

PARAMETRYCZNA OPTIMALIZACJA PRĘTÓW MIMOŚRODOWO ŚCISKANYCH W NAWIĄZANIU DO TEORII WYBOCZENIA PEŁZAJĄCEGO KEMPNERA — HOFFA

ADAM WRÓBLEWSKI

Politechnika Krakowska

1. Wstęp

Problem stateczności ściskanego pręta w warunkach pełzania sformułowany został po raz pierwszy przez Freundenthala [1] oraz Rżanicyna [2]. Zagadnienie to rozwijane było w następnych latach przez szereg autorów i najogólniej wyróżnić można dwie grupy problemów: (i) stateczność osiowo ściskanych prętów prostoliniowych (zagadnienie analogiczne do sprężystego problemu Eulera); (ii) wyborzenie techniczne prętów o wstępnej imperfekcji (wstępna krzywizna lub mimośrodowe obciążenie). Podstawowe kryteria z pierwszej grupy sformułowane zostały przez: Shanleya [3] (kryterium modułu stycznego); Gerarda [4] (kryterium krytycznej deformacji); Rabortnowa-Szestierikowa [5] (kryterium dynamiczne). Drugą grupę wybooczenia pełzającego prętów rozpoczynają prace Kempnera [6] oraz Hoffa [7].

Powyższe kryteria sformułowane zostały przy założeniu małych odkształceń i przemieszczeń oraz nieściśliwości osi. W świetle tych założeń teoria Kempnera-Hoffa jest wewnętrznie sprzeczna. Czas krytyczny definiują oni jako moment gdy przemieszczenia lub prędkość przemieszczeń dąży do nieskończoności. Sprzeczność tą można usunąć przez zastosowanie teorii trzeciego rzędu. Stosując taką teorię Życzkowski [8] wykazał, że z teoretycznego punktu widzenia definicja Kempnera-Hoffa nie jest poprawna, natomiast z praktycznego punktu widzenia dość dobrze określa realny czas pracy pręta. Potwierdzają to badania doświadczalne prowadzone między innymi przez Hoffa [9] oraz Hulta [10]. Nadmienić również należy, że czas krytyczny wyznaczany według teorii Kempnera-Hoffa jest porównywalny z czasem pracy pręta przy uwzględnieniu kruchego pęknięcia materiału ([11], [12]).

Dobra zgodność obliczeń teoretycznych z wynikami doświadczeń powoduje, że teoria Kempnera-Hoffa bywa najczęściej prezentowana w poradnikach inżynierskich (np. [13]). Z reguły, omawiany jest tylko przypadek pręta dwuprzegubowo podpartego ściskanego siłą osiową. Inne przypadki zamocowania i obciążenia pręta są mniej rozpoznane; pręty o zmiennym przekroju poprzecznym nie były do tej pory analizowane.

Wybooczenie pełzające jednostronnie utwierdzonych przyrzmatycznych prętów mimośrodowo ściskanych analizował Isaakssen [14]. Występują tu, w ogólności, dwa parametry

imperfekcji — wstępne ugięcie oraz mimośród przyłożenia siły. W praktyce (jak pokazano w [15]) analizuje się tylko jeden parametr będący zredukowanym mimośrodem (przy początkowo prostoliniowej osi pręta) lub zredukowanym ugięciem początkowym (dla zerowego mimośrodu).

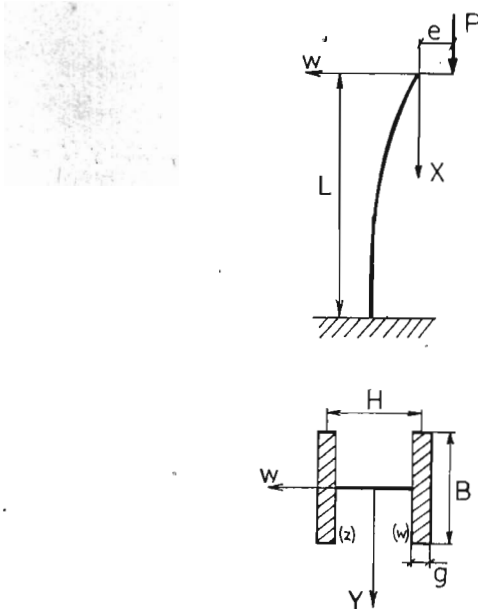
Optymalne kształtowanie prętów w warunkach pełzania zależy w istotny sposób od przyjętej teorii wyboczenia, niedokładności wstępnych, równań konstytutywnych itp. W przypadku prętów wykazujących imperfekcję ograniczenia mają zazwyczaj charakter sztywnościowy lub wytrzymałościowy. Przykładowo, Distefano [16] przeprowadził optymalizację parametryczną prętów o danym ugięciu w pewnym określonym czasie. Wojdanowska, Życzkowski [17] wykazali, dla ogólnego liniowego prawa pełzania, że optymalne kształty uzyskane dla zakresu sprężystego zapewniają również minimalną prędkość wyboczenia pełzającego (dla pewnych form pierwotnej linii ugięcia zapewniającej modalny przebieg ugięcia w czasie). Świsterski, Wróblewski, Życzkowski [18] przeprowadzili optymalizację kształtu jednostronnie utwierdzonego pręta mimośrodowo obciążonego w zakresie dużych ugięć; warunek ograniczający związane z tworzeniem się pierwszych pęknięć w sensie hipotezy Kaczanowa.

W niniejszej pracy sformułowano i rozwiązano problem optymalizacji kształtu pręta przy uwzględnieniu warunku stateczności przy pełzaniu w sensie teorii Kempnera-Hoffa. Rozważania ograniczono do przypadku jednostronnie utwierdzonego pręta mimośrodowo ściskanego. Przeprowadzono dowód poprawności sformułowania problemu z matematycznego punktu widzenia. Z uwagi na to, że rozważamy pręt o zmiennym przekroju czas krytyczny określić należy poprzez bezpośrednie całkowanie równań pełzania pręta. Jest to istotny element nowości a zarazem istotna trudność związana z koniecznością analizy ugięć zmierzających do nieskończoności. Zagadnienie optymalizacji zawężono do optymalizacji parametrycznej. Optymalnego kształtu poszukuje się w klasie prętów stożkowych mających najszersze zastosowanie techniczne z uwagi na stosunkowo prostą technologię wytwarzania.

2. Podstawowe równania

Rozważać będziemy początkowo prostoliniowy pręt jednostronnie utwierdzony, o długości L , ściskany siłą P na mimośrodzie e (rys. 1). Zakładamy, że przekrojem pręta jest symetryczny idealny dwuteownik (sandwich) i poszukujemy wielkości pola przekroju $A(X)$ przy ustalonym rozstawie H półek. Analiza takiego przekroju upraszcza znacznie obliczenia, ponieważ w warunkach równowagi unikamy całkowania naprężeń po przekroju pręta. Jest to istotnym ułatwieniem zwłaszcza gdy analizujemy nieliniowe prawo fizyczne. Rozważania idealnego przekroju dwuteowego mają sens nie tylko poznawczy. Sandwich stanowi również pewną aproksymację przekroju zwartego. Poprawność tej aproksymacji zarówno z teoretycznego jak i praktycznego punktu widzenia była szczegółowo badana w wielu publikacjach, np. Hoff [19], Rabotnow [20].

Dla dowolnego przekroju warunki równowagi i związki geometryczne możemy zapisać w postaci (siłę i naprężenie ściskające uznajemy tutaj za dodatnie):



Rys. 1.

$$\begin{aligned}\sigma_w \frac{A}{2} + \sigma_z \frac{A}{2} &= P, \\ \sigma_w \frac{A}{2} \frac{H}{2} - \sigma_z \frac{A}{2} \frac{H}{2} &= P(w+e), \\ \varepsilon_z - \varepsilon_w &= H \left[\frac{\partial^2 w(X, t)}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w(X, 0)}{\partial X^2} \right],\end{aligned}\quad (2.1)$$

gdzie:

$\sigma_i = \sigma_i(X, t)$, $i = w, z$ — naprężenie normalne odpowiednio w półce wewnętrznej lub zewnętrznej,

$A = A(X)$ — pole przekroju dwuteownika,

$w = w(X, t)$ — linia ugięcia pręta.

Pręt jest pierwotnie prostoliniowy, dlatego też $\frac{\partial^2 w(X, 0)}{\partial X^2} = 0$.

Przyjmujemy, że pełzanie opisane jest nieliniowym prawem Nortona-Bailey'a:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{\lambda} |\sigma|^n \text{sign}(\sigma), \quad (2.2)$$

gdzie λ , E , n są stałymi materiałowymi; kropka oznacza różniczkowanie względem czasu t .

Łącząc związki (2.1), (2.2) otrzymujemy podstawowe równanie pełzania pręta:

$$H \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \right] = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{4P}{HAE} (w+e) \right] + \frac{1}{\lambda} [|\sigma_z|^n \text{sign}(\sigma_z) - |\sigma_w|^n \text{sign}(\sigma_w)], \quad (2.3)$$

$$\sigma_{w,z} = \frac{P}{A} \left[1 \pm \frac{2}{H} (w+e) \right]. \quad (2.4)$$

Warunki brzegowe dla powyższego równania są następujące:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0, \\ w'(0, t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

kreska oznacza różniczkowanie po zmiennej X . Warunek początkowy ($t = 0^+$) określamy z natychmiastowych odkształceń sprężystych:

$$w''(X, 0^+) + \frac{4P}{EAH^2} [w(X, 0^+) + e] = 0. \quad (2.6)$$

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne i pomocnicze oznaczenia:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2} \frac{E^n}{\lambda} \left(\frac{H}{2L} \right)^{2(n-1)} t, & \xi &= \frac{X}{L}, & \delta &= \frac{2e}{H}. \\ s_m(\xi) &= \frac{4PL^2}{EAH^2}, & \Phi(\xi, \tau) &= \frac{2}{H} (w + e), \end{aligned} \quad (2.7)$$

możemy równanie (2.3) zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + s_m \Phi \right] &= -s_m^n F(\Phi), \\ F(\Phi) &= [(1 + \Phi)^n - |1 - \Phi|^n \text{sign}(1 - \Phi)], \end{aligned} \quad (2.8)$$

a warunki (2.5), (2.6):

$$\begin{aligned} \Phi(0, \tau) &= \delta, \\ \Phi'(1, \tau) &= 0, \\ \Phi'_\xi(\xi, 0^+) + s_m(\xi) \Phi(\xi, 0^+) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Klasyczne rozwiązanie Kempnera-Hoffa (dla prętów przyrządowych) otrzymuje się rozwiązując równanie pełzania pręta metodą jednoparametrowej kolokacji lub poprzez rozwinięcie w szereg Fouriera i analizę tylko pierwszego wyrazu szeregu. Podejście takie jest zbyt mało dokładne jeżeli rozważamy pręty o zmiennym przekroju. W tym przypadku czas krytyczny określać należy poprzez bezpośrednie całkowanie równania pełzania pręta (2.8).

W celu sprawdzenia poprawności sformułowania problemu w sensie kryterium Kempnera-Hoffa wykazać należy, że rozwiązanie równania (2.8) posiada punkt osobliwy tzn., że

$$\exists \tau^* < \infty, 0 \leq \xi^* \leq 1: \lim_{\tau \rightarrow \tau^*} \Phi(\xi^*, \tau) = \infty. \quad (2.10)$$

Dowód przeprowadzimy wykazując, że minoranta rozwiązania Φ ma punkt osobliwy. Wprowadzając pomocniczą funkcję:

$$\varphi(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\xi, 0^+), \quad (2.11)$$

możemy równanie różniczkowe cząstkowe przedstawić jako równanie różniczkowo-całkowe:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \varphi(\xi) \left\{ \psi(\xi) \int_{\xi}^1 \varphi(y) s_m^n(y) F[\Phi(y, \tau)] dy + \int_0^{\xi} \psi(y) \varphi(y) s_m^n(y) F[\Phi(y, \tau)] dy \right\}, \quad (2.12)$$

gdzie:

$$\psi(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\xi} \frac{1}{\varphi^2(y)} dy. \quad (2.13)$$

Funkcja $\varphi(\xi)$ jest linią ugięcia pręta w chwili początkowej wyznaczoną w oparciu o teorię małych odkształceń i przemieszczeń. Fizycznie uzasadnione jest zatem założenie, że $\varphi(\xi)$ jest funkcją dodatnią, rosnącą i ograniczoną. Uzasadnione również jest założenie, że funkcja $\Phi(\xi, \tau)$ jest niemalejącą funkcją zmiennej ξ w każdej chwili czasu τ . Zakładając dodatkowo, że nie rozważamy pręta o zerowym polu przekroju, zapisać możemy:

$$\begin{aligned} \inf s_m &= b > 0, \\ \inf \varphi &= \delta > 0, \\ \sup \varphi &= c, \quad \delta < c < \infty. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tym samym słuszne są nierówności:

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &\geq \int_0^{\xi} \frac{dz}{c^2} = \frac{1}{c^2} \xi, \\ F(\Phi) &= (1 + \Phi)^n - |1 - \Phi|^n \text{sign}(1 - \Phi) \geq \Phi^n, \\ \frac{\partial \Phi(\xi, \tau)}{\partial \tau} &\geq \delta \left[\frac{1}{c^2} \xi \int_{\xi}^1 \delta b^n \Phi^n(y, \tau) dy + \int_0^{\xi} \frac{1}{c^2} y \delta b^n \Phi^n(y, \tau) dy \right] \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{c^2} b^n \left[\int_{\xi}^1 \xi \Phi^n(y, \tau) dy + \int_0^{\xi} y \Phi^n(y, \tau) dy \right] \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{c^2} b^n \left[\int_{\xi}^1 \xi \Phi^n(\xi, \tau) dy + \int_0^{\xi} y \Phi^n(0, \tau) dy \right] \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{c^2} b^n \left[\xi(1 - \xi) \Phi^n(\xi, \tau) + \frac{1}{2} \xi^2 c^n \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Powyższa minoryzacja równania (2.12) doprowadza do równania różniczkowego względem zmiennej τ , w którym zmienna ξ traktowana może być jako parametr. W celu efektywnego rozwiązania powyższej nierówności należy określić wartość stałej n . Przyjmując $n = 2$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \tau) &\geq c \left(\frac{\xi}{2(1-\xi)} \right)^{1/2} \text{tg} \left\{ \text{arctg} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{2(1-\xi)}{\xi} \right)^{1/2} \Phi(\xi, 0^+) \right] \right\} + \\ &+ \frac{b^2 \delta^2}{2c} (2\xi^3(1-\xi))^{1/2} \tau. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Widać, że prawa strona nierówności (minoranta) dąży do nieskończoności dla skończonej wartości τ dla każdego $\xi \in (0, 1)$ co należało dowieść. Brak rozwiązania osobliwego dla $\xi = 0$ jest naturalne (początek układu współrzędnych) natomiast dla $\xi = 1$ jest efektem przeprowadzonej minoryzacji. Bardziej dokładna aproksymacja usunęłaby ten efekt. Nadmienić należy również, że dla $n \leq 1$ nie uzyskamy rozwiązań osobliwych analogicznie jak w klasycznym rozwiązaniu Kempnera-Hoffa.

3. Sformułowanie problemu optymalizacji

Problem optymalizacji sformułujemy następująco: poszukujemy kształtu pręta (funkcji $A(X)$ zmiany przekroju poprzecznego), który zapewni nam maksimum czasu zniszczenia t^* przy stałej objętości V i ustalonym obciążeniu (siła P i mimośród e) pręta;

$$\begin{aligned} t^* &\rightarrow \max, \\ V &= L \int_0^1 A(\xi) d\xi = \text{const}, \\ P, e &= \text{const}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Optymalnego kształtu pręta poszukiwać będziemy w klasie prętów stożkowych, mających najszersze zastosowanie techniczne. Pole przekroju pręta A określa zatem funkcja:

$$\begin{aligned} A(\xi) &= A(1) [(1-a)\xi + a], \\ a &= \frac{A(0)}{A(1)}, \quad 0 \leq a \leq 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Przy uczynionym w punkcie 2 założeniu, że rozstaw półek dwuteownika jest stały w każdym przekroju pręta, liniowa zmiana pola przekroju równoważna jest liniowej zmianie szerokości pręta. Wg. klasyfikacji M. Życzkowskiego [21] oznacza to, że rozważamy klasę prętów zbieżnych z płaszczyzny wyboczenia.

Optymalizacja parametryczna polegać będzie na określeniu wartości współczynnika a , dla którego przy ustalonej wartości siły P oraz mimośrodu e otrzymamy największy czas krytyczny.

Warunek poboczny optymalizacji tj. warunek stałej objętości pręta:

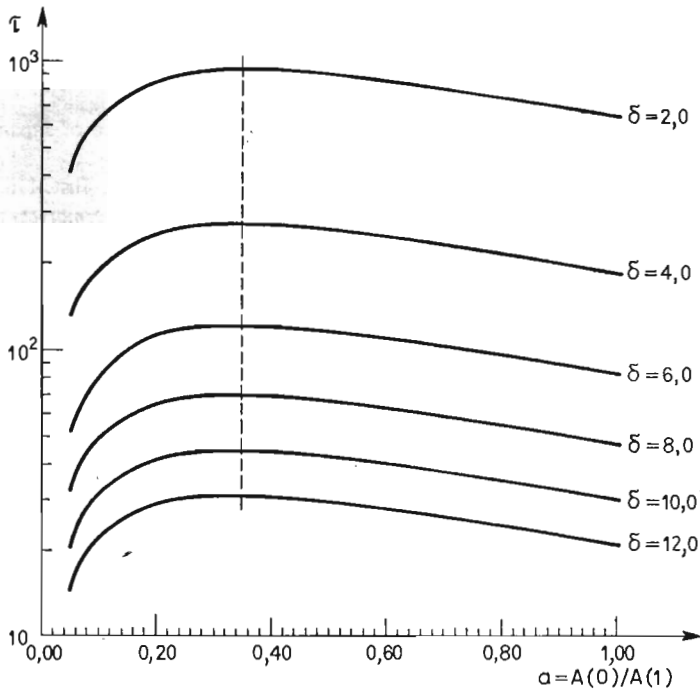
$$V = \int_0^1 A(\xi) L d\xi = \frac{1}{2} A(1) L(a+1) = \text{const}, \quad (3.3)$$

wyznacza zależność pomiędzy parametrem a i przekrojem $A(1)$.

Do obliczeń przyjęto następujące dane: $L = 1$ [m], $H = 0.01$ [m], $P = 100$ [N], $E = 1.7 \cdot 10^5$ [MPa], $\frac{1}{\lambda} = 0.16 \cdot 10^{-7}$ [MPa $^{-n}$ h $^{-1}$], $n = 3$, $V = B \cdot 10^{-5}$ [m 3].

Na rys. 2 przedstawiono, w skali logarytmicznej, czas krytyczny w funkcji parametru a przy różnych mimośrodach e . Widać, że punkty ekstremalne (połączone linią przerywaną) funkcja osiąga dla parametru $a \cong 0.35$. Dla prętów stożkowych w stanie sprężystym optymalna wartość parametru $a \cong 0.1$ (wartość tą wyznaczono na podstawie pracy [21] przeliczając odpowiednie parametry, oraz uwzględniając warunek stałej objętości pręta). Oznacza to, że w stosunku do optymalnego pręta sprężystego występuje istotne pogrubienie swobodnego końca pręta pracującego w warunkach reologicznych. Podobne jakościowo wyniki podają prace [18], [22] i [23] (pomimo całkowicie odmiennie sformułowanych warunkach ograniczających związanych z wyboczeniem pełzającym).

Istotnym wnioskiem jakościowym przeprowadzonych obliczeń jest to, że imperfekcja (mimośród) nie ma znaczącego wpływu na kształt optymalny pręta, a wpływa jedynie na wartość czasu krytycznego. Potwierdza to wnioski z pracy [23] gdzie przeprowadzono



Rys. 2.

obliczenia, w szerszym przedziale zmienności zarówno imperfekcji jak i wartości obciążenia, na modelu pręta (co stanowi znaczne uproszczenie opisu problemu). Zaznaczyć należy jednak, że optymalne parametry funkcji zmiany pola przekroju istotnie zależne są od przyjętego prawa fizycznego jak również od hipotezy wyoboczenia pełzającego.

Literatura

1. A. M. FREUNDENTHAL, *Some time effects in structural analysis*, 6th International Congress of Applied Mechanics, Paris 1946
2. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Процессы деформирования конструкций из упруговязких элементов*. ДАН СССР 52 (1946), 1, 25 - 28
3. F. R. SHANLEY, *Weight — strength Analysis of Aircraft Structures*, McGraw-Hill, New York 1952
4. G. GERARD, *A creep buckling hypothesis*, J. Aero. Sci 23 (1956), 9, 879 - 882
5. Ю. Н. РАБОТНОВ, С. А. ШЕСТЕРИКОВ, *Устойчивость стержней и пластинок в состоянии ползучести*, Прикл. мат. и мех., 21, (1957), 3, 406 - 412
6. J. KEMPNER, *Creep bending and buckling of non-linearly of visco-elastic columns*, NACA TN 3137., January 1954
7. N. J. HOFF, *Creep buckling*, Aeronaut. Quart. 7 (1956), 1 - 20
8. M. ŻYCZKOWSKI, *Geometrically non-linear creep buckling of bars*, Arch. Mech. Stos. 12 (1960), 3, 379 - 411
9. N. J. HOFF et al., *Experimental investigation of effect of deviations from straightness upon critical time in creep buckling*, Pibal Report No 239, Brooklyn 1953
10. J. HULT, *Creep buckling*, Publication No 111, Institutionen för hållfasthetslära Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm 1955

11. M. ŻYCZKOWSKI, A. ZABORSKI, *Creep rupture phenomena in creep buckling*, Proc. IUTAM Symp. Viscoelastic Media, Göteborg, 1974, 283 - 290, Springer, Berlin (1975)
12. P. O. BOSTRÖM, *An analysis of the effect of tension induced damage creep buckling of columns*, Int. J. Solids Structures, 12 299 - 307, (1976)
13. *Handbook of Structural Stability*, Edited by Column Research Committee of Japan, Part I Straight members, 179 - 182, Corona Publishing Company, LTD., Tokyo 1971
14. A. ISAAKSEN, *Creep rates of eccentrically loaded test — pieces*, Trans. Roy Inst. 110, Stockholm 1957
15. M. ŻYCZKOWSKI, *Skończone ugięcia mimośrodowo ściskanych prętów niepryzmatycznych*, Księga Jubil. W. Wierzbickiego Warszawa 1959, 479 - 518
16. N. DISTEFANO, *Quasilinearization and the solution of non — linear design problems in structures undergoing creep deformations*, Int. J. Solids Struct. 8 (1972), 215 - 225
17. R. WOJDANOWSKA, M. ŻYCZKOWSKI, *On optimal imperfect columns subjected to linear creep buckling*, J. Appl. Mech. 47 (1980), 2, 438 - 439
18. W. ŚWISTERSKI, A. WRÓBLEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Geometrically non-linear eccentrically compressed columns of uniform creep strength vs optimal columns*, Int. J. Non-Linear Mechanics 18 (1983), 4, 287 - 296
19. N. J. HOFF, *The idealized column*, Festschrift Richard Grammel, Ing. Arch. 28 (1959), 89
20. Ю. Н. РАБОТНОВ, Прикл. мат. и мех. 28 (1964), 1040
21. M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie sił krytycznych dla sprężystych prętów niepryzmatycznych metodą interpolacji częściowej*, Rozpr. Inż. 4 (1956), 3
22. M. ŻYCZKOWSKI, R. WOJDANOWSKA, *Optimal structural design with respect to creep buckling*, Symp. IUTAM Creep in Struct. II, 1970, Springer 1972, 371 - 387
23. A. WRÓBLEWSKI, *Problem optymalności mimośrodowo ściskanego słupa w warunkach pełzania*, (w druku)

Резюме

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМАЛИЗАЦИЯ
ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИ СЖИМАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ ПО ОТНОШЕНИЮ
К ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕГО ВЫПУЧИВАНИЯ КЕМПНЕРА-ГОФФА

В работе формулируется проблема оптимального формулирования эксцентрически сжимаемых стержней из-за технического выпучивания в условиях ползучести по теории Кемпнера-Гоффа. В общем доказывается правильность формулировки проблемы с точки принятого критерия. Проблема оптимизации ограничивается к параметрической оптимизации, значит для принятой группы конусных стержней исчисляется такого значения параметра описывающего сходимость конуса, чтобы при установившемся обдеме стержня и установленной нагрузке получить максимальное критическое время для стержня.

Summary

PARAMETRICAL OPTIMIZATION OF ECCENTRICALLY COMPRESSED
BARS AGAINST THE KEMPNER-HOFF CREEP BUCKLING

The optimal design problem with respect to technical creep buckling of eccentrically compressed bars is formulated. The buckling phenomenon is described by the Kempner — Hoff theory. Corectness of formulation, in the sense of criterion adopted, is proved in general. Cosiderations are restricted to parametrical optimization. It means that a value of cone slope parameter is determined in a given class of cone shaped bars in order to maximize the critical time. Constant volume of bar material as well as given loading are treated as optimization constrains.