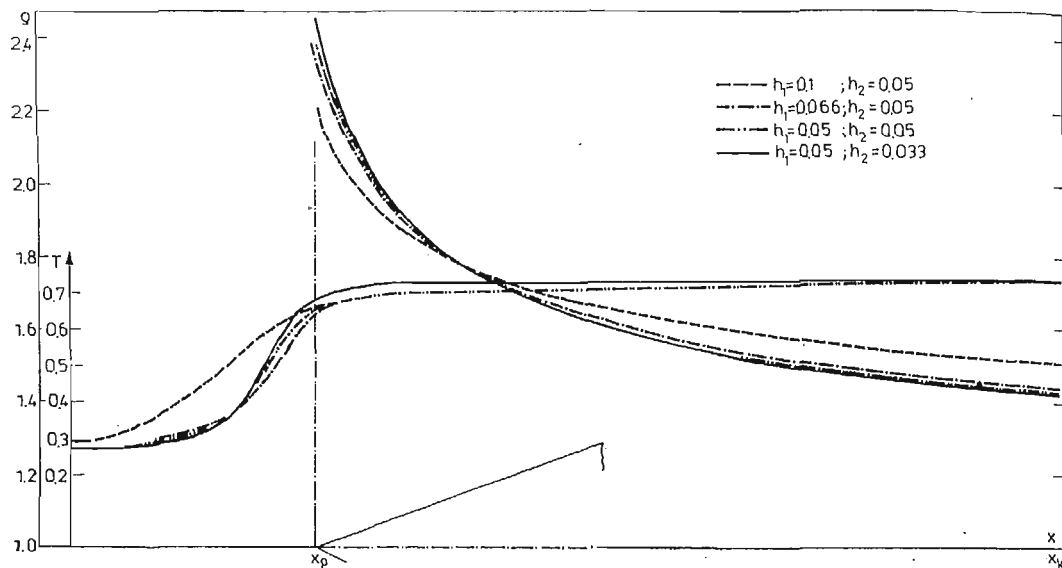
#### 4. Analiza numeryczna

Numeryczne obliczenia wykonano na cyfrowej maszynie ODRA 1305 za pomocą programu o nazwie LNPP.

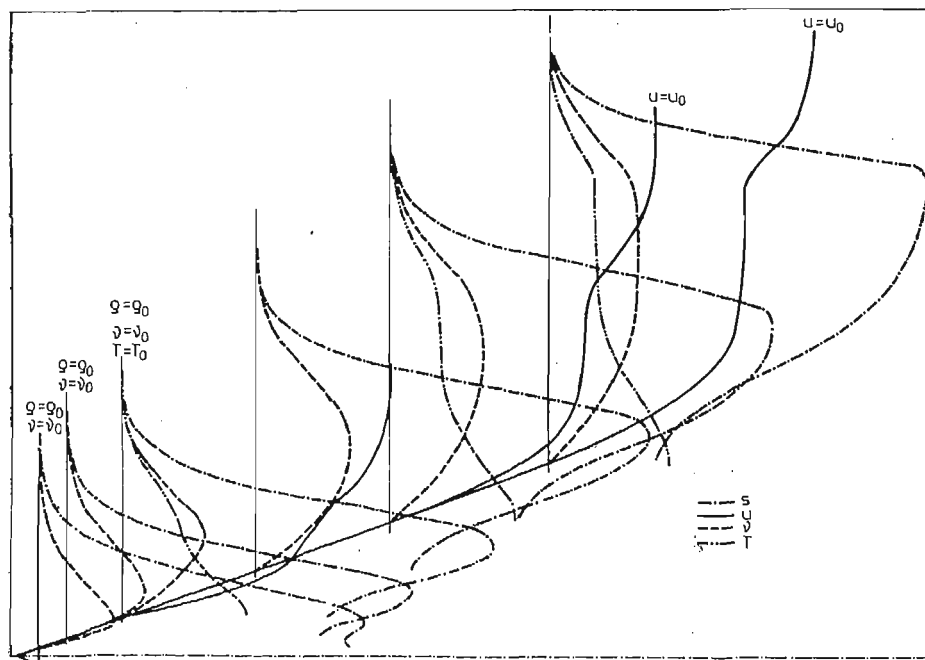
Z uwagi na długi czas obliczeń każdego wariantu (rzędu kilku godzin), obliczenia prowadzono etapami zapisując wyniki pośrednie na taśmie magnetycznej. Przy każdym kolejnym etapie pracy maszyny wyniki te wprowadzano jako warunki początkowe. Końcowe wyniki również zapisywano na taśmie magnetycznej w formie rekordów niezredukowanych, tworząc w ten sposób zbiór rozwiązań dla różnych liczb Reynoldsa przepływu, poszczególnych liczb węzłów siatki różnicowej, stopnia zgęszczenia siatki itp. Postąpiono tak z dwóch powodów. Po pierwsze, wyniki te wprowadzono jako warunki początkowe przy zmianie np. liczby Reynoldsa przepływu, co znacznie skraca czas obliczeń nowego wariantu. Po drugie, powstał pewien zbiór, łatwo dostępny i wygodny przy analizie pola przepływu programami użytkowymi tablicującymi lub rysującymi żądane funkcje i współczynniki.

Obliczenia testujące prowadzono dla klina o kącie rozwarcia  $2\theta = 40^\circ$ , prędkości przepływu niezaburzonego  $M = 3,0$  dla współczynników:  $\kappa = 1,41$ ;  $\omega = 0,75$ ;  $Pr = 0,71$ , w szerokim przedziale liczb Reynoldsa oraz dla różnych wartości kroku przestrzennego:  $h_1$  i  $h_2$ . Przykładowe wyniki obliczeń rozkładu na powierzchni klina niektórych parametrów gazodynamicznych uzyskanych dla warunków brzegowych (2.5) i warunków początkowych określonych parametrami przepływu niezaburzonego przedstawiono na rys. 3. Z przebiegu funkcji  $\varrho$  i  $T$  wynika iż uzyskano dużą zbieżność wyników w dość dużym przedziale zmiany kroku  $h_1$  i  $h_2$ . Np. przy zmianie kroku  $h_1$  od wartości  $h_1 = 0,066$  do  $h_1 = 0,05$  krzywe  $\varrho(x)$  i  $T(x)$  leżą bardzo blisko siebie, jedynie w obszarze dosuniętej fali uderzeniowej różnica wartości parametrów sięga  $7 \div 8\%$ . Dla wartości  $h_1 = 0,1$  różnice są wyraźne również w obszarze dalszej części klina, gdzie nie występuje wzajemne oddziaływanie warstwy przyściennej z falą uderzeniową. Rozbieżności parametrów sięgają tu  $7\%$ , natomiast w obszarze ostrza klina  $10 - 12\%$ . Stąd wniosek, że w pobliżu ostrza konieczne jest zgęszczenie węzłów siatki różnicowej w kierunku osi  $x$ . Można to oczywiście osiągnąć zwiększając ogólną liczbę węzłów siatki w tym kierunku, chociaż bardziej celowe byłoby niejednorodne zgęszczenie istniejącej liczby węzłów (lub nieznacznie tylko większej), z uwagi na wystarczająco poprawny przebieg funkcji gazodynamicznych w dalszej części klina. Za takim rozwiązaniem przemawia również fakt, iż jest to obszar dużych gradientów parametrów w obydwu kierunkach obszaru całkowania.

Analizując wpływ kroku  $h_2$  na wyniki obliczeń, łatwo zauważyć że wartość  $h_2 = 0,05$  przy zachowaniu  $h_1 = 0,05$  jest wystarczająca do otrzymywania zbieżnych rezultatów. Przy dalszym zmniejszaniu wartości  $h_1$  ( $h_2 = 0,033$ ) krzywe  $\varrho(x)$  prawie pokrywają się, a różnice w przebiegu  $T(x)$  są nieznaczne (rzędu  $1,5\%$ ). Również i w tym przypadku mamy do czynienia z pewną niedokładnością w obszarze ostrza klina. Wydaje się, więc celowe by rozpatrzyć w późniejszym etapie testowania metodyki, sposoby prowadzące do



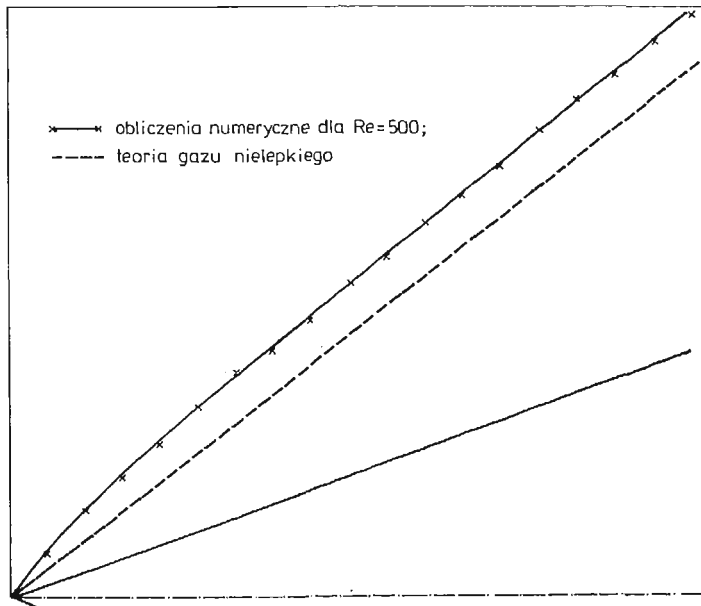
Rys. 3. Wpływ wartości kroku całkowania na wartości  $g$ ,  $T$  na powierzchni ciała opływającego



Rys. 4. Zmiana parametrów przepływu wzdłuż długości klina ( $Re = 500$ )

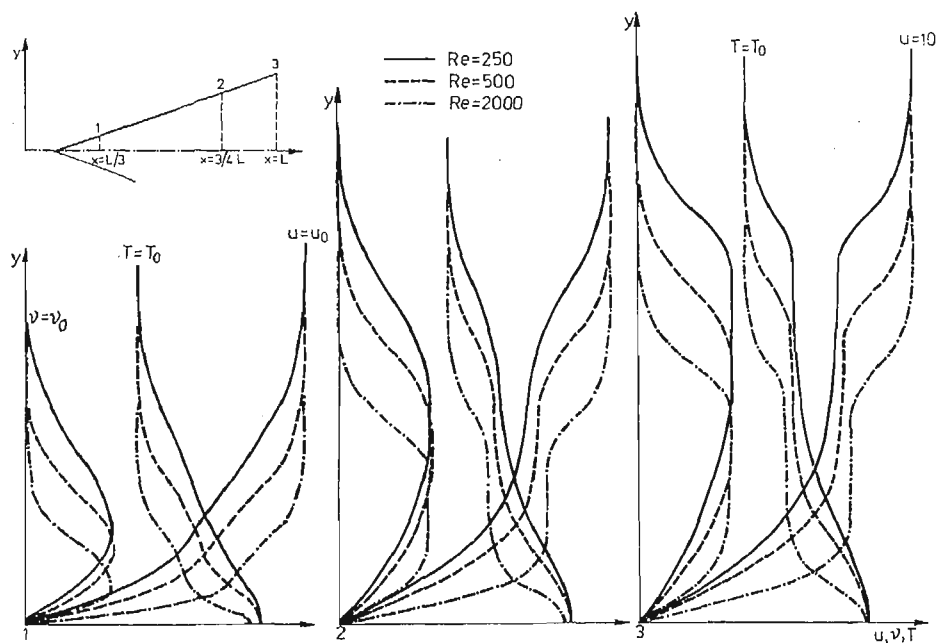
zwiększenia dokładności obliczeń w obszarach wzajemnego oddziaływania fali uderzeniowej z warstwą przyścienną. Jedną z metod może tu być wspomniane wcześniej zgęszczenie siatki w kierunku osi  $x$ , drugą natomiast modyfikacja aproksymacji równania ciągłości. Gęstość gazu jest bowiem parametrem, którego ustalenie się w procesie iteracji po czasie, następuje zdecydowanie najwolniej. Prace nad tymi zagadnieniami są aktualnie prowadzone.

Na rys. 4 pokazano przykładowy przebieg funkcji  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  i  $T$  uzyskanych dla  $M = 3,0$  i  $Re = 500$ , w kilku przekrojach wybranych wzdłuż długości klina. Widać wyraźną zmianę charakteru przebiegu krzywych w miarę oddalania się od ostrza klina. Mianowicie, jeśli bezpośrednio za ostrzem przebiegi wszystkich parametrów charakteryzują się ciągłym gradientem (oczywiście zmiennym), to w miarę oddalania od ostrza można wyróżnić obszar w którym parametry przepływu są w przybliżeniu stałe. W końcowej części klina obszar pola przepływu ze stałymi wartościami parametrów widać już bardzo wyraźnie, przy czym obejmuje on już znacznie większą strefę pomiędzy powierzchnią klina, a falą uderzeniową. Zjawisko to ma swój głęboki sens fizyczny. Mianowicie w pobliżu ostrza klina następuje wzajemne przenikanie się i wzajemne oddziaływanie warstwy przyściennej z falą uderzeniową. Prawdopodobnie oddziaływanie to jest przyczyną pewnego zakrzywienia się w tej strefie fali uderzeniowej rys. 5. W strefie przepływu gdzie odległość fali



Rys. 5. Położenie fali uderzeniowej przy opływie klina dla  $M = 3.0$  i  $\Theta = 20^\circ$

uderzeniowej od warstwy przyściennej jest na tyle duża, iż wzajemne oddziaływanie nie występuje, zaczyna się formować obszar przepływu o stałej wartości parametrów — odpowiednik pola opływu klina w/g klasycznej teorii dynamiki gazu nielepkiego. Zwraca uwagę również fakt braku zakrzywienia fali uderzeniowej w tej strefie pola przepływu.



Rys. 6. Parametry przepływu ustalonego dla  $Re = 250; 500; 2000$

Rysunek 6 przedstawia parametry gazodynamiczne uzyskane przy numerycznym modelowaniu opływu dla różnych wartości liczby Reynoldsa przepływu niezaburzonego. Łatwo zauważyć wpływ liczby  $Re$  na trzy zasadnicze elementy nadźwiękowego opływu ciała płynem lepkiem. Rozpatrzmy je kolejno.

**Warstwa przyścienna.** Widać bardzo wyraźny wzrost grubości warstwy przyściennej wraz ze zmniejszaniem się liczby Reynoldsa. Prowadzi to oczywiście do zwiększania strefy wzajemnego oddziaływania warstwy przyściennej z falą uderzeniową (krzywe dla  $Re = 250$ ). Należy przypuszczać, że dalsze już niewielkie zmniejszenie liczby Reynoldsa doprowadzi do uformowania pola przepływu bez wyraźnej strefy warstwy przyściennej i fali uderzeniowej. Będzie to oczywiście przypadek niemożliwy do obliczeń za pomocą innych niż pełne równania N-S.

**Fala uderzeniowa.** Z uwagi na niezbyt dużą liczbę węzłów siatki przypadającą w strefie formowanie się fali uderzeniowej, nie analizowano grubości fali uderzeniowej, a jedynie jej położenie rozumiane jako zbiór  $\max$  wartości  $\varrho$ . Dla małych liczb Reynoldsa (250) fala uderzeniowa formuje się znacznie wyżej od jej położenia w opływie gazem nielepkiem przy czym kąt fali jest znacznie większy. Odpowiada to w przybliżeniu położeniu fali przy opływie ciała pogrubionego o grubość warstwy przyściennej. Jednocześnie można stwierdzić, że jest to fala o znacznej grubości, gdyż zaburzenia przepływu docierają do górnej granicy całkowania i w celu uniknięcia błędów należało zwiększyć obszar całkowania do wartości  $G_1 = 2L$ . A dla porównania: dla  $Re = 500$  wystarczała wartość  $G_1 = 1,5 L$ , dla  $Re = 2000$   $G_1 = L$ . Dla rosnącej liczby Reynoldsa położenie formującej się fali uderzeniowej zbliża się do otrzymanego w teorii przepływu nielepkiego, z zachowaniem prawa opływu ciała pogrubionego.

Переуы в стrefie помядзу варстwą przысциенą а варстwą удерзениową. Zachodzi tu oczywisty зwiązek zgodny zresztą z wyżej wymienionymi zjawiskami, помядзу по-лоуением теj стrefy, ееj wielkością i параметрами переуыwu. Dla малых числ Re jest to стrefa stosunkowo mała, znajduąca się tylko w tylnej części klina. Kąt odchylenia wektora прeдкoсci wynosi tu 26° (przy kącie klina 20°). Dla rosnących числ Re obserwuje się znaczne зwiększenie takiej стrefy, а kąt odchylenia strumienia np. dla  $Re = 2000$  wynosi 22°.

### 5. Uwagi коńcowe

Przewiduje się również testowanie metodyki dla  $Re > 2000$  по uwzględnieniu wspomnianych wcześniej sposobów зwiększenia dokładności obliczeń w стrefach переуыwu о dużych gradientach parametrów. Należy wtedy zastanowić się над sposobem optymalizacji wielkości zmian kroku iteracyjnego  $\tau$  w процесie iteracji, ponieważ dla rosnących числ Reynoldsa процес ustalania się переуыwu (przy  $\tau = \text{const}$ ) staje się coraz bardziej powolny co znacznie wydłuуа czas pracy maszyny.

### Literatura

1. J. S. ALLEN, S. I. CHENG, *Numerical Solution of the Compressible Navier Stokes Equations for the Laminar Near Wake*. Physics of Fluids, v. 13, No 1, 1970.
2. Н. Ю. Брайлoвская, *Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа*, ДАН СССР, т. 160, № 5, 1965.  
В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко, *Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа*, ЖВМиМФ, т. 19, № 1, с. 174 - 188, 1979.
4. R. M. BEAM, R. F. WARMING, *An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier — Stokes Equations*, AIAA Journal, Vol. 16, No 4, s. 393 - 402, 1978.
5. E. VON LAVANTE, Jr. W. T. THOMPSON, *An Implicit, Bidiagonal Numerical Method for Solving the Navier — Stokes Equations*, AIAA Journal, Vol. 21, No 6, s. 828 - 833, 1983.
6. Н. Н. Яненко, *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*, Издательство „Наука”, 1967.
7. Ю. А. Березин, В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко, *Об одной неявной схеме расчета течения вязкого теплопроводного газа*. „Численные методы механики сплошной среды”, т. 3, № 4, с. 3 - 18, Новосибирск 1972.

### Резюме

#### ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Рассмотрены некоторые виды течения вязкого теплопроводного газа при использовании уравнений Навье-Стокса, уравнения неразрывности и уравнения энергии.

Уравнения, записанные в нестационарном виде, решаются методом установления по времени с использованием схемы расщепления.

Исследовано влияние параметров численного расчета на процесс установления течения и формирование ударной волны.

## S u m m a r y

## NUMERICAL COMPUTATIONS OF PLANE VISCOUS SUPERSONIC FLOWS WITH SHOCK WAVES

Some cases of viscous and heat conducting and compressible gas flows have been considered by making use of the Navier-Stokes equations.

The equations are written in the nonstationary conservation-law form and solved by means of time-dependent iterations, the method of fractional steps being applied.

The effect of some parameters on the process of determining a steady state flow and shock wave formation has been examined.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 listopada 1986 roku.*