MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 26, 1988

O ROZSEPAROWANIU RÓWNAŃ TERMODYFUZJI LEPKOSPRĘŻYSTEJ

JAN KUBIK
MAREK WRÓBEL

Wyższa Szkoła Inżynierska, Opole

1. Wstęp

Zagadnienia termodyfuzji lepkosprężystej prowadzą do złożonego układu pięciu równań różniczkowo-całkowych. Trudności związane z całkowaniem tego układu równań skłaniają do poszukiwań prostszych ujęć zagadnienia. Jedną z takich możliwości w zakresie sprzężonej termosprężystości podał jeszcze w 1956 r. Biot [1]. Propozycja ta sprowadza zadania termosprężystości do rozsprzężonych równań teorii naprężeń cieplnych. Niniejsza praca stanowi przeniesienie tej ideii na zagadnienia termodyfuzji lepkosprężystej.

2. Równania zagadnienia

Równania tworzące wynikające z funkcjonału energii wewnętrznej dla zadań termodyfuzji lepkosprężystej mają postać [4, 5, 6]:

$$\sigma_{ij} = E'_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} - \varphi'_{ij} * d\varrho S - \Phi'_{ij} * dC, \tag{2.1}$$

$$\Theta = -\varphi'_{ij} * d\varepsilon_{ij} + m' * d\varrho S - l' * dC, \tag{2.2}$$

$$M = -\Phi'_{ij} * d\varepsilon_{ij} - l' * d\varrho S + n' * dC. \tag{2.3}$$

Kolejny równoważny zestaw równań tworzących otrzymuje się z funkcjonału energii swobodnej [4, 5, 6]:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} - \varphi_{ij} * d\Theta + \Phi_{ij} * dC, \tag{2.4}$$

$$\varrho S = \varphi_{ij} * d\varepsilon_{ij} + m * d\Theta + l * dC, \tag{2.5}$$

$$M = \Phi_{ij} * d\varepsilon_{ij} - l * d\Theta + n * dC. \tag{2.6}$$

Zależnościom (2.1) - (2.6) odpowiadają następujące równania na strumienie masy i ciepła:

$$j_i = -K_{ij} M_{,j}, \tag{2.7}$$

$$q_i = -k_{ij} \Theta_{,j}, \tag{2.8}$$

oraz równania pól dotyczące quasi-statycznych zagadnień termodyfuzji:

$$\sigma_{ij,j}+\varrho F_i = 0, \tag{2.9}$$

$$\dot{C} = r_1 - j_{i,i}, \tag{2.10}$$

$$T_0 \varrho \dot{S} = \varrho r_2 - q_{i,i}. \tag{2.11}$$

W rozważaniach uwzględniamy także równania geometryczne:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j}+U_{j,i}). \tag{2.12}$$

Zależnościom (2.12) i (2.9) oraz równaniom tworzącym (2.1)÷(2.3) lub (2.4)÷(2.6) odpowiadają w ośrodku izotropowym następujące równania przemieszczeniowe Lamego [4, 5, 6]:

$$\mu' * dU_{i,jj} + (\mu'+\lambda') * dU_{j,ji} = \gamma'_s * d\varrho S_{,i} + \gamma'_c * dC_{,i} - \varrho F_i, \tag{2.13}$$

gdzie:

$$\gamma'_s = \alpha_s(2\mu'+3\lambda'), \tag{2.14}$$

$$\gamma'_c = \alpha_c(2\mu'+3\lambda'), \tag{2.15}$$

$$\mu * dU_{i,jj} + (\mu+\lambda) * dU_{j,ji} = \gamma_T * d\Theta_{,i} + \gamma_c * dC_{,i} - \varrho F_i, \tag{2.16}$$

gdzie:

$$\gamma_T = \alpha_T(2\mu+3\lambda), \tag{2.17}$$

$$\gamma_c = \alpha_c(2\mu+3\lambda). \tag{2.18}$$

Jeżeli uwzględniać równania tworzące (2.1) - (2.3) i związek geometryczny (2.12) w równaniu entropii (2.11) i bilansie masy (2.10) to otrzymamy:

$$T_0 \varrho \dot{S} = \varrho r_2 - k(\varphi' * de_{,ii} - m' * d\varrho S_{,ii} - l' * dC_{,ii}), \tag{2.19}$$

$$\dot{C} = r_1 - K(\Phi' * de_{,ii} + l' * d\varrho S_{,ii} + n * dC_{,ii}). \tag{2.20}$$

W równaniach (2.19) i (2.20) przyjęto, że:

$$k_{ij} = k\delta_{ij}, \quad K_{ij} = K\delta_{ij}, \quad \varphi'_{ij} = \varphi'\delta_{ij}, \quad \Phi'_{ij} = \Phi'\delta_{ij}. \tag{2.21}$$

W zależnościach (2.1)÷(2.21) przyjęto następujące oznaczenia:
σ_{ij}, ε_{ij} — tensory stanu naprężenia i odkształcenia,
T_1, C_1 — temperatura i koncentracja w chwili t,
T_0, C_0 — temperatura i koncentracja stanu naturalnego,

$$\Theta = T_1 - T_0, \; C = C_1 - C_0 \tag{2.22}$$

ϱF_i — siła masowa jednostki objętości ciała,
$E_{ijkl}, E'_{ijkl}, \varphi_{ij}, \varphi'_{ij}, \Phi_{ij}, \Phi'_{ij}$ — tensory funkcji relaksacji,
l, l', m, n, n' — funkcje relaksacji,
q_i, j_i — strumień ciepła i strumień masy,
S — entropia,
M — potencjał chemiczny,

k_{ij}, K_{ij} — tensory przewodności cieplnej i dyfuzyjnej,
r_1, r_2 — źródło masy i źródło ciepła w jednostce objętości i na jednostkę czasu,
$*$ — symbol oznaczający mnożenie splotowe, zdefiniowane relacją,

$$f_1 * df_2 = \int_0^t f_1(t-\tau) df_2(\tau) \tag{2.23}$$

$(\ldots)_{,i}$ — oznaczenie pochodnej cząstkowej,

$(\dot{\ })$ — oznaczenie pochodnej względem czasu $\frac{d(\ldots)}{dt}$

H, $H(t)$ — funkcja Heaviside'a,

3. Rozsprzężenie równań

Proces rozsprzęgania układu równań termodyfuzji lepkosprężystej rozpoczynamy od zróżniczkowania zależności (2.13). Otrzymamy

$$(2\mu'+\lambda') * dU_{i,jji} = \gamma_s' * d\varrho S_{,ii} + \gamma_c' * dC_{,ii} - \varrho F_{i,i}. \tag{3.1}$$

Po przyjęciu założenia, że współczynnik Poissona jest stały, czyli

$$\mu'(t) = \mathring{\mu}' \mathring{f}(t), \quad \lambda'(t) = \mathring{\lambda}' \mathring{f}(t), \tag{3.2}$$

dokonujemy na równaniu (3.1) transformacji i retransformacji Laplace'a otrzymując:

$$e_{,ii} = \frac{\gamma_s'}{(2\mathring{\mu}'+\mathring{\lambda}')\mathring{f}(t)} \varrho S_{,ii} + \frac{\gamma_c'}{(2\mathring{\mu}'+\mathring{\lambda}')\mathring{f}(t)} C_{,ii} - \frac{\varrho}{(2\mathring{\mu}'+\mathring{\lambda}')\mathring{f}(t)} F_{i,i} =$$
$$= \mathring{\gamma}_s \varrho S_{,ii} + \mathring{\gamma}_c C_{,ii} - \mathring{\varrho} F_{i,i}. \tag{3.3}$$

Wykorzystując zależność (3.3) można wyeliminować z równań (2.19) i (2.20) pierwsze składniki w nawiasach. W rezultacie otrzymamy:

$$T_0 \varrho \dot{S} = \varrho r_2 - k(\hat{m} * d\varrho S_{,ii} + \hat{l} * dC_{,ii} - \hat{\varrho} F_{i,i}), \tag{3.4}$$

$$\dot{C} = r_1 - K(\hat{l} * d\varrho S_{,ii} + \hat{n} * dC_{,ii} - \tilde{\varrho} F_{i,i}), \tag{3.5}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \varphi' \mathring{\gamma}_s - m', \\ \hat{l} &= \varphi' \mathring{\gamma}_c + l' = \Phi' \mathring{\gamma}_s + l', \\ \hat{n} &= \Phi' \mathring{\gamma}_c - n', \\ \hat{\varrho} &= \varphi' \mathring{\varrho}, \\ \tilde{\varrho} &= \Phi' \mathring{\varrho}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Równania (3.4) i (3.5) są rozseparowanym od pola przemieszczeń układem równań cieplno-dyfuzyjnych, który wraz z równaniem przemieszczeniowym:

$$\mu' * dU_{i,jj} + (\mu' + \lambda') * dU_{j,ji} = \gamma_s' * d\varrho S_{,i} + \gamma_c' * dC_{,i} - \varrho F_i, \tag{3.7}$$

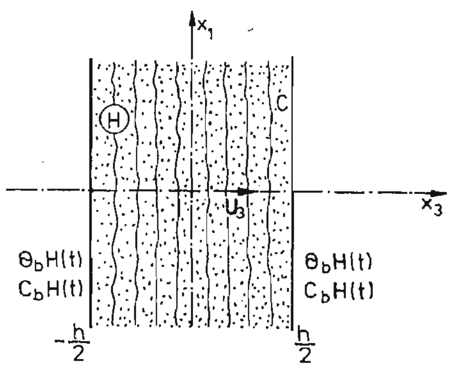
stanowią komplet równań termodyfuzji lepkosprężystej sprowadzonej do teorii naprężeń cieplno-dyfuzyjnych.

4. Termodyfuzja w warstwie

Jako zastosowanie proponowanej w pracy metody rozwiązanie zadań termodyfuzji sprężystej i lepkosprężystej przeprowadzimy analizę następującego zadania:

Należy wyznaczyć pola temperatury koncentracji, przemieszczeń, a w dalszej kolejności odkształceń i naprężeń w warstwie sprężystej określone przez dane na brzegach wartości temperatury i koncentracji.

Rozważmy więc warstwę o grubości h, w której występuje pole temperatury Θ, koncentracji C i przemieszczenia U_i (rys. 1).



Rys. 1. Warstwa z polem temperatury, koncentracji i przemieszczenia oraz warunkami brzegowymi

Zakładamy, że zagadnienie przez nas rozpatrywane jest jednowymiarowe, oraz że ośrodek jest izotropowy, brak w nim źródeł ciepła i masy oraz sił masowych. Wówczas wielkości występujące w zadaniu dadzą się przedstawić w postaci:

$$\Theta = \Theta(x_3, t), \tag{4.1}$$

$$\varrho S = \varrho S(x_3, t), \tag{4.2}$$

$$C = C(x_3, t), \tag{4.3}$$

$$U_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \end{bmatrix}, \quad (4.4) \qquad n_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$k_{ij} = k\delta_{ij} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \quad (4.6) \qquad K_{ij} = K\delta_{ij} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu' * dU_{i,j} + (\lambda * dU_{k,k} - \gamma_c' * d\varrho S - \gamma_c * dC)\,\delta_{ij} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_3, t) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}(x_3, t) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_3, t) \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

$$\varrho r_2 = 0, \quad r_1 = 0,$$

$$\varrho F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

$$\Theta\left(\pm\frac{h}{2};\quad t\right) = \Theta_b H(t), \; C\left(\pm\frac{h}{2};\quad t\right) = C_b H(t) \tag{4.10}$$

Wobec powyższego komplet równań wyjściowych (3.4), (3.5) i (3.7) można przedstawić w postaci:

$$T_0 \varrho \dot{S} = -k(\hat{m} * d\varrho S_{,33} + \hat{l} * dC_{,33}), \tag{4.11}$$

$$\dot{C} = -K(\hat{l} * d\varrho S_{,33} + \hat{n} * dC_{,33}), \tag{4.12}$$

$$U_{3,33} = \frac{1}{2\mu' + \lambda'}(\gamma_s' \varrho S_{,3} + \gamma_c' C_{,3}). \tag{4.13}$$

Do rozwiązania układu równań (4.11) i (4.12) potrzebny jest jeszcze warunek brzegowy dla entropii i warunki początkowe. Aby znaleźć warunek brzegowy w entropii weźmy równanie tworzące (2.5) oraz równanie przemieszczeniowe (2.16) na którym dokonano transformacji Laplace'a. Po scałkowaniu będzie:

$$\varrho S = \varphi_{ij} * dU_{i,j} + m * d\Theta + l * dC, \tag{4.14}$$

$$\bar{U}_{3,3} = \frac{2\bar{\mu} + 3\bar{\lambda}}{2\bar{\mu} + \bar{\lambda}}(\alpha_c \bar{C} + \alpha_T \bar{\Theta}) + X, \tag{4.15}$$

stałą X wyznaczymy z warunku brzegowego:

$$\bar{U}_{3,3}\Big|_{\pm\frac{h}{2}} = \frac{2\bar{\mu} + 3\bar{\lambda}}{2\bar{\mu} + \bar{\lambda}}(\alpha_c C_b + \alpha_T \Theta_b)\frac{1}{s} \Rightarrow X = 0, \tag{4.16}$$

stąd:

$$U_{3,3} = \frac{2\mu + 3\lambda}{2\mu + \lambda}(\alpha_c C + \alpha_T \Theta), \tag{4.17}$$

wstawiając (4.17) do (4.14) otrzymujemy warunek brzegowy dla entropii:

$$\varrho S\Big|_{\pm\frac{h}{2}} = \left[\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\varphi_{33}\alpha_T + m\right)\Theta_b + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\varphi_{33}\alpha_c + l\right)C_b\right]H(t) = \varrho S_b H(t). \tag{4.18}$$

Natomiast jako warunki początkowe przyjmujemy zerową wartość entropii i koncentracji na całej grubości warstwy

$$\varrho S(0^+) = 0, \qquad C(0^+) = 0. \tag{4.19}$$

Jeżeli na układzie równań (4.11) i (4.12) dokonać teraz transformacji Laplace'a to po wykorzystaniu warunków początkowych (4.19) układ ten można rozseparować. Otrzymamy dwa równania postaci:

$$A\varrho\bar{S}_{,3333} - sB\varrho\bar{S}_{,33} + s^2 T_0 \varrho\bar{S} = 0, \tag{4.20}$$

$$\bar{C} = \frac{1}{s} D\varrho\bar{S}_{,33} + E\varrho\bar{S}, \tag{4.21}$$

gdzie:

$$A = kK(\hat{l}^2 - \hat{m}\hat{n}), \qquad B = k\hat{m} + K\hat{n}T_0,$$
$$D = K\left(\frac{\hat{m}\hat{n}}{\hat{l}} - \hat{l}\right), \qquad E = \frac{K\hat{n}}{k\hat{l}} T_0. \tag{4.22}$$

Rozwiązanie ogólne dla transformaty entropii wyznacza się z równania (4.20) otrzymując:

$$\varrho\bar{S}(x_3, s) = A_1 e^{c\sqrt{s}x_3} + A_2 e^{-c\sqrt{s}x_3} + A_3 e^{d\sqrt{s}x_3} + A_4 e^{-d\sqrt{s}x_3}, \tag{4.23}$$

gdzie:

$$c = \sqrt{\frac{1}{2A}\left(B + \sqrt{B^2 - 4AT_0}\right)} \qquad d = \sqrt{\frac{1}{2A}\left(B - \sqrt{B^2 - 4AT_0}\right)}. \tag{4.24}$$

Dzięki symetrii warunków brzegowych rozważania nasze znacznie się upraszczają, bowiem rozwiązanie zawiera parzyste funkcje ze względu na współrzędną x_3:

$$\varrho\bar{S}(x_3, s) = \varrho\bar{S}(-x_3, s), \qquad \bar{C}(x_3, s) = \bar{C}(-x_3, s). \tag{4.25}$$

Własność (4.25) pociąga za sobą w rozwiązaniu (4.23) równość parametrów:

$$A_1 = A_2 \text{ i } A_3 = A_4. \tag{4.26}$$

Wówczas transformatę entropii (4.23) można zapisać wykorzystując definicję cosinusa hiperbolicznego w postaci:

$$\varrho\bar{S}(x_3, s) = 2A_1 \mathrm{ch}(c\sqrt{s}x_3) + 2A_3 \mathrm{ch}(d\sqrt{s}x_3). \tag{4.27}$$

Natomiast z drugiego równania układu (4.20) i (4.21) otrzymamy rozwiązanie ogólne dla transformaty koncentracji:

$$\bar{C}(x_3, s) = 2A_1(Dc^2 + E)\mathrm{ch}(c\sqrt{s}x_3) + 2A_3(Dd^2 + E)\mathrm{ch}(d\sqrt{s}x_3), \tag{4.28}$$

skąd po wykorzystaniu warunków brzegowych (4.10) i dokonaniu retransformacji Laplace'a [2,3] otrzymujemy po przekształceniach ostateczną postać na poszukiwane wielkości polowe entropii i koncentracji:

$$\varrho S(x_3, t) = \frac{C_b - \varrho S_b(Dd^2+E)}{D(c^2-d^2)}\left[H(t) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{\frac{-\pi^2(2k-1)^2}{h^2c^2}t} \cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3\right] +$$

$$+ \frac{\varrho S_b(Dc^2+E) - C_b}{D(c^2-d^2)}\left[H(t) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{\frac{-\pi^2(2k-1)^2}{h^2d^2}t} \cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3\right], \tag{4.30}$$

$$C(x_3, t) = \frac{[C_b - \varrho S_b(Dd^2+E)](Dc^2+E)}{D(c^2-d^2)}\left[H(t) + \right.$$

$$\left. - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{\frac{-\pi^2(2k-1)^2}{h^2c^2}t} \cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3\right] + \frac{[\varrho S_b(Dc^2+E) - C_b](Dd^2+E)}{D(c^2-d^2)}$$

$$\left[H(t) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{\frac{-\pi^2(2k-1)^2}{h^2d^2}t} \cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3\right]. \tag{4.31}$$

Pole odkształceń obliczymy z równania (2.12) poprzez scałkowanie zależności (4.13):

$$\varepsilon_{33} = U_{3,3} = \frac{2\mu' + 3\lambda'}{2\mu' + \lambda'}(\alpha_s \varrho S + \alpha_c C) + Y, \tag{4.32}$$

a stałą Y wyznaczymy z warunku brzegowego i znanych wartości ϱS_b i C_b:

$$U_{3,3}\Big|_{\pm\frac{h}{2}} = \frac{2\mu' + 3\lambda'}{2\mu' + \lambda'}(\alpha_s \varrho S_b + \alpha_c C_b) \Rightarrow Y = 0, \tag{4.33}$$

skąd po odpowiednich rachunkach otrzymujemy z zależności (4.32) ostateczną postać równania na pole odkształceń:

$$\varepsilon_{33}(x_3, t) = \frac{1+\nu}{1-\nu}(\alpha_s \varrho S + \alpha_c C). \tag{4.34}$$

Natomiast pole temperatury Θ i naprężeń σ_{ij} określimy z równań tworzących (2.2) i (2.4) dla ośrodka sprężystego:

$$\Theta = -\varphi'_{ij}\varepsilon_{ij} + m'\varrho S - l'C, \tag{4.35}$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \varphi_{ij}\Theta + \Phi_{ij}C, \tag{4.36}$$

skąd ostatecznie po wykorzystaniu zależności łączących odpowiednie stałe materiałowe otrzymujemy:

$$\Theta(x_3, t) = \frac{1}{m}\left[\frac{-\alpha_T}{(1-2\nu)}E\varepsilon_{33}(x_3, t) + \varrho S(x_3, t) - lC(x_3, t)\right], \tag{4.37}$$

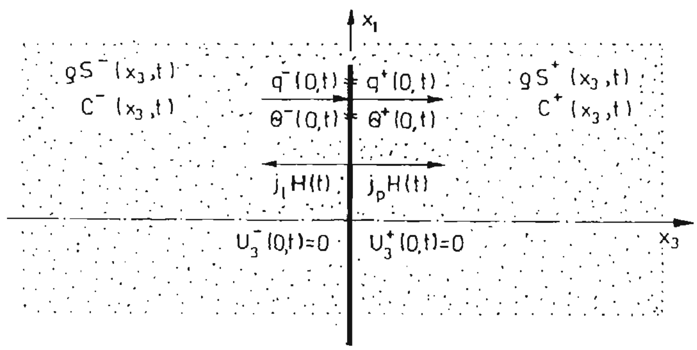
$$\sigma_{11}(x_3, t) = \sigma_{22}(x_3, t) = \frac{E}{1-2\nu}\left\{\frac{\nu}{1+\nu}\varepsilon_{33}(x_3, t) - [\alpha_T\Theta(x_3, t) + \alpha_c C(x_3, t)]\right\}, \tag{4.38}$$

$$\sigma_{33}(x_3, t) = 0, \tag{4.39}$$

gdzie występujące w zależnościach (4.35) - (4.38) pola entropii, koncentracji i odkształceń dane są równaniami (4.30), (4.31) i (4.44).

5. Kontakt dwóch półprzestrzeni

Jako kolejny przykład proponowanego ujęcia zadań termodyfuzji rozpatrzymy zagadnienie kontaktu dwóch sprężystych i izotropowych półprzestrzeni (rys. 2). Zakładamy, że zagadnienie przez nas rozpatrywane jest jednowymiarowe, oraz pomijamy w nim



Rys. 2. Kontakt dwóch półprzestrzeni z polem entropii i koncentracji oraz warunkami brzegowymi

źródła ciepła i masy oraz siły masowe. Wówczas podobnie jak poprzednio wielkości występujące w zadaniu opisane są zależnościami (4.1) - (4.9) i (4.11) - (4.13). Jako warunki początkowe przyjmujemy brak przyrostów odkształceń, temperatury i koncentracji ponad stan naturalny:

$$\varepsilon^{\pm}_{ij}(x_3, 0) = 0, \quad \Theta^{\pm}(x_3, 0) = 0, \quad C^{\pm}(x_3, 0) = 0. \tag{5.1}$$

Przyjmujemy również zanikanie tych wielkości polowych w nieskończoności:

$$\varepsilon^{\pm}_{ij}(\pm\infty, t) = 0, \quad \Theta^{\pm}(\pm\infty, t) = 0, \quad C^{\pm}(\pm\infty, t) = 0. \tag{5.2}$$

Warunki (5.1) i (5.2) w połączeniu z równaniem konstytutywnym (2.5) dają:

$$\varrho S^{\pm}(x_3, 0) = 0, \tag{5.3}$$

$$\varrho S^{\pm}(\pm\infty . t) = 0. \tag{5.4}$$

Wykorzystanie warunków (5.1) - (5.4) w układzie równań (4.11) i (4.12) prowadzi poprzez zależność (4.23) do następującego układu równań:

$$\varrho \bar{S}^{+}(x_3, s) = A_2^{+} e^{-c\sqrt{s}x_3} + A_4^{+} e^{-d\sqrt{s}x_3}, \tag{5.5}$$

$$\varrho \bar{S}^{-}(x_3, s) = A_1^{-} e^{+c\sqrt{s}x_3} + A_3^{-} e^{+d\sqrt{s}x_3}, \tag{5.6}$$

$$\bar{C}^{+}(x_3, s) = A_2^{+} L e^{-c\sqrt{s}x_3} + A_4^{+} R e^{-d\sqrt{s}x_3}, \tag{5.7}$$

$$\bar{C}^{-}(x_3, s) = A_1^{-} L e^{c\sqrt{s}x_3} + A_3^{-} R e^{d\sqrt{s}x_3}, \tag{5.8}$$

gdzie:

$$L = Dc^2 + E, \quad R = Dd^2 + E. \tag{5.9}$$

W płaszczyźnie kontaktu półprzestrzeni ($x_3 = 0$) zakładamy idealny kontakt termiczny obu półprzestrzeni przejawiający się ciągłością strumienia ciepła:

$$q_3^+(0, t) = q_3^-(0, t), \tag{5.10}$$

oraz równością temperatur po obu stronach płaszczyzny kontaktu:

$$\Theta^+(0, t) = \Theta^-(0, t). \tag{5.11}$$

Zakładamy również zerową wartość przemieszczenia na brzegach półprzestrzeni (sztywna półpłaszczyzna kontaktu):

$$U_3^\pm(0, t) = 0, \tag{5.12}$$

oraz przyjmujemy warunki brzegowe w wartościach strumieni masy po obu stronach płaszczyzny kontaktu półprzestrzeni (rys. 2):

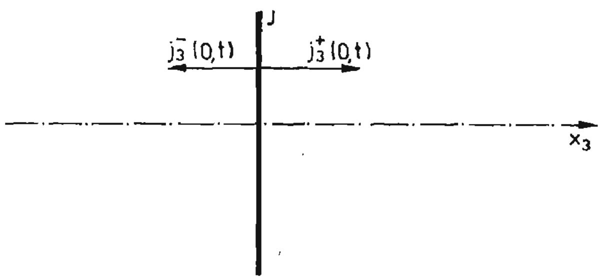
$$j_3^+(0, t) = j_p H(t), \tag{5.13}$$

$$j_3^-(0, t) = -j_l H(t). \tag{5.14}$$

Przyjmiemy tutaj, że w płaszczyźnie $x_3 = 0$ występuje powierzchniowe źródło masy o intensywności I. Mogą wówczas wystąpić warunki brzegowe (rys. 3):

$$j_3^+(0, t) + \widehat{\varrho r} J = j_3^-(0, t). \tag{5.15}$$

Warunki (5.10) - (5.14) pozwalają na wyznaczenie stałych w układzie równań (5.5) - (5.8), który po ich wprowadzeniu można przedstawić w postaci dwóch równań na transformaty entropii i koncentracji:



Rys. 3. Warunki brzegowe dla strmieni masy w zadaniu kontaktu dwóch półprzestrzeni

$$\varrho \bar{S}^\pm(x_3, s) = A^\pm \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-c\sqrt{s}|x_3|} + B^\pm \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-d\sqrt{s}|x_3|} \tag{5.16}$$

$$\bar{C}^\pm(x_3, s) = A^\pm L^\pm \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-c\sqrt{s}|x_3|} + B^\pm R^\pm \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-d\sqrt{s}|x_3|} \tag{5.17}$$

gdzie:

$$A^\pm = \frac{\tilde{c}^\mp(b^\mp f^\pm + b^\pm f^\mp) j_L^P + \tilde{d}^\pm(b^\mp e^\mp - a^\mp f^\mp) j_P^L - \tilde{d}^\mp(b^\pm e^\pm + a^\mp f^\pm) j_L^P}{(a^+\tilde{d}^+ - b^+\tilde{c}^+)(\tilde{d}^- e^- - \tilde{c}^- f^-) + (a^-\tilde{d}^- - b^-\tilde{c}^-)(\tilde{d}^+ e^+ - \tilde{c}^+ f^+)}$$

$$B^\pm = \frac{\tilde{d}^\mp(a^\pm e^\mp + a^\mp e^\pm) j_L^P + \tilde{c}^\pm(a^\mp f^\mp - b^\mp e^\mp) j_P^L - \tilde{c}^\mp(a^\pm f^\mp + b^\mp e^\pm) j_L^P}{(a^+\tilde{d}^+ - b^+\tilde{c}^+)(\tilde{d}^- e^- - \tilde{c}^- f^-) + (a^-\tilde{d}^- - b^-\tilde{c}^-)(\tilde{d}^+ e^+ - \tilde{c}^+ f^+)}$$

$$a^{\pm} = \left[\frac{(Dc^2+E)l-1}{m}\right]^{\pm}; \quad b^{\pm} = \left[\frac{(Dd^2+E)l-1}{m}\right]^{\pm}$$

$$c^{\pm} = \left\{Kc\left[(Dc^2+E)\left(n+\frac{l^2}{m}\right)-\frac{l}{m}\right]\right\}^{\pm}$$

$$d^{\pm} = \left\{Kd\left[(Dc^2+E)\left(n+\frac{l^2}{m}\right)-\frac{l}{m}\right]\right\}^{\pm}$$

$$e^{\pm} = \left\{\frac{Kc}{m}[1-(Dc^2+E)l]\right\}^{\pm}$$

$$f^{\pm} = \left\{\frac{Kd}{m}[1-(Dd^2+E)l]\right\}^{\pm} \tag{5.18}$$

Dokonując na zależnościach (5.15) i (5.16) retransformacji Laplace'a otrzymujemy poszukiwane wielkości polowe w przestrzeni oryginału

$$\varrho S^{\pm}(x_3,t) = A^{\pm}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(\frac{-c^2x_3^2}{4t}\right)-c|x_3|\operatorname{erfc}\left(\frac{c|x_3|}{2\sqrt{t}}\right)\right]+$$

$$+B^{\pm}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(\frac{-d^2x_3^2}{4t}\right)-d|x_3|\operatorname{erfc}\left(\frac{d|x_3|}{2\sqrt{t}}\right)\right] \tag{5.19}$$

$$C^{\pm}(x_3,t) = A^{\pm}L^{\pm}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(\frac{-c^2x_3^2}{4t}\right)-c|x_3|\operatorname{erfc}\left(\frac{c|x_3|}{2t}\right)\right]+$$

$$+B^{\pm}R^{\pm}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(\frac{-d^2x_3^2}{4t}\right)-d|x_3|\operatorname{erfc}\left(\frac{d|x_3|}{2\sqrt{t}}\right)\right] \tag{5.20}$$

Przystąpimy z kolei do obliczania pola odkształceń. Wykorzystując zależność (2.12) i całkując równanie (4.13) otrzymujemy:

$$\varepsilon_{33}^{\pm}(x_3,t) = U_{3,3}^{\pm}(x_3,t) = \frac{2\mu'^{\pm}+3\lambda'^{\pm}}{2\mu'^{\pm}+\lambda'^{\pm}}[\alpha_s^{\pm}\varrho S^{\pm}(x_3,t)+\alpha_C^{\pm}C^{\pm}(x_3,t)]+X. \tag{5.21}$$

Stałą X obliczamy z warunku brzegowego (5.12) i zależności (5.19) i (5.20):

$$\varepsilon_{33}^{\pm}(0,t) = \frac{2\mu'^{\pm}+3\lambda'^{\pm}}{2\mu'^{\pm}+\lambda'^{\pm}}[\alpha_s^{\pm}\varrho S(0,t)+\alpha_C^{\pm}C^{\pm}(0,t)]+X = 0 \tag{5.22}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\varepsilon_{33}^{\pm}(x_3,t) = \frac{2\mu'^{\pm}+3\lambda'^{\pm}}{2\mu'^{\pm}+\lambda'^{\pm}}[\alpha_s^{\pm}\varrho S^{\pm}(x_3,t)+\alpha_C^{\pm}C^{\pm}(x_3,t)-(\alpha_s^{\pm}\varrho S_0^{\pm}+\alpha_C^{\pm}C_0^{\pm})] \tag{5.23}$$

gdzie:

$$\varrho S_0^{\pm} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}(A^{\pm}+B^{\pm}) \tag{5.24}$$

$$C_0^{\pm} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}(A^{\pm}L^{\pm}+B^{\pm}R^{\pm}) \tag{5.25}$$

Pozostało jeszcze określenie tensora stanu naprężenia dla rozpatrywanego problemu początkowo-brzegowego. Wykorzystując zależność (4.8) otrzymujemy:

$$\sigma_{11}^{\pm}(x_3, t) = \sigma_{22}^{\pm}(x_3, t) = \lambda'^{\pm}\varepsilon_{33}^{\pm}(x_3, t) - (2\mu'^{\pm} + 3\lambda'^{\pm})[\alpha_s^{\pm}\varrho S^{\pm}(x_3, t) + \alpha_c^{\pm} C^{\pm}(x_3, t)] \quad (5.26)$$

$$\sigma_{33}^{\pm}(x_3, t) = (2\mu'^{\pm} + \lambda'^{\pm})\varepsilon_{33}^{\pm}(x_3, t) - (2\mu'^{\pm} + 3\lambda'^{\pm}) \cdot [\alpha_s^{\pm}\varrho S^{\pm}(x_3, t) + \alpha_c^{\pm} C^{\pm}(x_3, t)] \quad (5.27)$$

gdzie pola entropii, koncentracji i odkształceń dane są równaniami (5.19), (5.20), (5.23). Stałe materiałowe występujące w zadaniu łączą następujące związki:

$$\gamma_s' = \alpha_s(2\mu' + 3\lambda') = \frac{E\alpha_T}{m(1-2\nu)}, \quad \alpha_s = \frac{\alpha_T}{m}, \quad \gamma_c' = \alpha_c(2\mu' + 3\lambda') = \frac{E}{1-2\nu}\left(\alpha_c + \alpha_T\frac{l}{m}\right),$$

$$\mu' = \frac{E}{(1-2\nu)}\left[\frac{1-\nu}{2(1+\nu)} - \frac{\alpha_T l}{6\alpha_c m} + \frac{2\alpha_T^2 E}{3m(1-2\nu)}\right], \quad \lambda' = \frac{E}{3(1-2\nu)m}\left[\frac{\alpha_T}{\alpha_c} l - \frac{\alpha_T^2 E}{(1-2\nu)}\right]. \quad (5.28)$$

6. Działanie płaskiego źródła masy

Zagadnienie płaskiego źródła masy w przestrzeni jest przypadkiem szczególnym rozpatrywanego w poprzednim punkcie pracy zadania kontaktu dwóch półprzestrzeni, który zachodzi wówczas gdy obie półprzestrzenie są z tego samego materiału, a więc posiadają jednakowe stałe (funkcje) materiałowe. Rozwiązanie takiego problemu początkowo-brzegowego otrzymamy z przytoczonych w p-cie 5 pracy równań przyjmując w nich stałe materiałowe dla „dodatniej" i „ujemnej" półprzestrzeni (rys. 2) za równe sobie.

Odpowiednio będzie:

Poszukiwane wielkości polowe entropii i koncentracji wyrażają się zależnościami:

$$\varrho S^{\pm}(x_3, t) = \frac{2\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{c}fj_l^p - a\underset{\sim}{d}f(j_p + j_l) - b\underset{\sim}{d}e(j_l^p - j_p^l)}{2(a\underset{\sim}{d} - b\underset{\sim}{c})(\underset{\sim}{d}e - \underset{\sim}{c}f)}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(\frac{-c^2x_3^2}{4t}\right) + \right.$$
$$\left. - c|x_3|\operatorname{erfc}\left(\frac{c|x_3|}{2\sqrt{t}}\right)\right] + \frac{2a\underset{\sim}{d}ej_l^p - b\underset{\sim}{c}e(j_p + j_l) - a\underset{\sim}{c}f(j_l^p - j_p^l)}{2(a\underset{\sim}{d} - b\underset{\sim}{c})(\underset{\sim}{d}e - \underset{\sim}{c}f)}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \exp\left(\frac{-d^2x_3^2}{4t}\right) - d|x_3|\operatorname{erfc}\left(\frac{d|x_3|}{2\sqrt{t}}\right)\right], \quad (6.1)$$

$$C^{\pm}(x_3, t) = \frac{2\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{c}fj_l^p - a\underset{\sim}{d}f(j_p + j_l) - b\underset{\sim}{d}e(j_l^p - j_p^l)}{2(a\underset{\sim}{d} - b\underset{\sim}{c})(\underset{\sim}{d}e - \underset{\sim}{c}f)}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(\frac{-c^2x_3^2}{4t}\right) + \right.$$
$$\left. - c|x_3|\operatorname{erfc}\left(\frac{c|x_3|}{2\sqrt{t}}\right)\right]L + \frac{2a\underset{\sim}{d}ej_l^p - b\underset{\sim}{c}e(j_p + j_l) - a\underset{\sim}{c}f(j_l^p - j_p^l)}{2(a\underset{\sim}{d} - b\underset{\sim}{c})(\underset{\sim}{d}e - \underset{\sim}{c}f)}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \exp\left(\frac{-d^2x_3^2}{4t}\right) - d|x_3|\operatorname{erfc}\left(\frac{d|x_3|}{2\sqrt{t}}\right)\right]R. \quad (6.2)$$

natomiast pole odkształceń opisane jest formułą:

$$\varepsilon_{33}^{\pm}(x_3, t) = \frac{2\mu' + 3\lambda'}{2\mu' + \lambda'}[\alpha_s\varrho S^{\pm}(x_3, t) + \alpha_c C^{\pm}(x_3, t) - (\alpha_s\varrho S_0^{\pm} + \alpha_c C_0^{\pm})], \quad (6.3)$$

gdzie:

$$\varrho S_0^{\pm} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,\frac{2j_l^p(bcf+ade)-(\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{d}f+b\underset{\sim}{c}\underset{\sim}{e})(j_p+j_l)-(a\underset{\sim}{c}f+b\underset{\sim}{d}e)(j_l^p-j_p^l)}{2(a\underset{\sim}{d}-b\underset{\sim}{c})(\underset{\sim}{d}e-\underset{\sim}{c}f)}, \tag{6.4}$$

$$C_0^{\pm} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,\frac{2j_l^p(b\underset{\sim}{c}fL+a\underset{\sim}{d}eR)-(a\underset{\sim}{d}fL+b\underset{\sim}{c}eR)(j_p+j_l)-(b\underset{\sim}{d}eL-a\underset{\sim}{c}fR)(j_l^p-j_p^l)}{2(a\underset{\sim}{d}-b\underset{\sim}{c})(\underset{\sim}{d}e-\underset{\sim}{c}f)}. \tag{6.5}$$

Z kolei tensor naprężenia otrzymujemy z zależności (5.26) i (5.27) przyjmując w nim równe sobie stałe materiałowe po obu stronach płaszczyzny rozdziału przestrzeni:

$$\sigma_{11}^{\pm}(x_3, t) = \sigma_{22}^{\pm}(x_3, t) = \lambda'\varepsilon_{33}^{\pm}(x_3, t)+ \\ -(2\mu'+3\lambda')[\alpha_s\varrho S^{\pm}(x_3, t)+\alpha_c C^{\pm}(x_3, t)], \tag{6.6}$$

$$\sigma_{33}^{\pm}(x_3, t) = (2\mu'+\lambda')\,\varepsilon_{33}^{\pm}(x_3, t)-(2\mu'+3\lambda')[\alpha_s\varrho S^{\pm}(x_3, t)+\alpha_c C^{\pm}(x_3, t)], \tag{6.7}$$

gdzie występujące w zadaniu stałe materiałowe łączą związki dane zależnością (5.28).

Literatura

1. M. A. BIOT, *Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics*, J. Apll. Phys. 27, 1956.
2. G. DOETSCH, *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN, Warszawa 1964.
3. G. A. KORN, T. M. KORN, *Mathematical Handbok*, Mc. Graw-Hill Company, New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney 1968 (tłum. ros. Moskwa 1977).
4. J. KUBIK, *Analogie i podobieństwo w liniowych ośrodkach odkształcalnych*, ZN Pol. Śl. Bud. 38, Gliwice 1975.
5. W. NOWACKI, *Certain problems of thermodiffusion in solids*, A. M. S. 23, 6, 1971.
6. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w ciele stałym*, Mech. Teoret. i Stos. 2, 13, 1975.

Р е з ю м е

О РАЗДЕЛЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ТЕРМОДИФУЗИИ

В работе предложено метод приведения проблем вязкоупругой термодиффузии к рассопряженным уравнениям теории тепло-диффузионных напряжений. Теорию иллюстрировано задачей термодиффузии в слое с краевыми условиями первого рода, а также задачу термодиффузии при контакте двух полупространств при идеальном тепловом контакте и граничных условиях второго рода.

S u m m a r y

ON DECOUPLING EQUATIONS OF VISCOELASTIC THERMODIFFUSION

In the paper the proposition of reducing the viscoelastic thermodiffusion problems to the theory of thermodiffusion stresses is presented. Next the solution of thermodiffusion problem in layer with the boundary conditions of first type is given. The problem of interaction between two semispaces with ideal thermal contact and the boundary condition of second type is also considered.

Praca wpynęła do Redakcji dnia 18 lutego 1986 roku.