

WARTOŚCI WŁASNE OPERATORÓW RÓŻNICZKOWYCH RÓWNAŃ RÓWNOWAGI KONSTRUKCJI WARSTWOWYCH

FRANCISZEK ROMANÓW

Politechnika Wroclawska

Oznaczenia używane w pracy

x, y, z — współrzędne układu

U, V, W — przemieszczenia w kierunku osi x, y, z

E, ν — moduł Younga i liczba Poissona okładziny.

E_u, G_u, ν_u — moduł Younga i moduł sprężystości poprzecznej oraz liczba Poissona dla rdzenia

t — grubość okładziny

$2c$ — grubość rdzenia

a, b — długość i szerokość płyty

$$\psi^2 = \frac{1 - 2\nu_u}{2(1 - \nu_u)}$$

$$\bar{U} = \frac{1}{2} (U_1 - U_2)$$

$$\bar{U}^+ = \frac{1}{2} (U_1 + U_2)$$

$$\bar{V} = \frac{1}{2} (V_1 - V_2)$$

$$\bar{V}^+ = \frac{1}{2} (V_1 + V_2)$$

U_1, U_2, V_1, V_2 — przemieszczenia środkowej powierzchni górnej i dolnej okładziny w kierunku x i y

$$\beta = \frac{m\pi}{a}$$

$$\varrho = \frac{n\pi}{b}$$

m, n — ilość półfal w kierunku osi x i y

L_a, L_b — długość półfali wzdłuż boku a i b

$$-p^2 = \frac{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}}{W} \psi^2$$

1. Wstęp

Konstrukcje warstwowe, których przykład pokazano na rys. 1 znajdują coraz szersze zastosowanie w praktyce. Wraz z rozwojem tych konstrukcji unowocześniane są również metody ich obliczania.

Najczęstszym kryterium wytrzymałościowym tych konstrukcji jest utrata stateczności całej cienkiej konstrukcji (płyta, powłoka, tarcza itp) lub utrata stateczności samej cienkiej okładziny. Dla obu tych form utraty stateczności stosowane są dotychczas odpowiednie metody obliczeń. W pierwszym przypadku zakłada się, że rdzeń jest nieskończenie sztywny i nie ulega żadnym odkształceniom w poprzecznym kierunku.

Teoria ta oparta jest więc na założeniu, że przemieszczenie przekroju poprzecznego podlega hipotezie prostej łamanej. Założenie to jest dostatecznie słuszne w zastosowaniu tylko do tzw. cienkich konstrukcji. Druga forma utraty stateczności pojawia się wtedy gdy rdzeń jest gruby, tak że okładzinę można traktować jak cienką tarczę na sprężystej półprzestrzeni [np. 6].

W cytowanych pracach autora przedstawiono bardziej ogólną metodę obliczania obciążeń krytycznych z uwzględnieniem hipotezy trójosiowego stanu przemieszczeń rdzenia. Dzięki ogólniejszemu potraktowaniu problemu otrzymane rozwiązania mogą być stosowane do konstrukcji warstwowych o dowolnej grubości rdzenia. W pracach tych ograniczono się do analizowania konstrukcji warstwowych, które były swobodnie podparte na całym obwodzie. Pozostał jednak nierozwiązany problem obliczania podobnych konstrukcji warstwowych, które mają inne warunki brzegowe. Pokazanie więc sposobu obliczania takich konstrukcji jest celem niniejszej pracy.

W pracach [1, 2, 4] opublikowano sposób obliczania obciążeń krytycznych tarcz i powłok warstwowych. Metoda obliczania oparta jest na trójosiowym stanie przemieszczeń rdzenia.

Trzy składowe stanu przemieszczeń rdzenia opisano nieliniowymi równaniami:

$$\begin{aligned} U_u &= \bar{U} - \frac{z}{c} \left(\bar{U} - \frac{t}{2} W' \right) F(z) \\ V_u &= \bar{V} - \frac{z}{c} \left(\bar{V} - \frac{t}{2} W' \right) S(z) \\ W_u &= W \cdot T(z) \end{aligned} \quad (1)$$

Gdy $F(z) = S(z) = T(z) = 1$, równania te opisują stan przemieszczeń odpowiadający hipotezie linii łamanej. Nieznane funkcje $F(z)$, $S(z)$, $T(z)$ zostały określone przy pomocy trzech przemieszczeniowych równań równowagi elementu rdzenia. W późniejszej pracy [3], na podstawie uogólnionego stanu przemieszczeń rdzenia wykazano, iż zastosowanie równań [1] do analizy stateczności daje najmniejsze obciążenie krytyczne. Ten uogólniony stan przemieszczeń charakteryzował się tym, że ugięcia poprzeczne obu okładzin były różne ($W_1 \neq W_2$).

Dla płaskich tarcz i małowyniosłych powłok, wykazano iż układ czterech równań równowagi rozdziela się na dwa i jednym z nich są równania uzależnione od przemieszczeń 1.

2. Uproszczona funkcja przemieszczeń $\varphi(z)$

Skomplikowane funkcje $F(z)$, $S(z)$ i $T(z)$ mogą być zastąpione [2] jedną funkcją $\varphi(z)$, którą można wyprowadzić z uproszczonego równania [2, 4]:

$$W_u''(x, y, z) + W_u''(x, y, z) + \frac{1}{\psi^2} W_u^{\wedge}(x, y, z) = 0^*, \quad (2a)$$

dla $W_u(x, y, z) = W(x, y) \cdot \varphi(z)$ otrzyma się:

$$\nabla^2 W(x, y) \cdot \varphi(z) + (1 + c^*) W(x, y) \cdot \varphi^{\wedge}(z) = 0. \quad (2b)$$

Przekształcając to równanie uzyska się:

$$\varphi^{\wedge}(z) - p^2 \cdot \varphi(z) = 0. \quad (3)$$

Rozwiązując je ze względu na $\varphi(z)$ dla brzegowych warunków $z = \pm c$; $\varphi(\pm c) = 1$, otrzymuje się:

$$\varphi(z) = \frac{\cosh pz}{\cosh pc}. \quad (4)$$

Z tego rozwiązania widać, że funkcja φ jest uzależniona od zmiennej z tylko wtedy, gdy parametr:

$$p^2 = -C \cdot \psi^2, \quad (5)$$

nie zależy od zmiennej x i y lecz jest wartością stałą. Wielkość C wylicza się z równania (6):

$$\nabla^2 W(x, y) = CW(x, y), \quad (6)$$

w ten sposób, że dla $x = x_0$ i $y = y_0$, musi być stałą wartością. Parametr p dla którego istnieje rozwiązanie niezerowe równania różniczkowego (3), jest wartością własną operatora tego równania. Na płaszczyznach połączeń okładzin z rdzeniem, tj dla $z = \pm c$ przemieszczenia rdzenia muszą być równe przemieszczeniom okładzin. Dlatego z równania (1) wynika, że dla $z = \pm c$:

$$F(\pm c) = S(\pm c) = T(\pm c) = 1. \quad (7)$$

Wyprowadzając różniczkowe równanie na podstawie równowagi elementu [4] oblicza się między innymi siły poprzeczne w rdzeniu:

$$Q_{xzu} = \int_{-c}^c \tau_{xzu} \cdot dz, \quad Q_{yzu} = \int_{-c}^c \tau_{yzu} \cdot dz, \quad Q_{zzu} = \int_{-c}^c \sigma_{zzu} \cdot dz.$$

Dla naprężeń:

$$\begin{aligned} \tau_{xzu} &= (U_u^{\wedge} + W_u') G_u, \\ \tau_{yzu} &= (V_u^{\wedge} + W_u') G_u, \\ \sigma_{zzu} &= E_u \cdot W_u^{\wedge}, \end{aligned}$$

siły poprzeczne wyraża się wzorami:

$$\begin{aligned} Q_{xzu} &= -2G_u(\bar{U} - K_x \cdot W'), & Q_{yzu} &= -2G_u(\bar{V} - K_y \cdot W'), \\ Q_{zzu} &= 0, \end{aligned}$$

*) · (kropka); ' (przecinek) i ^ (daszek) odpowiednio oznaczają pochodne podług x , y , z .

gdzie:

$$K_x = \frac{t}{4c} \int_{-c}^c [F(z) + zF'(z)] dz + \frac{1}{2} \int_{-c}^c T(z) \cdot dz, \quad (8)$$

$$K_y = \frac{t}{4c} \int_{-c}^c [S(z) + zS'(z)] dz + \frac{1}{2} \int_{-c}^c T(z) \cdot dz.$$

Obie pierwsze całki równają się odpowiednio:

$$c \cdot F(c) + c \cdot F(-c), \quad (9)$$

$$c \cdot S(c) + c \cdot S(-c),$$

stąd dla warunków brzegowych (7) oba wyrażenia (9) równają się $2c$. Z przedstawionego wywodu wynika, że funkcje $F(z)$ i $S(z)$ muszą być takimi funkcjami aby spełniały warunki (7). Stąd mogą być one zastąpione funkcją $\varphi(z)$, gdyż spełnia ona również te warunki. Następnie w pracy [2] udowodniono, że dla celów praktycznych również funkcja $T(z)$ może być zastąpiona funkcją $\varphi(z)$, jak to uczyniono w pracy [4]. Przyjęcie że $F(z) = S(z) = T(z) = \varphi(z)$ daje nieistotne rozbieżności w obciążeniach krytycznych [2].

3. Wartości właściwe równania (2)

Wartości właściwe parametru p uzależnione są od funkcji ugięcia okładziny $W(x, y)$, a te ostatnie zależą między innymi od warunków brzegowych płyty, tarczy lub powłoki.

3.1. Płyta swobodnie podparta wzdłuż obwodu. Równanie ugięcia takiej płyty ma postać:

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin \beta_m x \sin \varrho_n y. \quad (10)$$

Po podstawieniu odpowiednich wyrażeń do (6) otrzyma się równanie:

$$-(\beta_m^2 + \varrho_n^2) A_{mn} \sin \beta_m x \sin \varrho_n y = A_{mn} C_{mn} \sin \beta_m x \sin \varrho_n y.$$

Zakładając, że:

$$A_{mn} \sin \beta_m x \sin \varrho_n y \neq 0,$$

wylicza się:

$$C_{mn} = -(\beta_m^2 + \varrho_n^2) \quad \text{oraz z (5):}$$

$$p_{mn}^2 = (\beta_m^2 + \varrho_n^2) \psi^2,$$

wtedy poprzeczne przemieszczenie rdzenia zgodnie z (1) określone będzie zależnością:

$$W_{umn}(x, y, z) = A_{mn} \varphi_{mn}(z) \sin \beta_m x \sin \varrho_n y. \quad (11)$$

Gdy tak samo podparta tarcza obciążona jest na wszystkich krawędziach naprężeniami stycznymi, to przemieszczenie rdzenia, analogicznie jak (11) opisane będzie funkcją:

$$W_{umn}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \varphi_{mn}(z) \sin \beta_m x \sin \varrho_n y. \quad (12)$$

Podstawiając pochodne:

$$W''''_{umn}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\beta_m^2 A_{mn} \varphi_{mn}(z) \sin \beta_m x \sin \varrho_n y,$$

$$W'''_{umn}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\varrho_n^2 A_{mn} \varphi_{mn}(z) \sin \beta_m x \sin \varrho_n y,$$

$$W^{\wedge\wedge}_{umn}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \varphi^{\wedge\wedge}_{mn}(z) \sin \beta_m x \sin \varrho_n y,$$

do równania (2a) otrzyma się:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-(\beta_m^2 + \varrho_n^2) \varphi_{mn}(z) + \frac{1}{\psi^2} \varphi^{\wedge\wedge}_{mn}(z) \right] A_{mn} \sin \beta_m x \sin \varrho_n y = 0.$$

Przy założeniu, że $A_{mn} \sin \beta_m x \sin \varrho_n y \neq 0$ równanie to sprowadza się do:

$$\varphi^{\wedge\wedge}_{mn}(z) - (\beta_m^2 + \varrho_n^2) \psi^2 \varphi_{mn}(z) = 0.$$

Oznaczając $p_{mn}^2 = (\beta_m^2 + \varrho_n^2) \psi^2$ otrzyma się równanie (3) i rozwiązanie (4).

Dla $z = c$, $\varphi_{mn}(c) = 1$, a $W_{umn}(x, y, c) = W_{mn}(x, y)$, gdzie:

$$W_{mn}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A'_{mn} \sin \beta_m x \sin \varrho_n y,$$

jest funkcją ugięcia okładziny.

Wartości właściwe parametru p^2 mają następującą interpretację geometryczną. Uwzględniając długość półfali ugięcia w kierunku osi x i y odpowiednio $L_a = \frac{a}{m}$ i $L_b = \frac{b}{m}$ parametr p^2 można zapisać przy pomocy następującego wyrażenia:

$$p_{mn}^2 = \psi^2 \pi^2 \left(\frac{1}{L_a^2} + \frac{1}{L_b^2} \right).$$

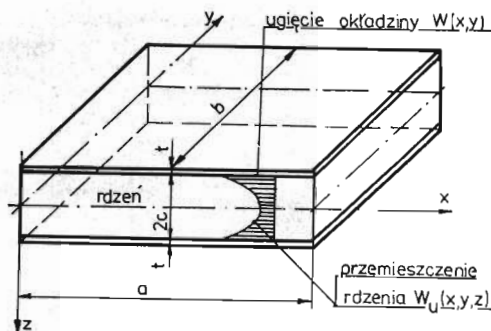
W sensie geometrycznym jest to więc odwrotność długości półfali podniesionej do kwadratu i pomnożonej przez $\pi^2 \psi^2$. Dla $z = \pm c$, $\varphi(\pm c) = 1$; dla $z = 0$, $\varphi(0) = \frac{1}{\cosh pc}$. Stąd wynika, że $\varphi(0) < \varphi(\pm c)$. Oznaczając w równaniu (11) $A_{mn} \varphi_{mn}(z) = B_{mn}(z)$, to dla $z = z_0$ (z przedziału $0 \leq z_0 \leq c$), $B_{mn}(z_0) \leq A_{mn}$.

Na tej podstawie można stwierdzić, że funkcja:

$$W_{umn}(x, y, z_0) = B_{mn}(z_0) \sin \beta_m x \sin \varrho_n y,$$

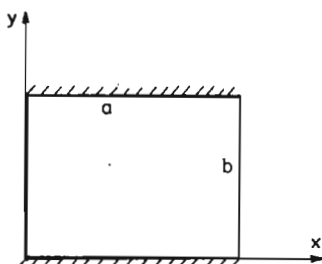
jest identyczną funkcją jak (10), o mniejszej amplitudzie.

Stąd wynika ważny wniosek, że przemieszczenie rdzenia $W_u(x, y, z)$ począwszy od okładziny ($z = \pm c$) maleje ku środkowi tarczy ($z = 0$). Zmiana przemieszczenia rdzenia w kierunku poprzecznym przedstawiona została w sposób graficzny na rys. 1 (część zakreskowana). W pracach [2, 4] na podstawie funkcji (11) i (12) rozwiązano wiele zadań dotyczących stateczności ściskanych i ścinanych tarcz oraz małowyniostych powłok warstwowych.



Rys. 1.

3.2. Płyta lub tarcza przedstawiona na rys. 2. Tarcza charakteryzuje się tym, że obie krawędzie a (dla $y = 0$, $y = b$) są sztywno mocowane, zaś krawędzie b (dla $x = 0$ i $x = a$) są swobodnie podparte.



Rys. 2.

Ugięcie takiej tarczy opisuje się następującą funkcją:

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin \beta_m x (1 - \cos \gamma_n y),$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \gamma_n = \frac{2(2n+1)\pi}{b}.$$

Podstawiając do wzoru (6) odpowiednie wyrażenia otrzymuje się:

$$-\beta_m^2 W_{mn}(x, y) + W_{mn}''(x, y) = C \cdot W_{mn}(x, y).$$

Stąd wynika, że równanie (6) dla $C = \text{const.}$ jest spełnione wtedy, gdy $\cos \gamma_n y = -1$.

Zachodzi to dla $y = \frac{b}{2}$, gdyż:

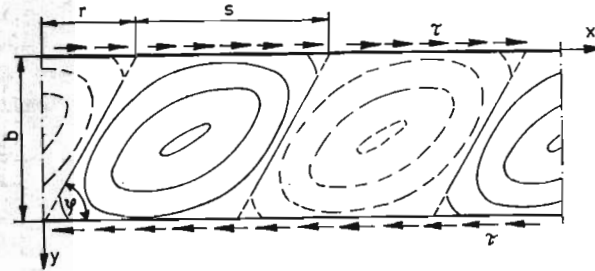
$$W_{mn}''(x, y) = A_{mn} \gamma_n^2 \sin \beta x \cos \gamma_n y.$$

Wtedy stała $C = -\beta_m^2 - \frac{1}{2} \gamma_n^2$; parametr $p_m^2 = \left(\beta_m^2 + \frac{1}{2} \gamma_n^2 \right) \psi^2$. Poprzeczne przemieszczenie rdzenia dla takiej funkcji zgodnie z (1) ma postać:

$$W_{umn}(x, y, z) = W_{mn}(x, y) \varphi(z).$$

3.3. Tarcza nieskończenie długa z obciążeniami stycznymi. Schemat tej tarczy przedstawiono na rys. 3. Funkcja opisująca w przybliżeniu ugięcie takiej tarczy ma postać:

$$W(x, y) = A \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi}{s} (x - \alpha y), \quad \alpha = \operatorname{tg} \varphi.$$



Rys. 3.

Przybliżenie polega na tym, że momenty gnące na swobodnie podpartych krawędziach nie zerują się, gdyż $W''(x, y)$ nie jest równa zero. Mimo tego, w pracy [5] wykazano, że można korzystać z tego wyrażenia w celu otrzymania przybliżonego rozwiązania. Podstawiając $W''(x, y) + W'''(x, y)$ oraz funkcję $W(x, y)$ do wzoru (6) otrzymuje się zależność:

$$-\pi^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) W + \frac{2\pi^2}{bs} A \cos \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi}{s} (x - \alpha y) = CW.$$

Stąd widać, że C jest stałą wartością wtedy, gdy drugi składnik lewej strony równania zeruje się. To następuje dla $y = b/2$. Wtedy:

$$C = -\frac{\pi^2}{s^2} \left(\frac{s^2}{b^2} + 1 + \alpha^2 \right), \quad p^2 = -C\psi^2 \text{ oraz}$$

$$W_u(x, y) = \varphi(z) W(x, y).$$

3.4. Płyta prostokątna o brzegach utwierdzonych. Gdy np. taka płyta jest zbliżona do kwadratu i obciążona podobnymi siłami w ich wzajemnie prostopadłych kierunkach to jej ugięcie można opisać zależnością:

$$W(x, y) = A \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right).$$

Aby C miało stałą wartość to musi być ono obliczone z wzoru (6) dla $x = a/2$ i $y = b/6$. Wtedy otrzyma się:

$$C = -2\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \text{ oraz } p^2 = -C\psi^2.$$

W ten sposób postępując można określić wartości właściwe parametru p^2 dla innych postaci ugięcia płyt.

Dokładna analiza wpływu współczynnika p na naprężenia krytyczne zostanie przedstawiona w następnym artykule.

Literatura

1. F. ROMANÓW, *Hyperbolischer dreiaxialer Verschiebungszustand von flächen sandwichkonstruktionen und schwachgewölbten Sandwichschalen*, Bauingenieur 58 1983, 209 - 212
2. F. ROMANÓW, *Kritische Belastungen von Sandwichkonstruktionen bei Anwendung der hyperbolischen Hypothese des dreiaxialen Verschiebungszustandes*, Bauingenieur 59 1984, 229 - 233
3. F. ROMANÓW, S. DZIELENDZIAK, *Eine verallgemeinerte Form des Stabilitätsverlustes von Sandwich — Platten*, Technische Mechanik 7 1986 H. 1
4. F. ROMANÓW, *Obciążenia krytyczne konstrukcji wielowarstwowych*, Prace Naukowe Inst. Konstr. i Eksp. Masz. Politechniki Wrocławskiej, Seria: Monografie Nr 8, Wrocław 1979
5. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Wyd. Arkady, Warszawa 1973
6. K. STAMM, H. WITTE, *Sandwichkonstruktionen*, Springer-Verlag, Wien New York 1974

Резюме

СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Теория исчислений критических нагрузок многослойных конструкций опубликованных в работах автора [1—4] основана на трёхосных гиперболических перемещениях среднего слоя конструкций. В этих статьях рассмотрено пластинки и оболочки, которых контуры свободно подперты. В настоящей статье представлено метод использования этой теории для разных случаев укрепления контуров конструкции, других, чем свободно опертые.

Summary

EIGENVALUES OF DIFFERENTIAL OPERATORS OF LAYERED CONSTRUCTIONS EQUILIBRIUM EQUATIONS

The theory of calculating of critical loads for layered constructions published by the author [1 - 4] was based on three-axial hiperbolic displacement state existing in the core. In previous papers the plates and shells with simple-supported edges were analyzed. In this paper the possibilities of application of the above mentioned theory in the case with the other boundary conditions are presented.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 lutego 1988 roku.