

NUMERYCZNA SYNTEZA PRZESTRZENNEJ GRY POŚCIGOWEJ DWÓCH PROSTYCH OBIEKTÓW LATAJĄCYCH*

JERZY GALAJ
JERZY MARYNIAK

Politechnika Warszawska

W pracy przedstawiono heurystyczne rozwiązanie przestrzennej gry pościgowej dwóch prostych obiektów latających np. rakiet. Dla przyjętego modelu systemu growego podano warunki konieczne istnienia strategii optymalnych obu graczy, ścigającego S i ściganego P . Przeprowadzono symulację cyfrową dyskretnego modelu systemu growego, wykorzystując w tym celu algorytm oparty na metodzie gier elementarnych. Biorąc pod uwagę fakt, że klasyczne metody iteracyjne nie dają w tym przypadku pozytywnych rezultatów, uzyskane wyniki uzasadniają celowość zastosowania wspomnianej metody w rozważanej klasie gier pościgowych.

1. Wprowadzenie

W niniejszym artykule przedstawiono kolejny etap prac związanych z zagadnieniami numerycznej syntezy gier pościgowych. W [1] rozważono przypadek ruchu płaskiego dwóch prostych obiektów latających. Podobnej tematyce były poświęcone m.in. prace [4] i [5]. Obecnie przedmiotem syntezy growej będą dwa ciała osiowosymetryczne (np. rakiety), które mają możliwość swobodnego poruszania się w przestrzeni inercyjnej. Uwzględnienie ruchu przestrzennego powoduje tym samym zbliżenie badanego procesu do warunków rzeczywistych.

W pracy zamieszczono kolejno:

- a) model systemu growego, na który składają się równania ruchu przestrzennego obiektów latających (wyprowadzone w oparciu o wcześniej przyjęte założenia wstępne) oraz zbiór celu i funkcja kosztu (rozdział 2),
- b) rozwiązanie gry pościgowej polegające na wyznaczeniu, w oparciu o zasadę minimum Pontriagina-Kelendzheridze, strategii punktu siodłowego (rozdział 3),
- c) wyznaczenie modelu dyskretnego gry pościgowej oraz podanie zmodyfikowanych warunków brzegowych dla metody gier elementarnych (rozdział 4),

* Praca była referowana na II Konferencji „Mikrokomputery w mechanice”

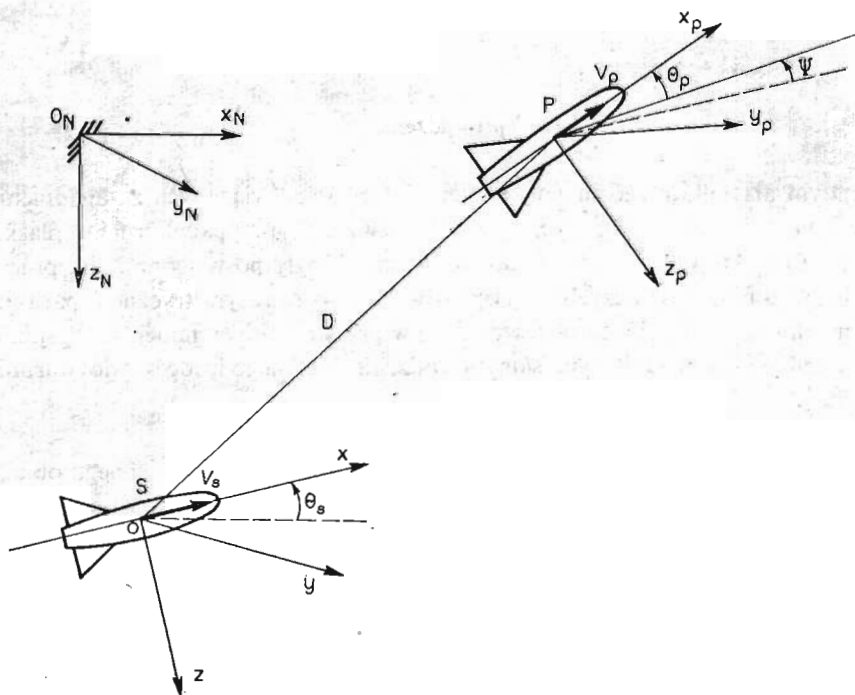
- d) symulację cyfrową modelu growego oraz analizę wyników zawierającą m.in. porównanie zachowania się modelu przy różnych wartościach parametrów procesu growego (rozdział 5),
- e) podsumowanie wyników badań symulacyjnych oraz podanie podstawowych kierunków dalszych prac z tego zakresu (rozdział 6).

2. Model systemu growego

Rozważmy proces pościgowy, w którym uczestniczą dwa osiowosymetryczne obiekty latające (OL). Jeden z nich stale pełni w tym procesie rolę obiektu ścigającego (gracz S), a drugi obiektu ściganego (gracz P). Jako przykład praktyczny można podać tutaj pościg, w którym biorą udział dwie automatycznie sterowane rakiety typu ziemia-powietrze lub powietrze-powietrze.

W celu wyznaczenia równań opisujących dynamikę systemu growego przyjęto następujące założenia wstępne:

1. Prędkości obu obiektów są stałe podczas gry i równe odpowiednio V_s (gracz S) i V_p (gracz P), przy czym $V_s > V_p$.
2. Oba obiekty latające są osiowosymetrycznymi ciałami sztywnymi, których osie symetrii (odpowiednio Ox_s i Ox_p) pokrywają się z wektorami prędkości danego obiektu (odpowiednio V_s i V_p),



Rys. 1. Kinematyka ruchu obiektów latających we względnym układzie odniesienia $Oxyz$

3. Sterowanie ruchem obu OL w płaszczyźnie podłużnej i poprzecznej jest realizowane odpowiednio za pośrednictwem poziomych i pionowych powierzchni sterowych.
4. Na oba OL działają:
 - a) sterujące i tłumiące momenty pochylające proporcjonalne odpowiednio do wychyleń poziomych powierzchni sterowych (u_s^θ, u_p^θ) i prędkości kątowych pochylania ($\dot{\theta}_s, \dot{\theta}_p$),
 - b) sterujące i tłumiące momenty odchylające proporcjonalne odpowiednio do wychyleń pionowych powierzchni sterowych (u_s^ψ, u_p^ψ) i prędkości kątowych odchylania ($\dot{\psi}_s, \dot{\psi}_p$), przy czym wszystkie współczynniki proporcjonalności ($k_s^\theta, k_p^\theta, k_s^\psi, k_p^\psi, k_s^{\omega_x}, k_p^{\omega_x}, k_s^{\omega_y}, k_p^{\omega_y}, k_s^{\omega_z}, k_p^{\omega_z}$) są niezmiennie podczas gry.
5. Pominięto ograniczenia konstrukcyjne i pilotażowe oraz dynamikę sterowych serwo-mechanizmów wykonawczych.

Zgodnie z ogólnie przyjętą zasadą w tego typu zagadnieniach, równania ruchu obu obiektów przedstawiono we względnym układzie odniesienia $Oxyz$ (rys. 1) związanym ze środkiem ciężkości gracza S , którego oś Ox jest skierowana zgodnie z wektorem prędkości V_s .

Równania te mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= V_p [\cos \theta_p(t) \cos \theta_s(t) \cos \psi(t) + \sin \theta_p(t) \sin \theta_s(t)] + \\
 &\quad - V_s - z(t) \dot{\theta}_s(t) + y(t) \dot{\psi}_s(t), \\
 \dot{y}(t) &= V_p \cos \theta_p(t) \sin \psi(t) - x(t) \dot{\psi}_s(t), \\
 \dot{z}(t) &= V_p [\cos \theta_p(t) \sin \theta_s(t) \cos \psi(t) - \sin \theta_p(t) \cos \theta_s(t)] + x(t) \dot{\theta}_s(t), \\
 \ddot{\theta}_s(t) &= k_s^\theta u_s^\theta(t) - k_s^{\omega_x} \dot{\theta}_s(t), \\
 \ddot{\psi}_s(t) &= k_s^\psi u_s^\psi(t) - k_s^{\omega_z} \dot{\psi}_s(t), \\
 \ddot{\theta}_p(t) &= k_p^\theta u_p^\theta(t) - k_p^{\omega_y} \dot{\theta}_p(t), \\
 \ddot{\psi}_p(t) &= k_p^\psi u_p^\psi(t) - k_p^{\omega_z} \dot{\psi}_p(t),
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie: $\psi(t) = \psi_p(t) - \psi_s(t)$,

θ_s, θ_p — kąty toru gracza S i P ,

ψ_s, ψ_p — kąty kursu gracza S i P ,

k_s^θ, k_p^θ — współczynniki efektywności sterowania gracza S i P w kanale pochylenia,

k_s^ψ, k_p^ψ — współczynniki efektywności sterowania gracza S i P w kanale kierunku,

$k_s^{\omega_x}, k_p^{\omega_x}$ — współczynniki tłumienia ruchu pochylającego gracza S i P ,

$k_s^{\omega_z}, k_p^{\omega_z}$ — współczynniki tłumienia ruchu odchylającego gracza S i P .

Celem rozważanej gry pościgowej jest osiągnięcie strefy obejmującej przestrzeń kulistą o środku w punkcie O i zadanim promieniu R_z (np. promień skutecznego rażenia). W związku z powyższym zbiór celu A można zapisać w następującej formie:

$$A = \{t, x(t) : t < T_{max} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq R_z^2\}, \tag{2}$$

gdzie: T_{max} — założony apriori maksymalny czas trwania gry,

R_z — zadania apriori odległość docelowa między graczami.

Jako funkcję kosztu przyjęto czasooptymalny wskaźnik całkowity w postaci:

$$J(u_s^\theta, u_s^\psi, u_p^\theta, u_p^\psi) = \int_0^t dt, \tag{3}$$

który ma być minimalizowany przez gracza S , maksymalizowany zaś przez gracza P . Przy założeniu istnienia strategii punktu siodłowego gry w postaci par sterowań $\{\hat{u}_s^\theta = \hat{\gamma}_s^\theta(x, t), \hat{u}_s^\psi = \hat{\gamma}_s^\psi(x, t)\}$ i $\{\hat{u}_p^\theta = \hat{\gamma}_p^\theta(x, t), \hat{u}_p^\psi = \hat{\gamma}_p^\psi(x, t)\}$, optymalna wartość gry J będzie równa wartościom optymalnych wskaźników jakości obu graczy ($\hat{J} = \hat{J}_s = \hat{J}_p$), przy czym:

$$\hat{J}_s = \min_{\substack{u_s^\theta \in U_s^\theta \\ u_s^\psi \in U_s^\psi}} \max_{\substack{u_p^\theta \in U_p^\theta \\ u_p^\psi \in U_p^\psi}} \int_0^T dt, \quad \hat{J}_p = \max_{\substack{u_p^\theta \in U_p^\theta \\ u_p^\psi \in U_p^\psi}} \min_{\substack{u_s^\theta \in U_s^\theta \\ u_s^\psi \in U_s^\psi}} \int_0^T dt. \quad (4)$$

Dopuszczalne zbiory sterowań U_s i U_p wynikają z ograniczonych wartości maksymalnych wychyleń organów sterowych obu obiektów. Przy założeniu symetrii tych wychyleń, zbiory te można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} U_s^\theta &= \{u_s^\theta : |u_s^\theta| < u_{s \max}^\theta\}, \\ U_s^\psi &= \{u_s^\psi : |u_s^\psi| < u_{s \max}^\psi\}, \\ U_p^\theta &= \{u_p^\theta : |u_p^\theta| < u_{p \max}^\theta\}, \\ U_p^\psi &= \{u_p^\psi : |u_p^\psi| < u_{p \max}^\psi\}. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Synteza gry pościgowej

Aby zastosować teorię gier pościgowych, model ruchu OL (1) przedstawiono w postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu tzw. równań stanu:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= V_p [\cos x_8 \cos x_4 \cos(x_{10} - x_6) + \sin x_8 \sin x_4] - V_s - x_3 x_5 + x_2 x_7, \\ \dot{x}_2 &= V_p \cos x_8 \sin(x_{10} - x_6) - x_1 x_7, \\ \dot{x}_3 &= V_p [\cos x_8 \sin x_4 \cos(x_{10} - x_6) - \sin x_8 \cos x_4] + x_1 x_5, \\ \dot{x}_4 &= x_5, \\ \dot{x}_5 &= k_s^\theta u_1 - k_s^{\omega_y} x_5, \\ \dot{x}_6 &= x_7, \\ \dot{x}_7 &= k_s^\psi u_2 - k_s^{\omega_z} x_7, \\ \dot{x}_8 &= x_9, \\ \dot{x}_9 &= k_p^\theta u_3 - k_p^{\omega_y} x_9, \\ \dot{x}_{10} &= x_{11}, \\ \dot{x}_{11} &= k_p^\psi u_4 - k_p^{\omega_z} x_{11}, \end{aligned} \quad (6)$$

z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$, (6.1)

gdzie: $x^T = [x_j]_{j=1, \dots, 11} = (x, y, z, \Theta_s, \dot{\Theta}_s, \psi_s, \dot{\psi}_s, \Theta_p, \dot{\Theta}_p, \psi_p, \dot{\psi}_p)$ — wektor stanu,
 $u^T = [u_j]_{j=1, \dots, 4} = (u_s^\theta, u_s^\psi, u_p^\theta, u_p^\psi)$ — wektor sterowania.

W dalszym ciągu założono, że wszystkie zmienne stanu są mierzalne, czyli:

$$y_s = y_p = x, \quad (7)$$

gdzie: y_s — wektor obserwacji gracza S ,

y_p — wektor obserwacji gracza P .

W celu wyznaczenia optymalnych funkcji sterujących, wynikających z warunków koniecznych sformułowanych przez Pontriagina i jego współpracowników w [6] (rozwiniecie zasady maksimum), dla modelu growego (6) z funkcją kosztu (3) określono funkcję Hamiltonianu H . Ma ona w tym przypadku następującą postać:

$$\begin{aligned}
 H = & p_1 \{V_p [\cos x_8 \cos x_4 \cos(x_{10} - x_6) + \sin x_8 \sin x_4] - V_s - x_3 x_5 + x_2 x_7\} + \\
 & + p_2 [V_p \cos x_8 \sin(x_{10} - x_6) - x_1 x_7] + p_3 \{V_p [\cos x_8 \sin x_4 \cos(x_{10} - x_6) + \\
 & - \sin x_8 \cos x_4] + x_1 x_5\} + p_4 x_5 + p_5 (k_s^\theta u_1 - k_s^{\omega_s} x_5) + p_6 x_7 + \\
 & + p_7 (k_s^\psi u_2 - k_s^{\omega_z} x_7) + p_8 x_9 + p_9 (k_p^\theta u_3 - k_p^{\omega_r} x_9) + p_{10} x_{11} + \\
 & + p_{11} (k_p^\psi u_4 - k_p^{\omega_r} x_{11}) + 1,
 \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie: $p = [p_j]_{j=1, \dots, 11}$ — sprzężony wektor stanu.

Z zasady minimum, postaci Hamiltonianu (8) i ograniczeń (5) wynika, że sterowania optymalne w danej grze pościgowej (o ile istnieją) będą równe:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_1(t) = \hat{u}_s^\theta(t) &= -u_{s \max}^\theta \operatorname{sgn} p_5(t), \\
 \hat{u}_2(t) = \hat{u}_s^\psi(t) &= -u_{s \max}^\psi \operatorname{sgn} p_7(t), \\
 \hat{u}_3(t) = \hat{u}_p^\theta(t) &= u_{p \max}^\theta \operatorname{sgn} p_9(t), \\
 \hat{u}_4(t) = \hat{u}_p^\psi(t) &= u_{p \max}^\psi \operatorname{sgn} p_{11}(t).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Zmienne sprzężone stanu $p_j (j = 1, \dots, 11)$ mogą być wyznaczone z następującego układu równań różniczkowych (na podstawie tw. 1b w [2]):

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} = p_2 x_7 - p_3 x_5, \\
 \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_1 x_7, \\
 \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial z} = p_1 x_5, \\
 \dot{p}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial \Theta_s} = V_p \{p_1 [\cos x_8 \sin x_4 \cos(x_{10} - x_6) - \sin x_8 \cos x_4] + \\
 & - p_3 [\cos x_8 \cos x_4 \cos(x_{10} - x_6) + \sin x_8 \sin x_4]\}, \\
 \dot{p}_5 &= -\frac{\partial H}{\partial \dot{\Theta}_s} = p_1 x_3 - p_3 x_1 - p_4 + k_s^{\omega_s} p_5, \\
 \dot{p}_6 &= -\frac{\partial H}{\partial \psi_s} = -V_p [p_1 \cos x_8 \cos x_4 \sin(x_{10} - x_6) - p_2 \cos x_8 \cos(x_{10} - x_6) + \\
 & + p_3 \cos x_8 \sin x_4 \sin(x_{10} - x_6)], \\
 \dot{p}_7 &= -\frac{\partial H}{\partial \dot{\psi}_s} = -p_1 x_2 + p_2 x_1 - p_6 + k_s^{\omega_z} p_7, \\
 \dot{p}_8 &= -\frac{\partial H}{\partial \Theta_p} = V_p \{p_1 [\sin x_8 \cos x_4 \cos(x_{10} - x_6) - \sin x_4 \cos x_8] + \\
 & + p_2 \sin x_8 \sin(x_{10} - x_6) + p_3 [\sin x_8 \sin x_4 \cos(x_{10} - x_6) + \\
 & + \cos x_8 \cos x_4]\},
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$p_9 = -\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_p} = -p_8 + k_p^{\omega} p_9,$$

$$p_{10} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_p} = V_p [p_1 \cos x_8 \cos x_4 \sin(x_{10} - x_6) - p_2 \cos x_8 \cos(x_{10} - x_6) + p_3 \cos x_8 \sin x_4 \sin(x_{10} - x_6)],$$

$$p_{11} = -\frac{\partial H}{\partial \dot{\psi}_p} = -p_{10} + k_p^{\omega} p_{11}.$$

Biorąc pod uwagę, że:

a) czas końcowy T jest niustalony,

b) funkcja kosztu końcowego $q[\mathbf{x}(T)] = 0$,

c) stan końcowy $\mathbf{x}(T)$ leży na powierzchni kulistej opisanej równaniem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R_z^2 = 0$,

warunki brzegowe dla układu (10), zgodnie z [3], będą miały następującą postać:

$$\begin{aligned} p_1(T) &= -2d \cdot x_1(T), \\ p_2(T) &= -2d \cdot x_2(T), \\ p_3(T) &= -2d \cdot x_3(T), \\ p_j(T) &= 0, \quad j = 4, \dots, 11, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{gdzie: } d &= 0,5 \{ V_p [x_1(T) \cos x_8(T) \cos x_4(T) \cos x_r(T) + \\ &+ \sin x_8(T) \sin x_4(T) + x_2(T) \cos x_8(T) \sin x_r(T) + \\ &+ x_3(T) \cos x_8(T) \sin x_4(T) \cos x_r(T) - \sin x_8(T) \cos x_4(T)] + \\ &- V_s x_1(T) \}^{-1}, \end{aligned}$$

$$x_r(T) = x_{10}(T) - x_6(T).$$

Układy równań różniczkowych (6) i (10) z warunkami brzegowymi (6.1) i (11) oraz zależnościami (9) tworzą, dobrze znany w teorii sterowania, problem dwugraniczny. Rozwiązanie analityczne tego problemu jest możliwe tylko w bardzo prostych przypadkach. Z kolei klasyczne metody numeryczne, prezentowane m.in. w [3], pozwalają na badanie bardziej skomplikowanych modeli. Niemniej jednak, w przypadku silnie nieliniowych układów wielowymiarowych, podejście takie nie daje często pozytywnego rezultatu (metoda iteracyjna rozbieżna). Ponadto obliczenia są bardzo żmudne i czasochłonne.

W związku z powyższym, aby uzyskać chociaż przybliżone rozwiązanie przedstawionej gry pościgowej, zostanie zastosowana numeryczna metoda gier elementarnych, która została już wcześniej zaprezentowana w [1].

4. Model dyskretny gry pościgowej

Ponieważ metoda gier elementarnych wymaga dyskretyzacji modelu ciągłego ($dt \rightarrow \Delta t$), przedstawionego w poprzednim rozdziale, poniżej została podana postać dyskretna tego modelu (schemat całkowania równań różniczkowych oparto na metodzie Rungego-Kutty czwartego rzędu):

a) równanie stanu:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + (K_0 + 2 \cdot K_1 + 2 \cdot K_2 + K_3)/6, \quad k = 1, \dots, K, \quad (12.1)$$

gdzie: $K_0 = \Delta t f(x_k, u_k)$,

$$K_1 = \Delta t f(x_k + 0,5K_0, u_k),$$

$$K_2 = \Delta t f(x_k + 0,5K_1, u_k),$$

$$K_3 = \Delta t f(x_k + K_2, u_k),$$

$$f(x_k, u_k) = \begin{bmatrix} V_p(\cos x_{8,k} \cos x_{4,k} \cos x_{r,k} + \sin x_{8,k} \sin x_{4,k}) - V_s - x_{3,k} x_{5,k} + x_{2,k} x_{7,k} \\ V_p \cos x_{8,k} \sin x_{r,k} - x_{1,k} x_{7,k} \\ V_p(\cos x_{8,k} \sin x_{4,k} \cos x_{r,k} - \sin x_{8,k} \cos x_{4,k}) + x_{1,k} x_{5,k} \\ x_{5,k} \\ k_s^\theta u_{1,k} - k_s^{\omega y} x_{5,k} \\ x_{7,k} \\ k_s^\psi u_{2,k} - k_s^{\omega z} x_{7,k} \\ x_{9,k} \\ k_p^\theta u_{3,k} - k_p^{\omega y} x_{9,k} \\ x_{11,k} \\ k_p^\psi u_{4,k} - k_p^{\omega z} x_{11,k} \end{bmatrix},$$

b) równanie sprzężone stanu:

$$p_{k-1} = p_k - (L_0 + 2L_1 + 2L_2 + L_3)/6, \quad k = 1, \dots, K, \quad (12.2)$$

gdzie: $L_0 = \Delta t h(p_k, x_k, u_k)$,

$$L_1 = \Delta t h(p_k - 0,5L_0, x_{k-0,5}, u_k),$$

$$L_2 = \Delta t h(p_k - 0,5L_1, x_{k-0,5}, u_k),$$

$$L_3 = \Delta t h(p_k - L_2, x_{k-1}, u_k),$$

$$h(p_k, x_k, u_k) = \begin{bmatrix} p_{2,k} x_{7,k} - p_{3,k} x_{5,k} \\ -p_{1,k} x_{7,k} \\ p_{1,k} x_{5,k} \\ V_p [p_{1,k} (\cos x_{8,k} \sin x_{4,k} \cos x_{r,k} - \sin x_{8,k} \cos x_{4,k}) + \\ -p_{3,k} (\cos x_{8,k} \cos x_{4,k} \cos x_{r,k} + \sin x_{8,k} \sin x_{4,k})] \\ p_{1,k} x_{3,k} - p_{3,k} x_{1,k} - p_{4,k} + k_s p_{5,k} \\ -V_p [p_{1,k} \cos x_{8,k} \cos x_{4,k} \sin x_{r,k} - p_{2,k} \cos x_{8,k} \cos x_{r,k} + \\ + p_{3,k} \cos x_{8,k} \sin x_{4,k} \sin x_{r,k}] \\ -p_{1,k} x_{2,k} + p_{2,k} x_{1,k} - p_{6,k} + k_s^{\omega z} p_{7,k} \\ V_p [p_{1,k} (\sin x_{8,k} \cos x_{4,k} \cos x_{r,k} - \cos x_{8,k} \sin x_{4,k}) + \\ + p_{2,k} \sin x_{8,k} \sin x_{r,k} + p_{3,k} (\sin x_{8,k} \sin x_{4,k} \cos x_{r,k} + \\ + \cos x_{8,k} \cos x_{4,k})] \\ -p_{8,k} + k_p^{\omega y} p_{9,k} \\ V_p (p_{1,k} \cos x_{8,k} \cos x_{4,k} \sin x_{r,k} - p_{2,k} \cos x_{8,k} \cos x_{r,k} + \\ + p_{3,k} \cos x_{8,k} \sin x_{4,k} \sin x_{r,k})' \\ -p_{10,k} + k_p^{\omega z} p_{11,k} \end{bmatrix}$$

$$x_{r,k} = x_{10,k} - x_{6,k},$$

c) warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}x_0^T &= (x_0, y_0, z_0, \Theta_0^s, \dot{\Theta}_0^s, \psi_0^s, \dot{\psi}_0^s, \Theta_0^p, \dot{\Theta}_0^p, \psi_0^p, \dot{\psi}_0^p), \\p_{1,K} &= -2d \cdot x_{1,K}, \quad p_{2,K} = -2d \cdot x_{2,K}, \\p_{3,K} &= -2d \cdot x_{3,K}, \quad p_{j,K} = 0, j = 4, \dots, 11,\end{aligned}\tag{12.3}$$

gdzie: $d = 0,5 \{V_p[x_{1,K}(\cos x_{8,K} \cos x_{4,K} \cos x_{r,K} + \sin x_{8,K} \sin x_{4,K}) + x_{2,K} \cos x_{8,K} \sin x_{r,K} + x_{3,K}(\cos x_{8,K} \sin x_{4,K} \cos x_{r,K} + \sin x_{8,K} \cos x_{4,K}) - V_s x_{1,K}]^{-1}$,

d) sterowania optymalne:

$$\begin{aligned}u_{1,k} &= u_{s,k}^{\Theta} = -u_{s \max}^{\Theta} \operatorname{sgn} p_{5,k-1}, \\u_{2,k} &= u_{s,k}^{\psi} = -u_{s \max}^{\psi} \operatorname{sgn} p_{7,k-1}, \\u_{3,k} &= u_{p,k}^{\Theta} = u_{p \max}^{\Theta} \operatorname{sgn} p_{9,k-1}, \\u_{4,k} &= u_{p,k}^{\psi} = u_{p \max}^{\psi} \operatorname{sgn} p_{11,k-1}.\end{aligned}\tag{12.4}$$

Z (12.4) wynika, że sterowania optymalne są typu bang-bang i w dalszym ciągu przyjęto założenie, że są one realizowalne technicznie.

W metodzie gier elementarnych wyznaczenie strategii optymalnej dla całej gry pościągowej polega na sekwencyjnym wyznaczaniu strategii dla kolejnych gier elementarnych, których czas trwania jest równy krokowi dyskretyzacji Δt lub jego wielokrotności ($\Delta t_{ge} = L \Delta t$, $L = 1, 2$ itp.). Globalna funkcja kosztu będzie równa:

$$J = \sum_{i=1}^N J_i,\tag{13}$$

gdzie J_i jest zmodyfikowaną funkcją kosztu w i -tej grze elementarnej o postaci:

$$J_i[x(T_i)] = \sqrt{x_1^2(T_i) + x_2^2(T_i) + x_3^2(T_i)}, \quad i = 1, \dots, N,\tag{14}$$

gdzie: $T_i = i \Delta t_{ge} = i L \Delta t$.

Funkcja (14) odpowiada odległości między graczami w końcu i -tej gry elementarnej i według autora jest ona najbardziej zbliżona do funkcji kosztu (3). Zmiana funkcji kosztu pociąga za sobą odpowiednią zmianę warunków końcowych gry. Dla i -tej gry elementarnej będą one miały obecnie następującą postać:

$$\begin{aligned}p_1(T_i) &= \frac{x_1(T_i)}{D_i(T_i)}, \quad x(T_{i-1}) = x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N, \\p_2(T_i) &= \frac{x_2(T_i)}{D_i(T_i)}, \\p_3(T_i) &= \frac{x_3(T_i)}{D_i(T_i)}, \quad p_j(T_i) = 0, \quad j = 4, \dots, 11,\end{aligned}\tag{15}$$

gdzie: $D_i(T_i) = \sqrt{x_1^2(T_i) + x_2^2(T_i) + x_3^2(T_i)}$.

5. Badania symulacyjne modelu gry pościgowej

Do badań symulacyjnych przyjęto model dyskretny gry pościgowej podany w rozdziale 4. Sporządzono schematy blokowe algorytmów programu głównego oraz procedur obliczających wartości funkcji prawych stron układów równań różniczkowych (12.1) i (12.2). Schemat działania programu oparto na algorytmie, którego opis podano już wcześniej w [1].

W celu porównania charakterystyk pościgowych, eksperymenty symulacyjne przeprowadzono dla różnych wartości:

- stosunku prędkości obu obiektów-graczy $k_v = V_s/V_p$ ($k_v = 1, 1, 1,2$ oraz $1,5$ przy $V_p = 200$ m/s),
- stosunku współczynników efektywności sterowania w kanale pochylenia $\gamma_p = k_p^\theta/k_s^\theta$ i kierunku $\gamma_k = k_p^\psi/k_s^\psi$ ($\gamma_p = \gamma_k = 1,2; 1,0$ i $0,8$ przy $k_s^\theta = 2,0$ s⁻² i $k_s^\psi = 4,0$ s⁻²),
- przedziału gry elementarnej Δt_{ge} ($\Delta t_{ge} = 0,02$ s; $0,04$ s i $0,08$ s).

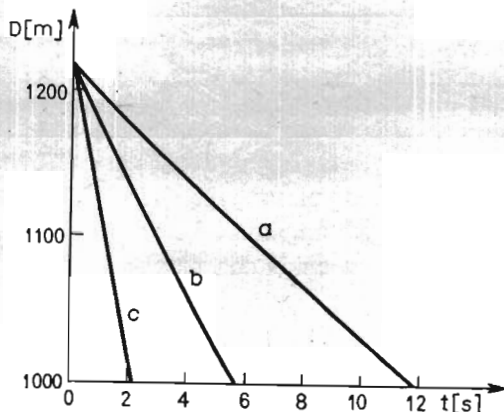
We wszystkich eksperymentach symulacyjnych przyjęto ten sam początkowy wektor stanu \mathbf{x}_0 ($x_{10} = 1200$ m, $x_{20} = 200$ m, $x_{j0} = 0$, $j = 3, \dots, 11$), promień powierzchni docelowej $R_z = 1000$ m, czas maksymalny $T_{max} = 100$ s oraz maksymalne wychylenie powierzchni sterowych $u_{jmax} = 0,5$ rad ($j = 1, \dots, 4$). Ponadto przeprowadzono symulację cyfrową modelu growego dla dwóch innych stanów początkowych:

- $\mathbf{x}_0^T = (1200, 0, 200, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$,
- $\mathbf{x}_0^T = (1200; 0; 0; 0; 0,2; 0; 0; 0; 0,3; 0; 0,5; 0)$.

Podczas modelowania cyfrowego obserwowano m.in. przebiegi czasowe takich wielkości jak:

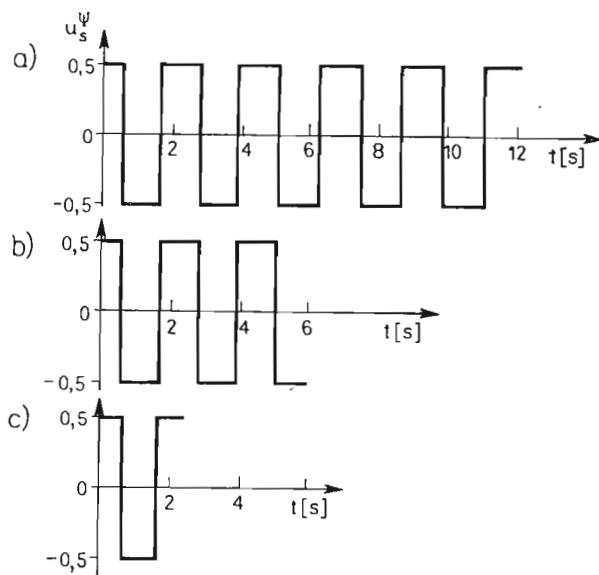
- sterowania (strategie) obu graczy ($u_j(t)$, $j = 1, \dots, 4$),
- odległość między graczami $D(t)$,
- względny kąt kursu $\psi(t)$.

Uzyskano również przestrzenne trajektorie pościgowe w układzie $Oxyz$, które zrzutowano następnie na płaszczyzny (x, y) i (y, z) . Wybrane charakterystyki pościgowe zostały zilustrowane na rys. 2 ÷ 5.



Rys. 2. Przebieg funkcji odległości między graczami $D(t)$ dla różnych wartości k_v :

- $k_v = 1,1$
- $k_v = 1,2$
- $k_v = 1,5$



Rys. 3. Przebieg funkcji sterującej u_s^{ψ} dla różnych wartości k_v : a) $k_v = 1,1$ b) $k_v = 1,2$ c) $k_v = 1,5$

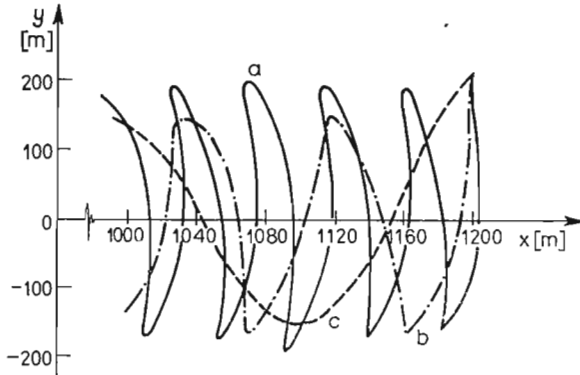
Poniżej podano najistotniejsze wnioski, które sformułowano na podstawie wyników badań symulacyjnych:

1. Funkcje odległości między graczami $D(t)$ mogą być aproksymowane funkcjami linio- wymi, których nachylenie rośnie wraz ze wzrostem współczynnika k_v (rys. 2). Poszcze- gólnym wartościom k_v odpowiadają względne prędkości zbliżania $D(t)$ oraz czasy zakończenia gry T , które podano w poniższej tabeli 1.

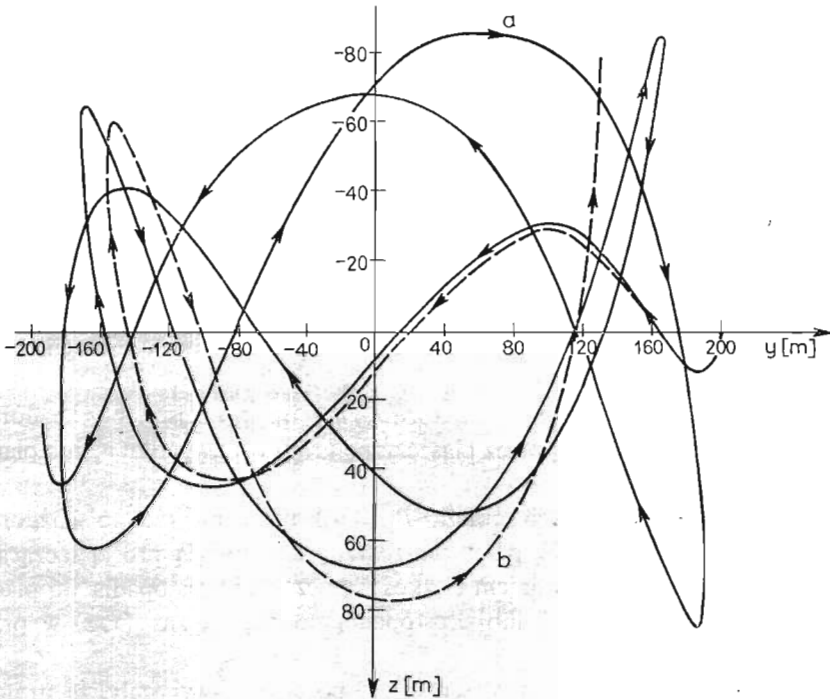
Tabela 1.

L_p	k_v	$D(t)$ [m/s]	T [s]
1	1,1	18	11,76
2	1,2	38	5,58
3	1,5	100	2,17

2. Rzuty trajektorii pościgowych na płaszczyznę (x, y) posiadają charakter krzywych oscylujących wokół osi $0x$, których amplituda i częstotliwość maleją wraz ze wzrostem wartości k_v (rys. 4). Maksymalna amplituda oscylacji nie przekracza wartości $|y| = 200$ m.
3. Rzuty trajektorii pościgowych na płaszczyznę (y, z) posiadają charakter nieregularnych krzywych oscylujących wokół osi $0x$ i nie wykraczających poza obszar ograniczony promieniem $R = 250$ m (rys. 5).
4. Zmiana stosunku prędkości k_v praktycznie nie wpływa na częstotliwość przełączania wszystkich funkcji sterujących.



Rys. 4. Rzuty trajektorii pościgowych na płaszczyznę (x, y) dla różnych wartości k_v : a) $k_v = 1,1$ (—) b) $k_v = 1,2$ (---) c) $k_v = 1,5$ (- · -)



Rys. 5. Rzuty trajektorii pościgowych na płaszczyznę (y, z) dla różnych wartości k_v : a) $k_v = 1,1$ b) $k_v = 1,5$

5. Czas przełączania t_p dla poszczególnych sterowań wynosi około:

- a) 0,5 s dla u_s^o ,
- b) 1,2 s dla u_s^p ,
- c) 0,1 s dla u_p^o ,
- d) od 1 s do 0,1 s dla u_p^p .

6. Przebieg względnego kąta kursu $\psi(t)$ charakteryzuje się nietłumionymi oscylacjami,

których amplituda i okres (poza pierwszym wahnieniem) są w przybliżeniu stałe. Na amplitudę tych oscylacji ma wpływ wartość współczynników γ_p i γ_k .

7. Długość przedziału gry elementarnej Δt_{ge} ma istotny wpływ na:
 - a) przebieg rzutu trajektorii pościgowej na płaszczyznę (y, z) w ten sposób, że im większa jest jego wartość tym trajektoria oscyluje bliżej płaszczyzny (x, y) ,
 - b) częstotliwość przełączania funkcji sterującej u_s^o (wychylenie steru poziomego gracza S), rośnie wraz ze wzrostem Δt_{ge} .
8. Zmiana stanu początkowego gry x_0 wpływa w istotny sposób na:
 - a) przebieg wszystkich funkcji sterujących, w szczególności zaś na ich czas przełączania t_p ,
 - b) charakter oscylacji funkcji $\psi(t)$, aż do uzyskania przebiegu tłumionego włącznie,
 - c) kształt rzutów trajektorii pościgowych zarówno na płaszczyznę (x, y) , jak i na płaszczyznę (y, z) .

6. Uwagi końcowe

Porównanie charakterystyk płaskiej gry pościgowej [1] z charakterystykami otrzymanymi w niniejszej pracy wskazuje zarówno na wiele cech wspólnych jakie łączy te dwa procesy, jak również na istotne różnice wynikające z uwzględnienia przestrzennego modelu ruchu obu graczy. Na podobieństwo obu procesów wskazuje:

- a) ten sam kształt rzutów trajektorii pościgowych na płaszczyznę (x, y) przy odpowiadających sobie warunkach początkowych gry,
- b) ten sam przebieg funkcji sterujących u_s (gra płaska) i u_s^p (gra przestrzenna),
- c) ten sam liniowy charakter funkcji $D(t)$.

Na podstawie analizy uzyskanych charakterystyk growych oraz analogii do płaskiej gry pościgowej można stwierdzić, że:

- a) przełączenia funkcji sterujących gracza $S(u_s^o, u_s^p)$ mają miejsce po każdorazowym przejściu trajektorii pościgowej przez płaszczyznę (x, y) w przypadku u_s^o lub płaszczyznę (x, z) w przypadku u_s^p ,
- b) przełączenia funkcji sterujących gracza $P(u_p^o, u_p^p)$ mają miejsce po każdorazowym przejściu wektora prędkości V_p przez płaszczyznę zawierającą prostą łączącą środek układu współrzędnych 0 ze środkiem ciężkości gracza P i prostopadłą do płaszczyzny (x, y) , w przypadku funkcji u_p^o lub prostopadłą do płaszczyzny (x, z) w przypadku funkcji u_p^p .

Badania symulacyjne modelu przestrzennej gry pościgowej wykazały, że strategie obu graczy wyznaczone przy pomocy metody gier elementarnych, przybliżają w stopniu zadowalającym strategię punktu siodłowego. Fakt ten, przy znakomitym uproszczeniu procesu obliczeniowego, uzasadnia celowość zastosowania wspomnianej metody w rozważanej klasie gier pościgowych.

W dalszym etapie przewiduje się rozwiązanie gry pościgowej dwóch samolotów, w której uwzględnione zostaną pełne równania ruchu wymienionych obiektów latających, jak i dynamika sterowych serwo mechanizmów wykonawczych oraz ograniczenia konstrukcyjne i pilotażowe.

Literatura

1. J. GAŁAJ, J. MARYNIAK, *Synteza growego systemu naprowadzania samolotu na samolot-cel w płaszczyźnie podłużnej metodą gier elementarnych*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, z. 1/2, t. 25, s. 215 - 226, 1987
2. J. GAŁAJ, *Numeryczna synteza gry pościgowej dwóch obiektów manewrujących-walka powietrzna w systemie symulatora*, Sprawozdanie DOR 163/87-S, Warszawa 1987
3. D. E. KIRK, *Optimal control theory. An Introduction*, Prentice Hall, 1970
4. C. HILBERG, B. S. A. JARMARK, *On pursuit-evasion between two realistic aircraft*, SAAB Technical Notes, SAAB TN Ae 75, 1983
5. B. JARMARK, *An optimal missile duel on nonshort range*, SAAB Technical Notes, SAAB Tn Ae 74, 1983
6. L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTYANSKII, R. GAMKRELIDZE, E. MISHENKO, *The mathematical theory of optical processes*, Interscience Publishers, New York 1962

Резюме

РЕШЕНИЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДВУХ ЛЕТАЮЩИХ АППАРАТОВ
В ПРОСТРАНСТВЕ

В работе представлено решение проблемы игрового управления в процессе пространственного преследования двух летающих аппаратов. Для принятой модели игровой системы выведено конечные условия существования оптимального управления. Цифровую симуляцию модели игровой системы проведено на основе алгоритма использующего методу элементарных игр. Полученные результаты обосновывают целесообразность применения метода, которой значительно упрощает игровую проблему по сравнению с классическими методами.

Summary

NUMERICAL SOLUTION OF PURSUIT EVASION GAME OF
TWO FLYING OBJECTS

In the paper pursuit-evasion game of two flying objects has been solved numerically. For a given three-dimensional model of motion, necessary conditions for the existence of optimal controls were determined. The digital simulation of a discrete game model has been performed by means of the elementary games method. The influence of different parameters (eg. the relation of objects speeds) on game characteristics obtained during simulation experiments was analyzed. We are able to draw the general conclusion that the applied method is useful for a solution of the game systems considered here.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 października 1988 roku.
