

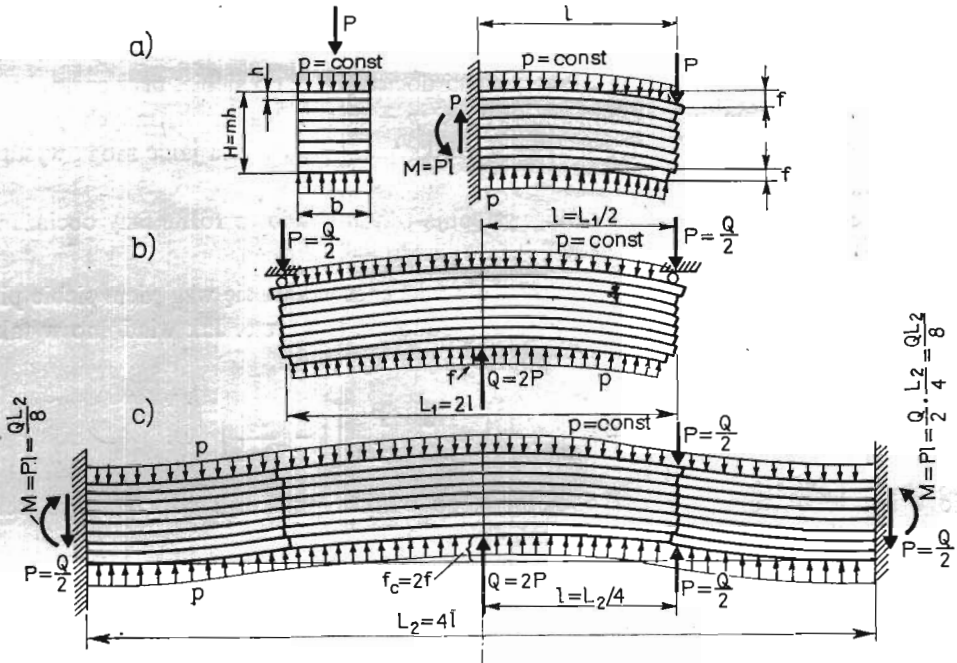
ANALIZA PRACY BELEK ZGINANYCH I RÓWNOCZEŚNIE ŚCINANYCH UTWORZONYCH ZE ŚCIŚNIĘTEGO PAKIETU PŁASKOWNIKÓW

TADEUSZ GALKIEWICZ

Politechnika Łódzka

1. Wstęp

W pracy określono zależność siły P od ugięcia f dla belek zginanych utworzonych z pakietu płaskowników dociśniętych do siebie stałym naciskiem p . Między płaskownikami występuje tarcie, które utrudniając wzajemne przesuwanie się płaskowników usztywnia belkę. Współczynnik tarcia między stykającymi się powierzchniami wynosi μ . Przeanalizowano przypadki belek wspornikowych obciążonych na końcu siłą P (rys. 1a), oraz przypadki belek obciążonych w środku siłą Q i na obu końcach albo podpartych przegubowo (rys. 1b), albo sztywno zamocowanych (rys. 1c).



Rys. 1.

Inspiracją do zajęcia się analizą stanu naprężenia i odkształcenia omawianych belek była chęć poznania mechanizmu pracy nie tylko belek lecz również i cewek transformatorów dużej mocy. Okazuje się że zarówno w trakcie zginania belek utworzonych z pakietu ściśniętych płaskowników jak też podczas zginania siłami zwarciovymi cewek składających się z dużej liczby nawiniętych na siebie zwojów występuje szereg jakościowo podobnych faz obciążania i odciążania. Niniejszą pracę wykonano więc głównie dlatego aby uwydatnić te podobieństwa i na prostszym modelu, jakim jest belka, wytłumaczyć zjawiska, które w sposób mniej wyraźny zachodzą również w trakcie obciążania cewek. Problemy dotyczące zginania cewek omówione zostaną w oddzielnym artykule, w którym wykorzystane będą wyniki przedstawione tutaj.

Zagadnienia zginania belek składających się z szeregu ślizgających się po sobie warstw są w literaturze dość obszernie omówione. Rozwiązanie uzyskane w niniejszej pracy jest specjalnie przydatne wówczas gdy belka składa się z dużej liczby warstw i gdy dociski występujące między tymi warstwami są stosunkowo małe.

2. Obciążanie belki wspornikowej

Teoretyczne rozważania przeprowadzone będą w ujęciu liniowym, dla belki nieważkiej składającej się z m jednakowych płaskowników, wykonanych z izotropowego materiału podlegającego prawu Hooke'a.

Wprowadzono oznaczenia dotyczące wymiarów płaskowników:

l — długość, h — grubość, b — szerokość.

Jeden koniec belki niechaj jest utwierdzony, natomiast drugi obciążony siłą P prostopadłą do osi nieobciążonej belki (rys. 1a). Płaskowniki dociśnięte są do siebie, przy czym docisk między stykającymi się powierzchniami wynosi $p = \text{const}$. Na zewnętrznych powierzchniach górnej i dolnej — siły styczne $\tau = 0$. Maksymalne siły tarcia jakie mogą wystąpić między płaskownikami wynoszą $\tau_{0 \max} = p\mu$.

Podczas narastania obciążania belki występują trzy jakościowo różne fazy obciążania.

I faza obciążania $0 \leq P \leq P_{A_0}$ (odcinek OA_0 wykresu — rys. 4)

I faza dotyczy obciążania, podczas którego nie ma przesuwania się względem siebie płaskowników. Belka pracuje wówczas jako ciało jednolite, sprężyste. Jak wiadomo w takiej belce naprężenia styczne w przekroju poprzecznym wynoszą:

$$\tau = \frac{3}{2} \tau_{sr} \left[1 - \left(\frac{y}{mh/2} \right)^2 \right] = \frac{3}{2} \frac{P}{mbh} \left[1 - \left(\frac{2y}{mh} \right)^2 \right], \quad (1)$$

gdzie y jest to odległość od osi obojętnej tego punktu przekroju poprzecznego belki, w którym określane jest naprężenie styczne.

W pierwszej fazie obciążania obowiązują związki:

— jeżeli belka składa się z parzystej liczby m — płaskowników, to:

$$\tau_{\max} = \tau_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{P}{mbh} \leq p\mu.$$

Siłę $P = P_{A_0}$, po przekroczeniu której rozpoczyna się ślizganie po sobie środkowych płaskowników, określa się z warunku:

$$\tau_{y=0} = \tau_{max} = p\mu.$$

Siła ta wynosi:

$$P_{A_0} = \frac{2}{3} mbhp\mu, \quad (2a)$$

— natomiast gdy belka składa się z nieparzystej liczby płaskowników wówczas:

$$\tau_{y=\pm \frac{h}{2}} = \frac{3}{2} \frac{P}{mbh} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \leq p\mu,$$

stąd:

$$P_{A_0} = \frac{2}{3} mbhp\mu \frac{1}{1 - 1/m^2}. \quad (2b)$$

Przy sile P_{A_0} ugięcie końca belki wynosi:

$$f_{A_0} = \frac{P_{A_0} l^3}{3E \frac{b(mh)^3}{12}} = \frac{8}{3m^2} \frac{p\mu}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^3 h. \quad (3)$$

W I fazie obciążania (tzn. gdy $0 \leq P \leq P_{A_0}$) zależność siły P od ugięcia f (rys. 4) wynika ze wzoru:

$$P = \frac{m^3 Eb}{4(l/h)^3} f. \quad (4)$$

II faza obciążania $P_{A_0} \leq P \leq P_B$ (fragment A_0, A_1, A_2, B wykresu — rys. 4)

II fazę obciążania wygodnie jest omówić na przykładzie belki składającej się z konkretnej liczby płaskowników. Niech przykładowo belka składa się z ośmiu płaskowników. Podstawiając $m = 8$ do wzoru (2a) otrzymuje się siłę graniczną P_{A_0} , natomiast ze wzoru (3) — ugięcie graniczne f_{A_0} :

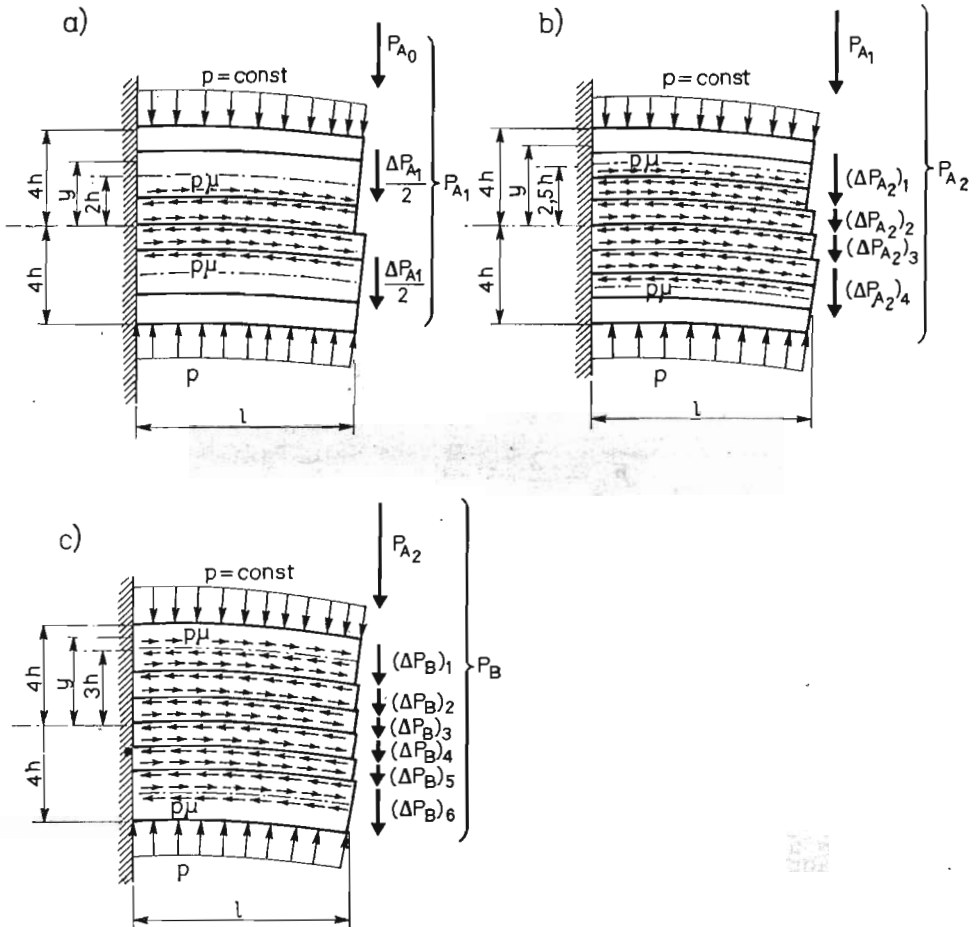
$$P_{A_0} = \frac{16}{3} bhp\mu, \quad (5)$$

$$f_{A_0} = \frac{1}{24} \frac{p\mu}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^3 h. \quad (6)$$

Gdy $P = P_{A_0}$, to ze wzoru (1) wynika, że wówczas naprężenia styczne między kolejnymi płaskownikami wynoszą:

$$\tau_{y=0} = p\mu, \quad \tau_{y=\pm h} = \frac{15}{16} p\mu, \quad \tau_{y=\pm 2h} = \frac{12}{16} p\mu, \quad \tau_{y=\pm 3h} = \frac{7}{16} p\mu, \quad \tau_{y=\pm 4h} = 0.$$

Po przekroczeniu siły P_{A_0} belka rozwarstwa się na dwie ślizgające się po sobie połowy (rys. 2a). Ślizganie odbywa się wzdłuż powierzchni środkowej belki. Sytuacja taka zachodzi do momentu wystąpienia w belce dodatkowych poślizgów. Siły, po przekroczeniu których pojawiają się kolejne poślizgi (rys. 2), oznaczono literami: $P_{A_0}, P_{A_1}, P_{A_2}, P_B$. (Jeżeli



Rys. 2.

siła $P > P_B$, to w belce składającej się z ośmiu płaskowników ślizgają się po sobie już wszystkie płaskowniki i jest to już III faza obciążania belki.)

Gdy siła P wzrasta (patrz rys. 4) w przedziale $P_{A_0} \leq P \leq P_{A_1}$ (czyli gdy $\frac{16}{3} \leq \frac{P}{bh\mu} \leq \frac{52}{9}$),

wówczas zgodnie ze wzorem (1) naprężenia styczne w przekroju poprzecznym belki wynoszą:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{P_{A_0}}{8bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{8h} \right)^2 \right] + \frac{3}{2} \frac{\Delta P_{A_1}/2}{4bh} \left\{ 1 - \left[\frac{2(|y|-2h)}{4h} \right]^2 \right\}. \quad (7)$$

Wzór powyższy jest ważny dla $\tau_{|y|=h} = p\mu$. Graniczną wartość przyrostu $\Delta P_{max} = \Delta P_{A_1}$ (rys. 2a) uzyskuje się z warunku $\tau_{|y|=h} = p\mu \Rightarrow \Delta P_{A_1} = \frac{4}{9} bh\mu$, a więc

$$P_{A_1} = P_{A_0} + \Delta P_{A_1} = \frac{52}{9} bh\mu, \quad (8)$$

natomiast

$$\tau_{P=P_{A_1}} = \left[1 - \frac{1}{12} \left| \frac{y}{h} \right| \left(\left| \frac{y}{h} \right| - 1 \right) \right] p\mu, \quad \text{gdzie} \quad \left| \frac{y}{h} \right| \leq 4, \quad (9)$$

a więc gdy $P = P_{A_1}$, wówczas:

$$\tau_{y=0} = p\mu, \quad \tau_{y=\pm h} = p\mu, \quad \tau_{y=\pm 2h} = \frac{5}{6} p\mu, \quad \tau_{y=\pm 3h} = \frac{1}{2} p\mu, \quad \tau_{y=\pm 4h} = 0.$$

Ugięcie końca belki:

$$f_{A_1} = f_{P=P_{A_1}} = f_{A_0} + \frac{(\Delta P_{A_1}/2)l^3}{3E \frac{b(4h)^3}{12}} = \frac{1}{18} \frac{p\mu}{E} \left(\frac{l}{h} \right)^3 h. \quad (10)$$

Jeżeli siła P wzrasta (patrz rys. 4) w przedziale $P_{A_1} < P \leq P_{A_2}$ (czyli gdy $\frac{52}{9} < \frac{P}{bh p\mu} \leq \frac{59}{9}$),

to poślizgi występują zarówno w środkowej powierzchni, jak też na powierzchni styku pierwszego i drugiego (licząc od powierzchni środkowej) płaskownika. Z równości strzałek ugięcia (rys. 2b) kolejnych ślizgających się po sobie warstw belki wynikają zależności:

$$\begin{aligned} \Delta P_1 &= \Delta P_4, & \Delta P_2 &= \Delta P_3, \\ \frac{\Delta P_1 l^3}{3E \frac{b(3h)^3}{12}} &= \frac{\Delta P_2 l^3}{3E \frac{bh^3}{12}} \Rightarrow \Delta P_1 = 27 \Delta P_2, \end{aligned} \quad (11)$$

a więc $\Delta P = 2\Delta P_1 + 2\Delta P_2 = 56 \Delta P_2$.

W przedziałach $h \leq |y| \leq 4h$ naprężenia styczne zgodnie z wzorami (9), (1) wynoszą:

$$\tau = \tau_{P=P_{A_1}} + \frac{3}{2} \frac{\Delta P_1}{3bh} \left\{ 1 - \left[\frac{2(|y| - 2,5h)}{3h} \right]^2 \right\}. \quad (13)$$

Wzór powyższy jest ważny tak długo, aż przyrost siły ΔP_1 osiągnie wartość graniczną, przy której $\tau_{|y|=2h} = p\mu$. W granicznym przypadku (rys. 2b):

$$\Delta P_1 = (\Delta P_{A_2})_1 = \frac{3}{8} bh p\mu, \quad \Delta P_2 = (\Delta P_{A_2})_2 = \frac{(\Delta P_{A_2})_1}{27} = \frac{1}{72} bh p\mu,$$

$$\Delta P_{A_2} = 56(\Delta P_{A_2})_2 = \frac{7}{9} bh p\mu,$$

czyli:

$$P_{A_2} = P_{A_1} + \Delta P_{A_2} = \frac{59}{9} bh p\mu. \quad (14)$$

Po podstawieniu $\Delta P_1 = (\Delta P_{A_2})_1 = \frac{3}{8} bh p\mu$ do wzoru (13) otrzymuje się:

$$\tau_{P=P_{A_2}} = \frac{p\mu}{6} \left(4 - \left| \frac{y}{h} \right| \right) \left(1 + \left| \frac{y}{h} \right| \right), \quad (15)$$

wzór ważny jest dla $1 \leq \left| \frac{y}{h} \right| \leq 4$,

a więc gdy $P = P_{A_2}$, wówczas:

$$\tau_{y=\pm h} = p\mu, \quad \tau_{y=\pm 2h} = p\mu, \quad \tau_{y=\pm 3h} = \frac{2}{3}p\mu, \quad \tau_{y=\pm 4h} = 0.$$

Przy $P = P_{A_2}$ ugięcie końca belki wynosi:

$$f_{A_2} = f_{P=P_{A_2}} = f_{A_1} + \frac{(\Delta P_{A_2})_2 l^3}{3E(bh^3/12)} = \frac{1}{9} \frac{p\mu}{E} \left(\frac{l}{h} \right)^3 h. \quad (16)$$

Gdy siła P wzrasta (patrz rys. 4) w przedziale $P_{A_2} < P \leq P_B$ (czyli gdy $\frac{59}{9} < \frac{P}{bh p \mu} \leq \frac{69}{9}$), wówczas ślizgają się po sobie powierzchnie już czterech wewnętrznych płaszczyzn i wtedy zgodnie z rys. 2c, $f_1 = f_2 = \dots = f_6$, a zatem: $\Delta P_1 = \Delta P_6, \Delta P_2 = \Delta P_3 = \Delta P_4 = \Delta P_5$,

$$\frac{\Delta P_1 l^3}{3E \frac{b(2h)^3}{12}} = \frac{\Delta P_2 l^3}{3E \frac{bh^3}{12}} \Rightarrow \Delta P_1 = 8\Delta P_2, \quad (17)$$

$$\Delta P = 2\Delta P_1 + 4\Delta P_2 = 20\Delta P_2 = \frac{5}{2} \Delta P_1. \quad (18)$$

W przedziałach $2h \leq |y| \leq 4h$, zgodnie ze wzorami (15) i (1):

$$\tau = \tau_{P=P_{A_2}} + \frac{3}{2} \frac{\Delta P_1}{2bh} \left\{ 1 - \left[\frac{2(|y| - 3h)}{2h} \right]^2 \right\}. \quad (19)$$

Z powyższego wzoru wynika, że $\tau_{|y|=3h} = p\mu$ wówczas, gdy:

$$\Delta P_1 = (\Delta P_B)_1 = \frac{4}{9} bh p \mu, \quad \Delta P_2 = (\Delta P_B)_2 = \frac{(\Delta P_B)_1}{8} = \frac{1}{18} bh p \mu,$$

$$\Delta P_B = 20(\Delta P_B)_2 = \frac{10}{9} bh p \mu,$$

$$P_B = P_{A_2} + \Delta P_B = \frac{23}{3} bh p \mu. \quad (20)$$

Jeżeli $P = P_B$, to

$$\tau_{P=P_B} = \frac{p\mu}{2} \left(4 - \left| \frac{y}{h} \right| \right) \left(\left| \frac{y}{h} \right| - 1 \right), \quad (21)$$

wzór ważny jest dla: $2 \leq \left| \frac{y}{h} \right| \leq 4$

i wówczas:

$$\tau_{y=\pm 2h} = p\mu, \quad \tau_{y=\pm 3h} = p\mu, \quad \tau_{y=\pm 4h} = 0.$$

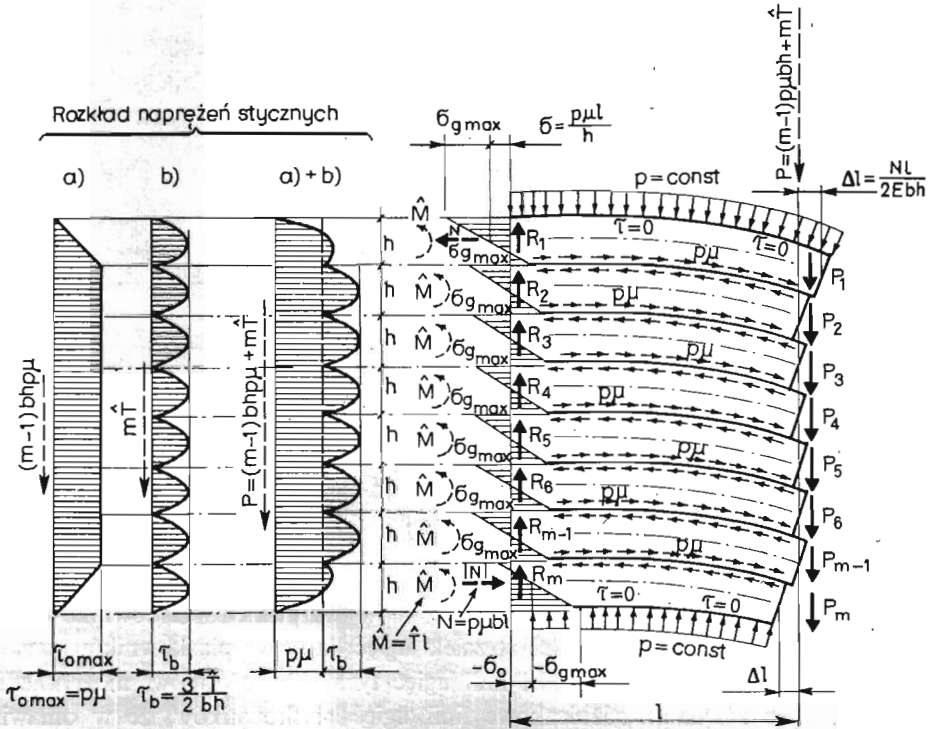
Strzałka ugięcia końca belki przy $P = P_B$ wynosi:

$$f_B = f_{P=P_B} = f_{A_2} + \frac{(\Delta P_B)_2 l^3}{3E(bh^3/12)} = \frac{p\mu}{3E} \left(\frac{l}{h} \right)^3 h. \quad (22)$$

III faza obciążania $P \geq P_B$

Dalsze obciążenie belki siłą $P > P_B$ powoduje narastanie zginania belki, któremu towarzyszy ślizganie się po sobie już wszystkich płaskowników. Siły działające na końce kolejnych (licząc od góry) płaskowników oznaczono symbolami: P_1, P_2, \dots, P_m , a więc

$$P = \sum_{k=1}^m P_k.$$



Rys. 3.

Strzałki ugięcia kolejnych (patrz rys. 3) płaskowników wynoszą:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{P_1 l^3}{3E(bh^3/12)} - \frac{\left(\rho\mu b \cdot \frac{h}{2}\right) l^3}{3E(bh^3/12)} = \frac{4l^3}{Ebh^3} \left(P_1 - \frac{1}{2} bhp\mu\right) = \frac{4l^3}{Ebh^3} \hat{T}_1 \\ f_i &= \frac{P_i l^3}{3E(bh^3/12)} - \frac{(\rho\mu b \cdot h) l^3}{3E(bh^3/12)} = \frac{4l^3}{Ebh^3} (P_i - bhp\mu) = \frac{4l^3}{Ebh^3} \hat{T}_i \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

gdzie $i = 2, 3, \dots, m-1$

$$f_m = \frac{P_m l^3}{3E(bh^3/12)} - \frac{\left(\rho\mu b \cdot \frac{h}{2}\right) l^3}{3E(bh^3/12)} = \frac{4l^3}{Ebh^3} \left(P_m - \frac{1}{2} bhp\mu\right) = \frac{4l^3}{Ebh^3} \hat{T}_m$$

$$\text{tu podstawiono: } \hat{T}_1 = P_1 - \frac{1}{2} bhp\mu; \quad \hat{T}_m = P_m - \frac{1}{2} bhp\mu, \quad (24a)$$

$$\hat{T}_i = P_i - bhp\mu, \quad \text{gdzie } i = 2, 3, \dots, m-1. \quad (24b)$$

Z warunków: $f_1 = f_2 = \dots = f_m = f$ wynika, że:

$$\hat{T}_1 = \hat{T}_2 = \dots = \hat{T}_m = \hat{T}, \quad (25)$$

okazuje się więc, że wielkości $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_m$ nie zależą od numeru warstwy.

Wykorzystując powyższe zależności i uwzględniając fakt, że $\sum_{k=1}^m P_k = P$ otrzymuje się następujące wzory na P_1, P_m, P_i :

$$P_1 = P_m = \frac{1}{m} \left(P - \frac{m-2}{2} bhp\mu \right), \quad (26a)$$

$$P_i = \frac{1}{m} \left(P - \frac{m-2}{2} bhp\mu \right) + \frac{1}{2} bhp\mu = \frac{1}{m} (P + bhp\mu), \quad (26b)$$

gdzie: $i = 2, 3, \dots, m-1$.

Ze związków (25), (24), (26a) wynika, że:

$$\hat{T} = \hat{T}_k = \frac{1}{m} [P - (m-1)bhp\mu], \quad \text{tu } k = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (27)$$

Następnie po wstawieniu \hat{T} (27) do wzorów (23) określić można strzałkę ugięcia belki:

$$f = \frac{4}{mEb} \left(\frac{l}{h} \right)^3 [P - (m-1)bhp\mu], \quad (28)$$

a więc siła

$$P = \frac{mEb}{4(l/h)^3} f + P_0, \quad (29)$$

gdzie:

$$P_0 = (m-1)bhp\mu. \quad (30)$$

To, że rozkład siły P na poszczególne płaskowniki jest właśnie taki jak otrzymano wyżej (26a), (26b) wynika z identyczności ugięć końców wszystkich płaskowników. Należy zauważyć, że warunek identyczności strzałek ugięć końców płaskowników wcale nie zapewnia automatycznie identyczności linii ugięć tych płaskowników, można jednakże wykazać całkując równania różniczkowe linii ugięć płaskowników, że w omawianym przypadku uginają się jednakowo nie tylko końce poszczególnych płaskowników lecz i całe płaskowniki. Identyczność ugięć warstw belki powoduje, że w trakcie zginania naciski międzyzwojowe nie zmieniają się, czyli tak jak założono w modelu obliczeniowym między wszystkimi warstwami stałe naciski $p_k = p = \text{const}$.

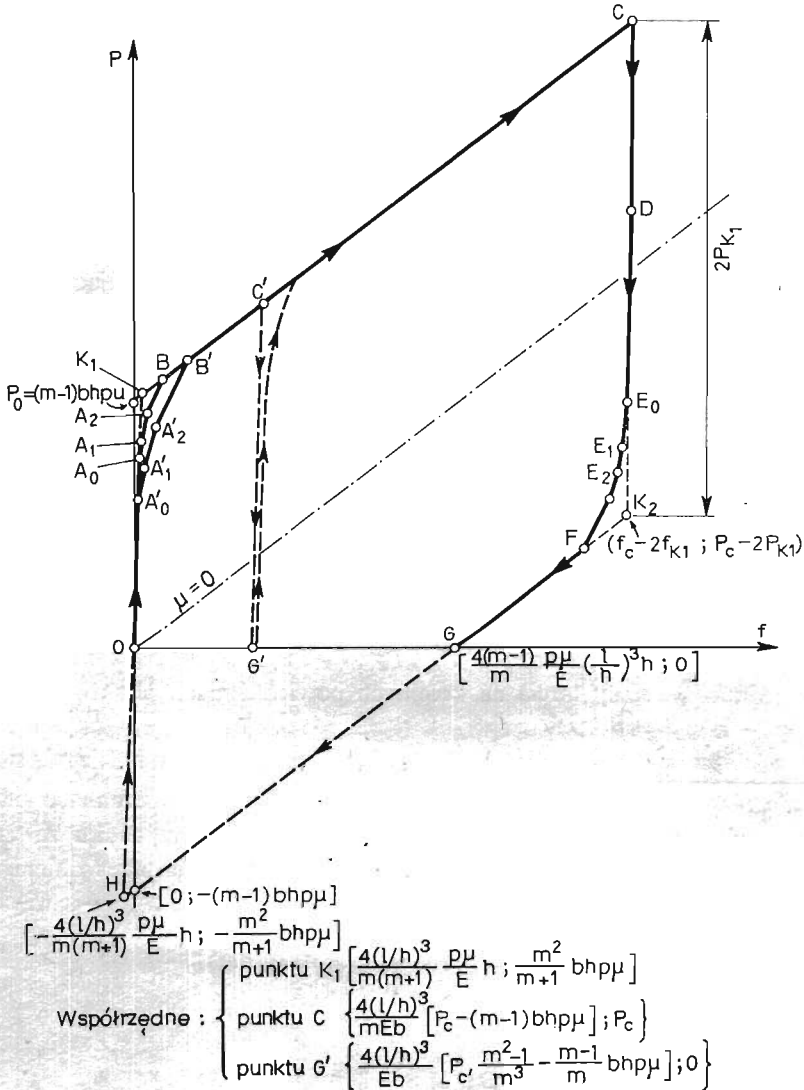
W szczególnym przypadku gdy belka składa się np. z ośmiu płaskowników ($m = 8$), funkcja $P(f) \dots$ (29) ma postać:

$$P = \frac{2Eb}{(l/h)^3} f + 7 bhp\mu. \quad (31)$$

Poprzednio określono (22), że wielkość ugięcia belki, od którego rozpoczyna się ślizganie po sobie wszystkich ośmiu płaskowników wynosi $f_B = \frac{P\mu}{3E} \left(\frac{l}{h} \right)^3 h$. Po podstawieniu tej współrzędnej do wzoru (31) otrzymano wartość siły $P = P_B = \frac{23}{3} bhp\mu$, a więc uzyskano tą drogą taką samą wartość siły P_B jak poprzednio (20), gdzie przy określeniu siły P_B postępowano nieco inaczej.

3. Odciążanie belki wspornikowej

W przypadku pokazanym na rys. 4 zależność siły $P(f)$ przy odciążaniu przedstawia linia łamana przechodząca przez punkty C, E_0, E_1, E_2, F, H . Występują wówczas trzy jakościowo różne fazy odciążania.



Rys. 4.

I faza odciążania zachodzi gdy siła P maleje w przedziale $P_c \geq P \geq P_{E_0}$. W tym zakresie odciążania wartości jednostkowych sił tarcia występujących między stykającymi się płaskownikami mieszczą się w przedziale $p\mu \geq \tau \geq -p\mu$ co oznacza, że w I fazie

płaskowniki nie ślizgają się po sobie. Belka zachoduje się jak ciało jednolite sprężyste. Na odcinku CE_0 (rys. 4) funkcja $P(f)$ określona jest wzorem:

$$P = \frac{m^3 Eb}{4(l/h)^3} f - [P_C(m^2 - 1) - m^2(m-1)bhp\mu], \quad (32)$$

— gdy $P_C \geq P > P_D$ wówczas wraz z maleniem siły P maleją naprężenia tnące w przekroju poprzecznym belki,

— przy $P = P_D$ znikają siły tarcia na powierzchniach styku płaskowników znajdujących się najbliższej środkowej powierzchni belki,

— w przedziale odciążania $P_D > P \geq P_{E_0}$ siły tarcia na powierzchniach styku płaskowników stopniowo zmieniają znak,

— przy sile $P = P_{E_0}$ maksymalne jednakowe siły tarcia w środkowej powierzchni belki osiągają największą możliwą bezwzględną wartość równą $|\tau_{P=P_{E_0}}| = |\tau_{0max}| = p\mu$.

II faza odciążania belki $P_{E_0} \geq P \geq P_F$ (rys. 4) rozpoczyna się gdy siła P malejąc osiąga wartość P_{E_0} , wówczas na powierzchniach płaskowników znajdujących się najbliższej środkowej powierzchni belki jednostkowe siły tarcia $\tau = |\tau_{0max}| = p\mu$. Od tego momentu odciążaniu (prostowaniu) belki towarzyszą poślizgi wzdłuż powierzchni płaskowników środkowych. Przy dalszym odciążaniu dochodzą poślizgi przy siłach P_{E_1}, P_{E_2}, \dots na powierzchniach kolejnych (licząc od środka) płaskowników. W II fazie odciążania wykres $P(f)$ jest linią łamaną składającą się z szeregu prostych odcinków. Linia ta przechodzi przez punkty E_0, E_1, E_2, \dots . Przy określaniu współrzędnych tych punktów należy postępować podobnie jak podczas obciążania przy określaniu położenia punktów A_0, A_1, A_2, \dots, B . Różnica postępowania polega na tym, że odciążanie rozpoczyna się nie od zerowego stanu naprężenia, lecz od stanu naprężenia widocznego na rys. 3, zależnego od wielkości siły P_C . Od tego stanu należy odejmować odpowiednie paraboliczne stany naprężeń wynikające z odciążania. Siły $P_{E_0}, P_{E_1}, P_{E_2}, P_F$ określa się z warunku, że przy tych siłach jednostkowe siły tarcia na kolejnych powierzchniach płaskowników osiągają wartość $\tau = |\tau_{0max}| = p\mu$.

III faza odciążania $P < P_F$ (rys. 4) występuje gdy przy odciążaniu ślizgają się po sobie już wszystkie płaskowniki. Płaskowniki ślizgają się wówczas w kierunkach przeciwnych niż to miało miejsce w trakcie obciążania. W omawianym przypadku zależność $P(f)$ uzyskać można ze wzoru (29) otrzymanego dla III fazy obciążania przez zmienienie w tym wzorze znaku występującego przy współczynniku tarcia na przeciwny — a więc:

$$P = \frac{mEb}{4(l/h)^3} f - P_0 = \frac{mEb}{4(l/h)^3} f - (m-1)bhp\mu. \quad (33)$$

W omawianym przypadku trwałe ugięcie wynosi:

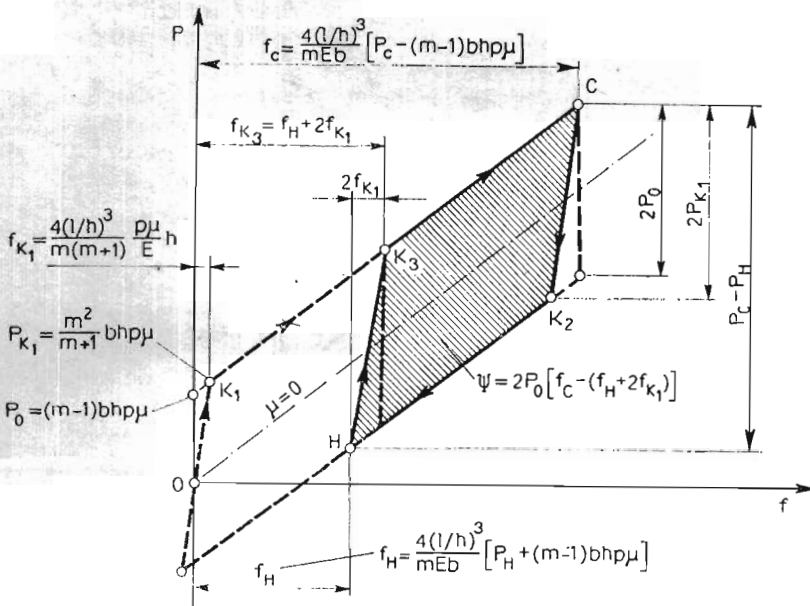
$$f_{P=0} = f_G = 4 \frac{m-1}{m} \frac{p\mu}{E} \left(\frac{l}{h} \right)^3 h. \quad (34)$$

W prowadzonych tu teoretycznych rozważaniach płaskowniki tworzące belkę traktowane są stale jako elementy sprężynujące, podlegające prawu Hooke'a. Zaistniałe tu trwałe ugięcie belki f_G wynika wyłącznie z faktu pojawienia się na powierzchniach styku płaskowników — wewnętrznych, jednostkowych sił tarcia $-p\mu$. Likwidacja trwałego ugięcia

belki jest możliwa przez obciążenie belki przeciwnie działającą siłą do wartości $P = P_H = -\frac{m^2}{m+1} bhp\mu$ i następnie odciążeniu do zera. Likwidacja siły P przebiegająca na wykresie $P(f)$ (rys. 4) na odcinku $H-0$ mimo, że likwiduje ugięcie belki nie likwiduje istnienia wewnętrznych samorównowazających się sił tarcia istniejących na powierzchniach styku płaskowników. Początkowo przy pierwszym cyklu obciążenia (przy $P = 0$) naprężeń wewnętrznych w belce nie było, natomiast teraz (przy drugim i przy następnych cyklach) przy $P = 0$ naprężenia wewnętrzne występują i dlatego w zakresie obciążania $0 \leq P \leq P_B$, (rys. 4) przebiegi wykresów $P(f)$ w pierwszym i następnych cyklach nie są identyczne, a więc na rys. 4 linia łamana A_0, A_1, A_2, B nie pokrywa się z linią A'_0, A'_1, A'_2, B' . Jeżeli cykle zmiany obciążeń powtarzają się stale w przedziale $P_H \leq P \leq P_C$, to funkcja $P(f)$ w drugim i następnych cyklach przebiegać będzie stale wzdłuż tej samej pętli histerezy utworzonej z linii łamanej przechodzącej na rys. 4 przez punkty $H, A'_0, A'_1, A'_2, B', C, E_0, E_1, E_2, F, H$.

4. Określanie pola ograniczonego pętlą histerezy

W praktycznych obliczeniach wygodnie jest teoretycznie otrzymaną pętlę histerezy zastąpić pętlą zastępczą o kształcie równoległoboku przechodzącego na rys. 4 przez punkty H, K_1, C, K_2, H . Oznacza to, że przyjmuje się, iż podczas zginania w belce II-gie fazy obciążania i odciążania nie występują. W takim uproszczonym modelu obliczeniowym zakłada się więc, że przy obciążaniu — w przedziale $P_H \leq P \leq P_K$, i odciążaniu — w przedziale $P_C \geq P \geq P_{K_2}$ — belka jest ciałem jednolitym sprężystym, natomiast przy pozo-



Rys. 5.

stałych zakresach obciążania i odciążania ślizgają się po sobie równocześnie wszystkie płaskowniki. Czynienie takiego uproszczenia jest dopuszczalne wówczas, gdy różnica między polami pętli dokładnej i zastępczej są niewielkie. Szerokość pętli histerezy zależy wprost proporcjonalnie od wielkości nacisków międzywarstwowych p i od wartości współczynnika tarcia μ . Należy w tym miejscu zauważyć, że niedokładności przy określaniu wielkości pola pętli histerezy znacznie bardziej zależą od dokładności trudnej do precyzyjnego określenia wartości współczynnika tarcia μ i od dokładności określenia nacisków międzywarstwowych p — niż od faktu zastąpienia pętli rzeczywistej przez pętlę zastępczą.

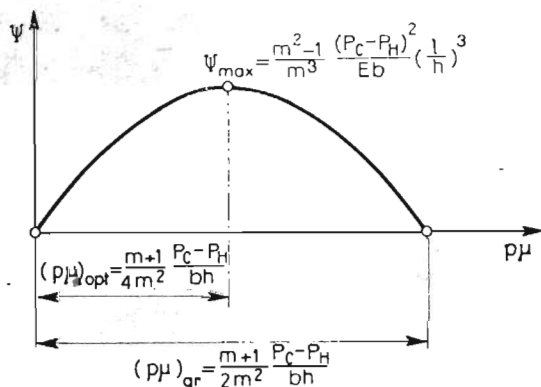
W dalszych zamieszczonych tu rozważaniach analizowane będą tylko takie belki wielowarstwowe, w których będzie można w przybliżeniu przyjąć, że pętle histerezy wykresów $P(f)$ są równoległobokami. Oznaczono pole ograniczone tą pętlą symbolem ψ . Rozpatrzone zostaną belki poddawane w sposób statyczny cyklicznym zmianom obciążania w przedziale $P_H \leq P \leq P_C$ (gdzie $P_H = P_{min}$, $P_C = P_{max}$). Przy poczynionych wyżej założeniach warunkiem koniecznym do wystąpienia zamkniętej pętli jest to aby amplituda zmiany cyklicznych obciążeń belki $\frac{P_C - P_H}{2} > P_{K_1}$, gdyż wówczas pole pętli $\psi > 0$.

Na rys. 5 znajduje się wykres $P(f)$, który poczynając od drugiego cyklu obciążania jest dla kolejnych cykli niezmienny i przechodzi przez punkty H, K_3, C, K_2, H . Pole pętli histerezy wykresu $P(f)$ wynosi:

$$\begin{aligned} \psi &= 2P_0(f_C - f_{K_3}) = 2P_0[f_C - (f_H + 2f_{K_1})] = \\ &= \frac{8(m-1)}{m} \frac{bh^2}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \left[\frac{P_C - P_H}{bh} (p\mu) - \frac{2m^2}{m+1} (p\mu)^2 \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Wykazane zostanie teraz, jak (przy $P_C = \text{const}$ i $P_H = \text{const}$) zmienia się pole ograniczone pętlą w zależności od iloczynu $p\mu$, ($p\mu = \tau_{0max}$). Wykres funkcji $\psi(p\mu)$ jest parabolą (rys. 6), której maksimum występuje gdy:

$$p\mu = (p\mu)_{opt} = \frac{m+1}{4m^2} \frac{P_C - P_H}{bh}, \quad (36)$$



Rys. 6.

wówczas:

$$(P_0)_{opt} = \frac{m^2 + 1}{4m^2} (P_C - P_H), \quad (37)$$

maksymalne pole:

$$\psi_{max} = \psi_{(p\mu)_{opt}} = \frac{m^2 - 1}{m^3} \frac{(P_C - P_H)^2}{Eb} \left(\frac{l}{h}\right)^3. \quad (38)$$

Ze wzoru (34) wynika, że pole $\psi = 0$ gdy:

$$p\mu = 0 \quad \text{oraz} \quad p\mu = (p\mu)_{or} = 2(p\mu)_{opt} = \frac{m+1}{2m^2} \frac{P_C - P_H}{bh}. \quad (39)$$

Przypadek $p\mu = 0$ dotyczy teoretycznego, idealnego modelu belki, w której nie występują międzywarstwowe siły tarcia. Natomiast warunek:

$$p\mu \geq \frac{m+1}{2m^2} \frac{P_C - P_H}{bh} \text{ jest równoznaczny z warunkiem: } \frac{P_C - P_H}{2} \leq \frac{m^2}{m+1} bh p\mu = P_{K_1}.$$

Wówczas $\psi = 0$, gdyż płaskowniki tworzące belkę są na tyle mocno ściśnięte, że podczas zginania belki nie ślizgają się po sobie. Ślizganie może się pojawić dopiero po dostatecznie dużym zwiększeniu amplitudy zmiany obciążania belki.

Interesującym z praktycznego punktu widzenia jest przypadek zmiany obciążania belki w granicach $-P_C \leq P \leq P_C$. W takim przypadku należy do wzorów (35) ÷ (39) podstawić $P_H = -P_C$ i wówczas:

$$\psi_{P_H = -P_C} = \frac{16(m-1)}{m} \frac{bh^2}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \left[\frac{P_C}{bh} (p\mu) - \frac{m^2}{m+1} (p\mu)^2 \right]. \quad (40a)$$

Jeżeli $P_H = -P_C = \text{const}$, to:

$$\psi_{max} = \psi_{(p\mu)_{opt}} = \frac{4(m^2 - 1)}{m^3} \frac{P_C^2}{Eb} \left(\frac{l}{h}\right)^3, \quad (40b)$$

gdzie:

$$(p\mu)_{opt} = \frac{m+1}{2m^2} \frac{P_C}{bh}, \quad (P_0)_{opt} = \frac{m^2 + 1}{2m^2} P_C, \quad (41)$$

i wówczas:

$$(p\mu)_{or} = 2(p\mu)_{opt} = \frac{m+1}{m^2} \frac{P_C}{bh}. \quad (42)$$

Wzory (35), (38), (40) określające pole ograniczone pętlą histerezy w przypadku liczby płaskowników $m > 2$ są wzorami przybliżonymi. Poprzednio zostało wykazane, że z racji istnienia II-gich faz obciążania i odciążania pętla wykresu $P(f)$ nie przechodzi przez punkty K_1, K_2 (rys. 4); K_3, K_2 (rys. 5), lecz przebiega w bliskim ich sąsiedztwie. Ze wzorów (35), (40) — na pola pętli o kształcie równoległoboku, uzyskuje się więc wyniki nieco większe niż być powinny. Jeżeli natomiast belka składa się z dwóch ($m = 2$) płaskowników, to wzory (40) na pole $\psi_{m=2}$ są wzorami dokładnymi, gdyż wówczas II-ga faza jest równocześnie III fazą — wtedy wykres $P(f)$ widoczny na rys. 5 jest wykresem dokładnym i jeżeli dodatkowo $P_H = -P_C$, to:

$$\psi_{P_H = -P_C}^{m=2} = 8 \frac{bh^2}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \left[\frac{P_C}{bh} (p\mu) - \frac{4}{3} (p\mu)^2 \right] = \frac{2qhl^3(3P_C - 4qh)}{9EI}, \quad (43a)$$

gdzie $q = \mu pb$, $I = bh^3/12$,

$$\left(\psi_{P_H=-P_C}^{m=2}\right)_{max} = \left(\psi_{P_H=-P_C}^{m=2}\right)_{(p\mu)_{opt}} = \frac{3}{2} \frac{P_C^2}{Eb} \left(\frac{l}{h}\right)^3, \quad (43b)$$

$$(p\mu)_{opt} = \frac{3}{8} \frac{P_C}{bh}; \quad (p\mu)_{gr} = \frac{3}{4} \frac{P_C}{bh}. \quad (44)$$

Wyżej otrzymane wzory dotyczące przypadku $m = 2$ są identyczne ze wzorami dla belki dwuwarstwowej wyprowadzonymi przez L. E. Goodmana i I. H. Klampa [2].

5. Inne przypadki zamocowania belki

5.1. Belka podparta na obu końcach przegubowo obciążona w środku siłą skupioną. Na rys. 1b pokazana jest belka o długości $L_1 = 2l$, wykonana ze ściśniętego ($p = \text{const}$) pakietu płaskowników. Belkę tę można podzielić na dwie belki wspornikowe o długości $l = L_1/2$ obciążone na końcach siłą skupioną $P = Q/2$. W rozpatrywanym przypadku po dokonaniu podstawień otrzymano:

OBCIĄŻANIE BELKI

I faza obciążania

$$Q = \frac{4Ebm^3}{(L_1/h)^3} f, \quad Q_{A_0} = \frac{4m}{3} bh p \mu, \quad (45)$$

$$\frac{f_{A_0}}{h} = \frac{(L_1/h)^3}{3m^2} \frac{p\mu}{E}. \quad (46)$$

II faza obciążania dla belki składającej się z ośmiu płaskowników

$$\begin{aligned} Q_{A_0} &= \frac{32}{3} bh p \mu, & \frac{f_{A_0}}{h} &= \frac{(L_1/h)^3}{192} \frac{p\mu}{E}, \\ Q_{A_1} &= \frac{104}{9} bh p \mu, & \frac{f_{A_1}}{h} &= \frac{(L_1/h)^3}{144} \frac{p\mu}{E}, \\ Q_{A_2} &= \frac{118}{9} bh p \mu, & \frac{f_{A_2}}{h} &= \frac{(L_1/h)^3}{72} \frac{p\mu}{E}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$Q_B = \frac{46}{3} bh p \mu, \quad \frac{f_B}{h} = \frac{(L_1/h)^3}{24} \frac{p\mu}{E}.$$

III faza obciążania

$$Q = \frac{4mEb}{(L_1/h)^3} f + Q_0, \quad (48)$$

gdzie:

$$Q_0 = 2(m-1)bh p \mu. \quad (49)$$

ODCIAŻANIE BELKI

I faza odciażania

$$Q = \frac{4Ebm^3}{(L_1/h)^3} f - [Q_c(m^2 - 1) - m^2(m - 1)bhp\mu]. \quad (50)$$

II faza odciażania

II faza odciażania jest przypadkiem pośrednim między I i III fazą odciażania.

III faza odciażania

$$Q = \frac{4mEb}{(L_1/h)^3} f - Q_0. \quad (51)$$

Trwałe ugięcie belki wynosi:

$$f_G = f_{Q=0} = \frac{m-1}{2m} \frac{p\mu}{E} \left(\frac{L_1}{h} \right)^3 h. \quad (52)$$

Belka składająca się z ośmiu płaskowników, podparta na obu końcach przegubowo i obciążona w środku poprzeczną siłą Q poddana została badaniom doświadczalnym. Uzyskano zadawalającą zgodność wyników doświadczalnych z wynikami otrzymanymi teoretycznie przy wykorzystaniu wyżej przytoczonych wzorów. Rezultaty badań oraz ostateczne wnioski podane są w publikacji [1].

5.2. Belka sztywno zamocowana na obu końcach i obciążona w środku siłą skupioną. Z belki pokazanej na rys. 1c o długości $L_2 = 4l$, wykonanej ze ściśniętego pakietu płaskowników, obciążonej w środku skupioną siłą Q ($Q = 2P$), wydzielić można cztery belki wspornikowe. Ugięcie belki w środku jej długości wynosi f_c . Rozwiązanie omówionego zagadnienia uzyskuje się przez podstawienie do wzorów wyprowadzonych w p. 2 dotyczących belki wspornikowej:

$$l = L_2/4, \quad P = Q/2, \quad f = f_c/2.$$

Literatura

1. T. GAŁKIEWICZ, A. ŻELIGOWSKI, *Badania doświadczalne belek zginanych i ścinanych utworzonych z pakietu płaskowników*, MTiS t. 27, z. 4, 1989
2. L. E. GOODMAN, I. H. KLAMP, *Analysis of slip damping*, J. Appl. Mech. v. 3, 1956
3. Zb. OSIŃSKI, *Tłumienie drgań mechanicznych*, PWN W-wa, 1979
4. Н. Г. КАЛИНИН, Ю. А. ЛЕБЕДЕВ, В. И. ЛЕБЕДЕВА, Я. Г. ПАНОВКО, Г. И. СТРАХОВ, *Конструкционное деформирование в неподвижных соединениях*, Рига, АН Лат. СРР 1960

Резюме

АНАЛИЗ РАБОТЫ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ И ОДНОВРЕМЕННОМ СДВИГЕ СДЕЛАННЫХ ИЗ СЖАТОГО ПАКЕТА ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Целью работы является получение теоретической зависимости силы P от изгиба f для балок показанных на рис: 2а, б, с. Оказалось, что когда существует трение, то появляются 3 качественно разные фазы нагружения и разгрузки балки. Качественная разница возникает отсюда, что

в начале I-й фазы плоские стержни не скользят один по другому. В следующих фазах II-й и III-й в сжимаемой балке, плоские стержни перемещаются по себе, что приводит к значительному уменьшению жесткости изгиба балки. Оказалось что зависимость $P(f)$ выражается петлей гистерезиса. В работе получено поле петлей гистерезиса.

S u m m a r y

BEHAVIOUR OF BEAMS MADE FROM COMPRESSED PACKAGE OF FLAT IRON BARS, UNDER BENDING AND SIMULTANEOUS SHEAR

The aim of the paper is the theoretical determination of the relationship between force P and deflection f for beams shown in fig. 2a, b, c. It has been shown that when the friction is present in the cases considered the three qualitatively different phases of beam loading and unloading may occur. In the later phases (second and third) flat iron bars in the bending beam slide one another resulting in the distinct decrease of flexural rigidity of the beam. It appears that the diagram $P(f)$ forms the hysteresis loop. In the paper the area of the hysteresis loop has been also evaluated.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 kwietnia 1987 roku.
