

## JEDNORÓWNANIOWY MODEL TURBULENTNEJ STRUGI OSIOWOSYMETRYCZNEJ\*

ANDRZEJ BOGUSŁAWSKI

Politechnika Częstochowska

W pracy przedstawiono próbę zastosowania jednorównaniowego modelu Prandtla-Kołmogorowa do analizy swobodnej strugi kołowej. Zaprezentowane rezultaty dowodzą, iż model energii w swej klasycznej postaci prowadzić może do prawidłowych wyników dotyczących pola wielkości średnich, natomiast w odniesieniu do wielkości określających mechanizm transportu kinetycznej energii turbulencji obserwuje się znaczne rozbieżności z danymi eksperymentalnymi. Zaproponowana w pracy próba modyfikacji modelu, polegająca na wprowadzeniu funkcyjnej zależności współczynnika dysypacji  $c_D$  od współrzędnych przestrzennych pola przepływu, prowadzi do poprawy jakości modelu, wyrażającej się w stosunkowo dobrej zgodności z danymi eksperymentalnymi.

### Oznaczenia

$c_\mu$  — stała modelu jednorównaniowego

$c_D$  — współczynnik dysypacji modelu jednorównaniowego

$$\bar{D}_{ij} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \text{ — tensor prędkości deformacji}$$

$D$  — średnica wylotowego przekroju dyszy

$E$  — indeks oznaczający zewnętrzny brzeg obszaru obliczeniowego

$I$  — indeks oznaczający wewnętrzny brzeg obszaru obliczeniowego

$k$  — kinetyczna energia turbulencji

$l$  — charakterystyczna skala liniowa

$\dot{m}''$  — jednostkowy strumień masy transportowanej w kierunku współrzędnej  $\omega$

$p$  — ciśnienie

$\bar{U}, u$  — prędkość średnia, fluktuacyjna składowa prędkości

$\bar{U}_{xm}, \bar{U}_{x0}$  — prędkość średnia w osi strugi, prędkość średnia w przekroju wylotowym dyszy

$r_{1/2} = r(\bar{U}_x = 0,5 \bar{U}_{xm})$  — połowkowa szerokość strugi

\* Praca wyróżniona drugą nagrodą w Konkursie na najlepszą pracę z mechaniki płynów, Częstochowa 1988

- Re — liczba Reynoldsa  
 $x_i$  — współrzędne układu prostokątnego  
 $x, r$  — współrzędne układu cylindrycznego  
 $\Gamma_{eff}$  — efektywny współczynnik dyfuzji  
 $\delta$  — połowa szerokości strugi  
 $\delta_{ij}$  — symbol Kroneckera  
 $\varepsilon$  — dysypacja kinetycznej energii turbulencji  
 $\eta = r/x$  — współrzędna bezwymiarowa  
 $\lambda, \lambda_{1/2}$  — współczynniki skali liniowej  
 $\nu, \nu_T, \nu_{eff}$  — kinematyczny współczynnik lepkości, współczynnik lepkości turbulentnej, efektywny współczynnik lepkości  
 $\psi$  — funkcja prądu  
 $\varrho$  — gęstość  
 $\sigma_\phi, \sigma_k$  — liczba Prandtla dla dowolnej zmiennej zależnej, liczba Prandtla dla kinetycznej energii turbulencji  
 $\Phi$  — dowolna zmienna zależna  
 $\omega$  — bezwymiarowa funkcja prądu  
 (—) — symbol uśredniania czasowego; oznaczenie wielkości średniej.

## 1. Wprowadzenie

Z przeglądu literatury dotyczącej zagadnień modelowania przepływów turbulentnych wynika, iż jednorównaniowy model Prandtla-Kołmogorowa nie wykazuje znaczącej przewagi nad najprostszym modelem algebraicznym, jakim jest hipoteza drogi mieszania. Wydaje się jednak, że opinia ta, usprawiedliwiona dla przypadku przepływów przyścienne, gdzie mamy do czynienia z turbulencją równowagową, nie znajduje potwierdzenia w odniesieniu do przepływów swobodnych, w których ze względu na brak równowagi produkcji i dysypacji, można oczekiwać szczególnych korzyści wynikających z uwzględnienia procesu transportu kinetycznej energii turbulencji. Należy więc sądzić, że szereg istotnych informacji dotyczących jakości modelu oraz możliwości jej poprawy można uzyskać poprzez analizę nie tylko pola wielkości średnich, lecz przede wszystkim prawidłowości określenia poszczególnych składników równania transportu kinetycznej energii turbulencji. Prezentowana praca stanowi próbę dostosowania jednorównaniowego modelu Prandtla-Kołmogorowa do analizy turbulentnej strugi osiowo-symetrycznej.

## 2. Jednorównaniowy model turbulencji—stałe modelu

Jednorównaniowy model Prandtla-Kołmogorowa wiąże współczynnik lepkości turbulentnej z kinetyczną energią turbulencji zgodnie z formułą:

$$\nu_T = c_\mu l \sqrt{k} \quad (1)$$

Określenie wartości współczynnika lepkości turbulentnej wymaga rozwiązania równania transportu kinetycznej energii turbulencji, którego pełna postać przedstawia się następująco [1]:

$$\frac{\overline{Dk}}{Dt} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\overline{u_i u_i u_j}}{\rho} + \frac{\overline{p u_i}}{\rho} \right)}_2 = \underbrace{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}}_3 - \underbrace{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_4, \quad (2)$$

gdzie:

$$\frac{\overline{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \text{ pochodna substancjalna,}$$

- 1 — konwekcja kinetycznej energii turbulencji,
- 2 — dyfuzja kinetycznej energii turbulencji,
- 3 — produkcja kinetycznej energii turbulencji,
- 4 — dysypacja kinetycznej energii turbulencji.

Ze względu na obecność nieznanymi korelacji człon dyfuzyjny oraz dysypacja muszą podlegać odpowiedniemu modelowaniu. Równanie transportu kinetycznej energii turbulencji zamodelowane w konwencjonalny sposób [1, 2] posiada następującą postać:

$$\frac{\overline{Dk}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_{eff}}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \left( \nu_T \overline{D_{ij}} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - c_D \frac{k^{3/2}}{l}. \quad (3)$$

Z przedstawionych związków wynika, że zastosowanie jednorównaniowego modelu turbulencji wymaga eksperymentalnego określenia czterech wielkości: efektywnej liczby Prandtla, charakterystycznej skali liniowej oraz dwóch stałych modelu  $c_\mu$  i  $c_D$ .

Istotnej informacji umożliwiającej wstępne oszacowanie stałych modelu dostarcza analiza przepływów przyściennych, w których obserwuje się przybliżoną równowagę produkcji i dysypacji energii turbulencji, co dla przypadku płaskiego przepływu ustalonego można wyrazić związkiem:

$$-\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} = c_D \frac{k^{3/2}}{l}. \quad (4)$$

Podstawienie do wyrażenia (4) formuły Prandtla-Kołmogorowa (1) prowadzi do zależności:

$$c_\mu c_D = \left( \frac{\overline{u_1 u_2}}{k} \right)^2. \quad (5)$$

Badania eksperymentalne dowodzą, że w znacznym obszarze turbulentnej warstwy przyściennej naprężenia Reynoldsa są wprost proporcjonalne do kinetycznej energii turbulencji, ze współczynnikiem proporcjonalności wynoszącym ok. 0.3 [2, 3]. Wynika stąd, że stałe modelu jednorównaniowego spełniać winny warunek:

$$c_\mu \cdot c_D \cong 0,09. \quad (6)$$

Skala długości określana jest w sposób algebraiczny w oparciu o zależności:

$$l = \lambda \cdot \delta \quad \text{lub} \quad l = \lambda_{1/2} \cdot r_{1/2}. \quad (7)$$

### 3. Numeryczna analiza układu równań transportu

Równania transportu pędu oraz kinetycznej energii turbulencji, przy założeniu stacjonarnego charakteru przepływu, posiadają w cylindrycznym układzie współrzędnych następującą postać:

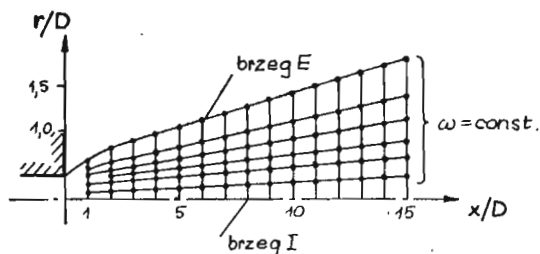
$$\bar{U}_x \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \bar{U}_r \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v_{eff} \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\bar{U}_x \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{U}_r \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{v_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) = c_\mu k^{1/2} \cdot l \left( \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right)^2 - c_D \frac{\kappa^{3/2}}{l}. \quad (9)$$

Powyższy układ równań rozwiązany został metodą Patankara-Spaldinga [5, 9] przy zastosowaniu ogólnego programu obliczeniowego przeznaczonego do analizy dwuwymiarowych zagadnień ciepłno — przepływowych typu parabolicznego, noszącego nazwę GENMIX. Zgodnie z tą metodą równania transportu wyrażone są w krzywoliniowym układzie współrzędnych  $x \sim \omega$ , opartym na bezwymiarowej funkcji prądu  $\omega$ , zdefiniowanej następująco:

$$\omega = \frac{\Psi - \Psi_I}{\Psi_E - \Psi_I}. \quad (10)$$

Tego typu układ współrzędnych pozwala na wprowadzenie siatki punktów węzłowych pokrywającej jedynie tę strefę przepływu, która istotna jest ze względu na zachodzące w niej procesy transportu masy, energii i pędu. Na rys. 1 przedstawiono siatkę punktów



Rys. 1. Siatka punktów węzłowych dla strugi kołowej

węzłowych we współrzędnych Patankara-Spaldinga dla strugi kołowej. Równania transportu zapisane we współrzędnych  $x \sim \omega$  przyjmują następującą ogólną postać:

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (a + b\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \omega} \left( c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)}_2 + \underbrace{d}_3, \quad (11)$$

gdzie:

- 1 — konwekcja,
- 2 — dyfuzja,
- 3 — człon źródłowy zależny od charakteru analizowanej wielkości  $\Phi$  (gradient ciśnienia w równaniu transportu pędu, różnica produkcji i dysypacji w równaniu transportu kinetycznej energii turbulencji).

Współczynniki  $a, b$  i  $c$  ogólnego równania transportu (11) zdefiniowane są następująco:

$$\begin{cases} a = r_I \dot{m}'_I / (\Psi_E - \Psi_I), \\ b = (r_E \dot{m}''_E - r_I \dot{m}'_I) / (\Psi_E - \Psi_I), \\ c = r^2 \rho \bar{U}_x \Gamma_{eff} / (\Psi_E - \Psi_I)^2, \end{cases} \quad (12)$$

gdzie:

$$\Gamma_{eff} = \frac{\rho \nu_{eff}}{\sigma_\phi}.$$

Równanie (11), zgodnie z metodą Patankara-Spaldinga, doprowadzone jest do postaci różnicowej na drodze całkowania w skończonej objętości kontrolnej [6], a uzyskany w ten sposób układ liniowych równań algebraicznych rozwiązany zostaje metodą TDMA (Tri-diagonal Matrix Algorithm).

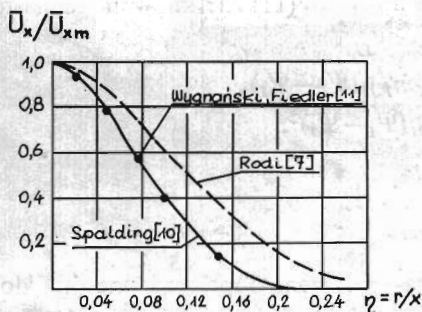
#### 4. Zastosowanie konwencjonalnej postaci modelu Prandtla-Kolmogorowa — porównanie z danymi eksperymentalnymi

Przedstawiony model został zastosowany do analizy swobodnej strugi kołowej wypływającej do nieruchomego ośrodka, przy liczbie  $Re = \bar{U}_{x0} D / \nu = 40\,000$ . Obliczenia w pierwszym rzędzie obejmowały obszar rozwiniętego przepływu turbulentnego, w którym osiągnięte zostały warunki samopodobieństwa. Zastosowano dwa zestawy stałych modelu przedstawione w tab. 1. Rezultaty obliczeń porównano następnie z badaniami eksperymentalnymi przedstawionymi w pracy Wygnańskiego i Fiedlera [11].

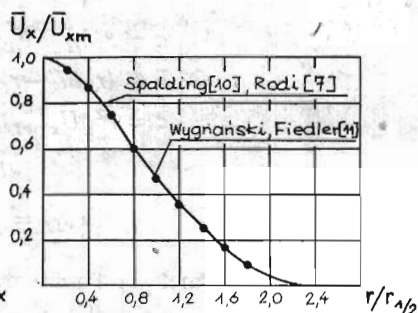
Tabela 1.

	$c_\mu$	$c_D$	$\lambda$	$\lambda_{1/2}$	$\sigma_k$
Rodi [7]	1.0	0.09		0.125	1.0
Spalding [10]	0.5477	0.1633	0.075		1.0

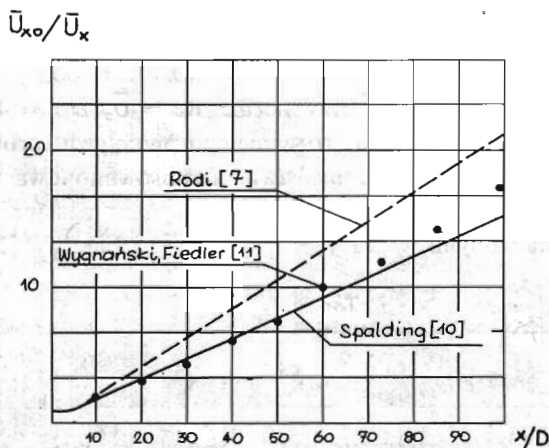
**4.1. Pole prędkości średniej.** Na rys. 2 przedstawiono poprzeczne rozkłady prędkości średniej dla zestawów stałych wg Spaldinga [10] i Rodiego [7]. Istotne rozbieżności wyników obliczeń oraz danych eksperymentalnych zanotowano w przypadku zestawu stałych proponowanych przez Rodiego. Okazuje się jednak, że dane te również pozwalają prawidłowo określić kształt samopodobnego profilu prędkości średniej, jeśli tylko jak na rys. 3 za skalę długości przyjęta zostanie lokalna wartość promienia połowkowego. Wynika stąd wniosek, że stałe zaproponowane w pracy [7] prowadzą do nieprawidłowego określenia prędkości rozprzestrzeniania się strugi, zdefiniowanej jako  $dr_{1/2}/dx$ . W konsekwencji znaczne rozbieżności dotyczą również rozkładu prędkości wzdłuż osi strugi, co przedstawiono na rys. 4. Prędkość rozprzestrzeniania się strugi odpowiadająca stałym Spaldinga wynosi około 0.084, co stanowi dobre przybliżenie danych eksperymentalnych, dla których  $dr_{1/2}/dx = 0.087$  [11].



Rys. 2. Profile składowej osiowej prędkości średniej w obszarze samopodobnym (skala długości — odległość od wylotu dyszy)



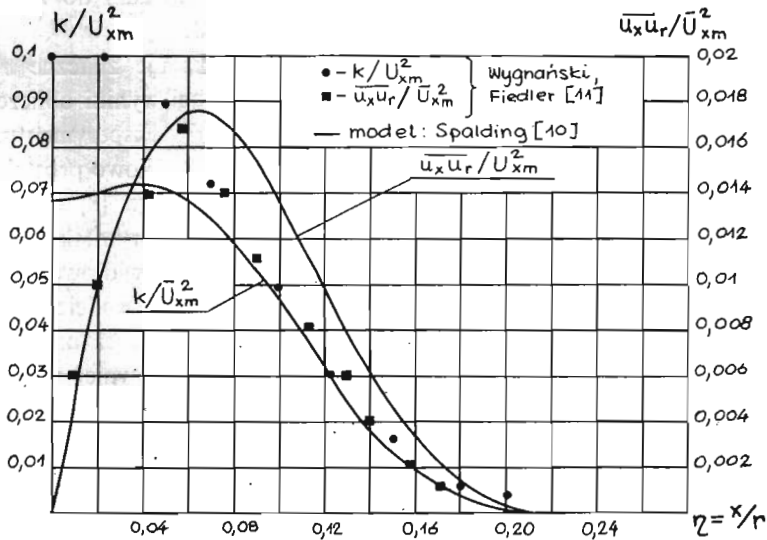
Rys. 3. Profile składowej osiowej prędkości średniej w obszarze samopodobnym (skala długości — promień połowkowy)



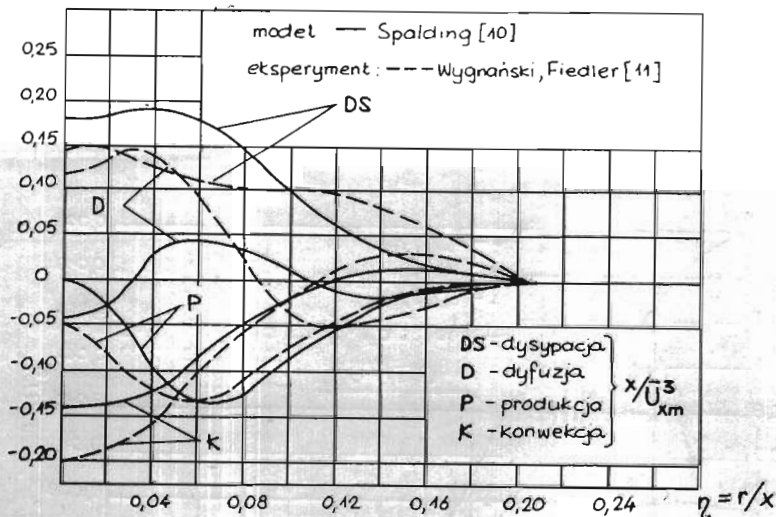
Rys. 4. Rozkład prędkości wzdłuż osi strugi

**4.2. Struktura turbulencji.** Przeprowadzone w pracy obliczenia obejmowały również wielkości określające strukturę turbulencji. Stosując zestaw stałych zaproponowany przez Spaldinga [10], otrzymano stosunkowo dokładne przybliżenie rozkładu naprężeń Reynoldsa (rys. 5), dające w konsekwencji dobre rezultaty obliczeń pola prędkości średniej. Na rys. 5 przedstawiono również rozkład kinetycznej energii turbulencji w poprzecznym przekroju strugi. Rezultaty obliczeń są zaniżone w wewnętrznym obszarze strugi, natomiast w obszarze zewnętrznym dość dobrze odpowiadają badaniom doświadczalnym.

Zanotowane rozbieżności wyjaśnić można analizując wyniki obliczeń dotyczące poszczególnych składników równania transportu kinetycznej energii turbulencji (rys. 6). Stosunkowo dobrą zgodność jakościową jak i ilościową otrzymano w przypadku członów produkcyjnego i konwekcyjnego. Zaniżona wartość członu produkcyjnego w bezpośrednim sąsiedztwie osi strugi wynika najprawdopodobniej z pominięcia w obliczeniach składnika związanego z osiowym gradientem prędkości średniej, który może w tym obszarze przyjmować stosunkowo dużą wartość.



Rys. 5. Profile kinetycznej energii turbulencji oraz turbulentnych naprężeń stycznych w obszarze samopodobnym



Rys. 6. Bilans kinetycznej energii turbulencji w obszarze samopodobnym

Przebieg krzywej odpowiadającej zmianom członu dyfuzyjnego wykazuje jedynie jakościowe podobieństwo. Wartość dyfuzji w wewnętrznym obszarze strugi jest zbyt niska, natomiast w zewnętrznym zbyt wysoka w stosunku do wyniku eksperymentu. Tak duże rozbieżności obliczeń i danych doświadczalnych dotyczące członu dyfuzyjnego sugerować mogą, że poprawy możliwości modelu puszukiwać należy poprzez odpowiedni dobór efektywnej liczby Prandtla. Przeprowadzone próby nie potwierdzają jednak tego przy-

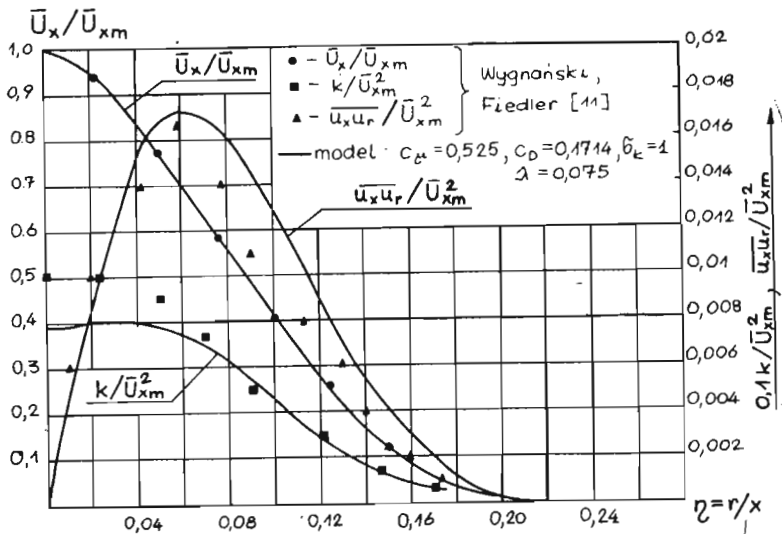
puszczenia, ponieważ zmiana wartości liczby Prandtla nie prowadzi do zasadniczej poprawy jakości klasycznej postaci modelu jednorównaniowego.

Podobnie jak człon dyfuzyjny, również dysypacja wykazuje znaczne rozbieżności z danymi eksperymentalnymi. W wewnętrznym obszarze strugi wyniki obliczeń są zawyżone, natomiast na zewnątrz zaniżone w stosunku do wyników eksperymentu. Przyczyny niedokładnej oceny wartości dysypacji można upatrywać w stosunkowo prostej, algebraicznej metodzie określania skali długości. Praca Rodiego i Spaldinga [8] dowodzi jednak, że zastosowanie dwurównaniowego modelu  $k-k_l$ , zgodnie z którym skala długości jest wyznaczana z równania transportu, nie prowadzi do bardziej prawidłowego oszacowania wartości dysypacji. Należy więc przypuszczać, że wiarygodność modelu ze względu na poprawność określenia wartości dysypacji można zwiększyć poprzez uzależnienie parametru  $c_D$  od współrzędnych przestrzennych pola przepływu, co również zostało zaproponowane w pracy [8].

### 5. Próba optymalnego modelowania poszczególnych składników równania transportu kinetycznej energii turbulencji

W prezentowanej pracy podjęto kilka prób modyfikacji jednorównaniowego modelu Prandtla-Kołmogorowa, mających na celu nie tylko prawidłowe wyznaczenie pola prędkości średniej, lecz również zgodne z danymi eksperymentalnymi oszacowanie wielkości charakteryzujących strukturę turbulencji przyływu.

**5.1. Modyfikacja członu produkcyjnego.** Przedstawione powyżej rezultaty otrzymane przy zastosowaniu danych Spaldinga charakteryzują się zaniżoną wartością członu produkcyjnego w otoczeniu osi strugi, przy jednoczesnym niedoborze poziomu kinetycznej energii



Rys. 7. Profile składowej osiowej prędkości średniej kinetycznej energii turbulencji oraz turbulentnych naprężeń stycznych w obszarze samopodobnym (rozbudowany człon produkcyjny)



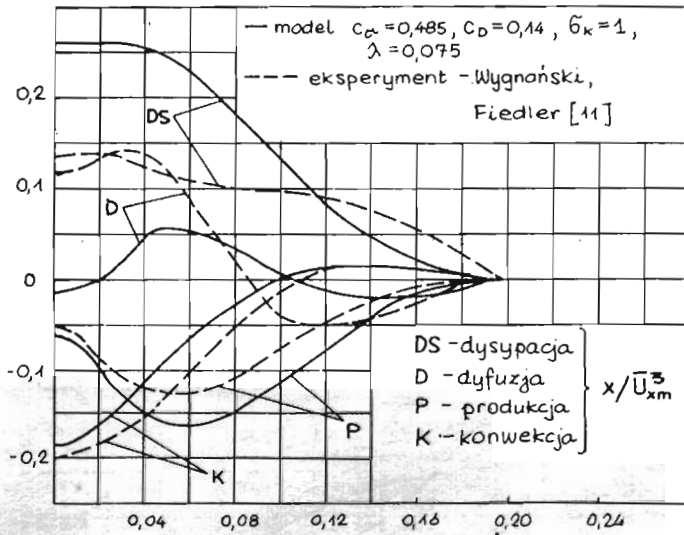
turbulencji w tym obszarze. Można przypuszczać, że rozbieżności te można wyeliminować poprzez uwzględnienie tych składników członu produkcyjnego, które związane są z osiowym gradientem prędkości średniej. Uwzględnienie w obliczeniach tych składników prowadzi do następującej postaci członu produkcyjnego:

$$P = \nu_T \left[ \left( \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} k \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1}, \quad (13)$$

która po podstawieniu formuły Prandtla-Kołmogorowa (1) przyjmuje formę:

$$P = c_\mu k^{1/2} \cdot l \left[ \left( \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} k \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1}. \quad (14)$$

Na rys. 7 i 8 przedstawione zostały rezultaty obliczeń po wprowadzeniu powyższej modyfikacji. Uwzględnienie nowych składników członu produkcyjnego spowodowało koniecz-

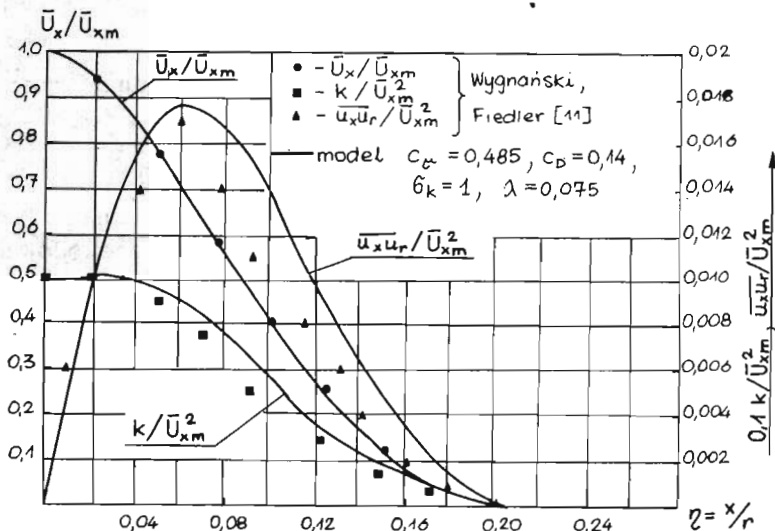


Rys. 8. Bilans kinetycznej energii turbulencji w obszarze samopodobnym (rozbudowany człon produkcyjny)

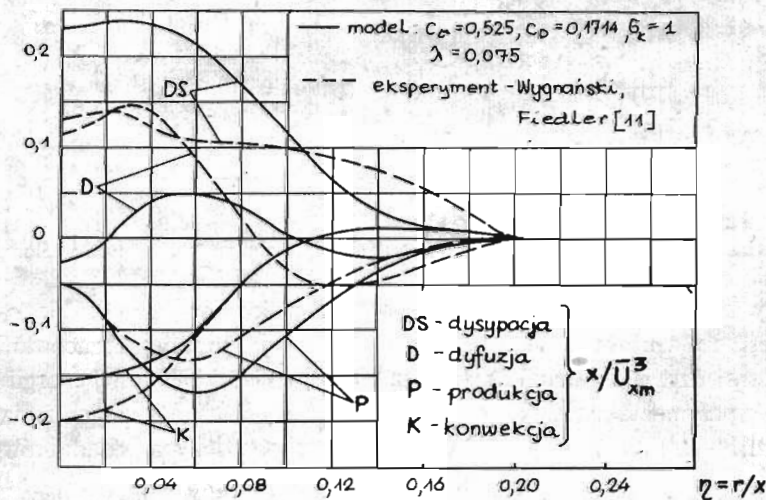
ność zmiany stałych modelu, które wynoszą odpowiednio:  $c_\mu = 0.525$ ;  $c_D = 0.1714$ . Widoczne jest, że wprowadzona modyfikacja powoduje poprawę oszacowania wartości produkcji w sąsiedztwie osi strugi oraz zbliża nieco rozkład kinetycznej energii turbulencji do danych eksperymentalnych. Nie powoduje ona natomiast pożądaných zmian w odniesieniu do turbulentnych naprężeń stycznych oraz pozostałych składników równania energii.

**5.2. Modyfikacja stałych modelu.** Prezentowane dotychczas zestawy stałych modelu jednorównaniowego spełniają warunek (6) wynikający z eksperymentalnej analizy przepływów przyściennych. Należy przypuszczać, że w odniesieniu do przepływów swobodnych warunk ten można traktować jedynie jako wstępną wskazówkę wyboru stałych modelu i że pewna zmiana wartości iloczynu  $c_\mu \cdot c_D$  może doprowadzić do poprawy wyników obliczeń. W prezentowanej pracy przeprowadzono szereg testów przy różnych wartościach iloczynu stałych

modelu oraz przy rozbudowanej postaci członu produkcyjnego. W szczególności przy nieco niższej wartości iloczynu stałych, wynoszący  $c_\mu \cdot c_D = 0.0679$ , otrzymano pewną poprawę jakości rezultatu obliczeń rozkładu kinetycznej energii turbulencji. Na rys. 9 i 10 przedstawiono rezultaty dla następującego zestawu stałych:  $c_\mu = 0.485$ ;  $c_D = 0.14$ ;



Rys. 9. Profile składowej osiowej prędkości średniej, kinetycznej energii turbulencji oraz turbulentnych naprężeń stycznych w obszarze samopodobnym ( $c_\mu \cdot c_D = 0.0679$ )



Rys. 10. Bilans kinetycznej energii turbulencji w obszarze samopodobnym ( $c_\mu \cdot c_D = 0.0679$ )

$\lambda = 0.075$ ;  $\sigma_k = 1.0$ . W porównaniu z rezultatami przedstawionymi na rys. 7 widoczne jest, że zastosowanie nowych stałych modelu prowadzi do pewnej poprawy oszacowania profilu kinetycznej energii turbulencji. Nie zanotowano jednak prawidłowych tendencji zmian wartości członów równania energii oraz profilu naprężeń Reynoldsa.

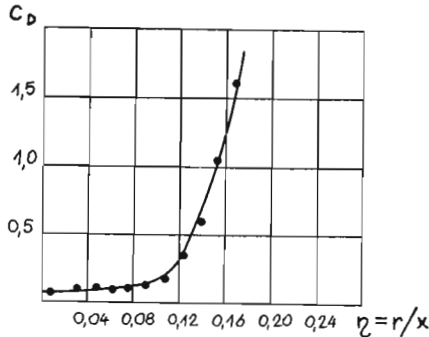
5.3. Uzależnienie parametru  $c_D$  od współrzędnych przestrzennych pola przepływu. Poszukując możliwości dalszej poprawy jakości modelu, która mogłaby doprowadzić do zgodnego z eksperymentem określenia składników równania energii, a co za tym idzie do prawidłowego odtworzenia mechanizmu transportu kinetycznej energii turbulencji, podjęto próbę funkcyjnego uzależnienia współczynnika dysypacji od współrzędnych pola przepływu.

W pierwszej kolejności, wykorzystując eksperymentalne dane Wygnańskiego i Fiedlera [11] dotyczące rozkładu kinetycznej energii turbulencji oraz jej dysypacji, obliczono rozkład współczynnika w obszarze samopodobieństwa. W obliczeniach wykorzystano modelową postać członu dysypacji:

$$\varepsilon = c_D \frac{k^{3/2}}{l}, \quad (15)$$

gdzie:

$$l = \lambda \cdot \delta, \quad \lambda = 0,075.$$



Rys. 11. Rozkład współczynnika w obszarze samopodobnym.

Przedstawiony na rys. 11 rozkład współczynnika  $c_D$  w funkcji bezwymiarowej współrzędnej  $\eta = r/x$  stanowi eksperymentalne potwierdzenie sugerowanej w pracy [8] koncepcji uzmiennienia tej wielkości traktowanej dotychczas jako bezwzględna stała modelu. Współczynnik ten wykazuje w poprzecznym przekroju strugi zmienność w szerokim zakresie wartości  $c_D = 0.06 \div 1.7$ .

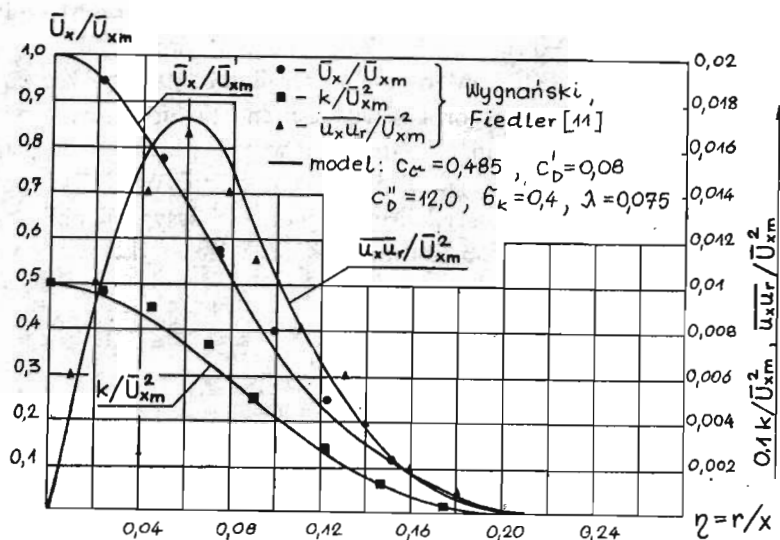
W celu wprowadzenia tej informacji do obliczeń numerycznych przeprowadzono szereg prób analitycznego uzależnienia parametru  $c_D$  od współrzędnych przestrzennych pola przepływu, przyjmując ostatecznie prostą zależność:

$$c_D = c'_D + c''_D \eta^2, \quad (16)$$

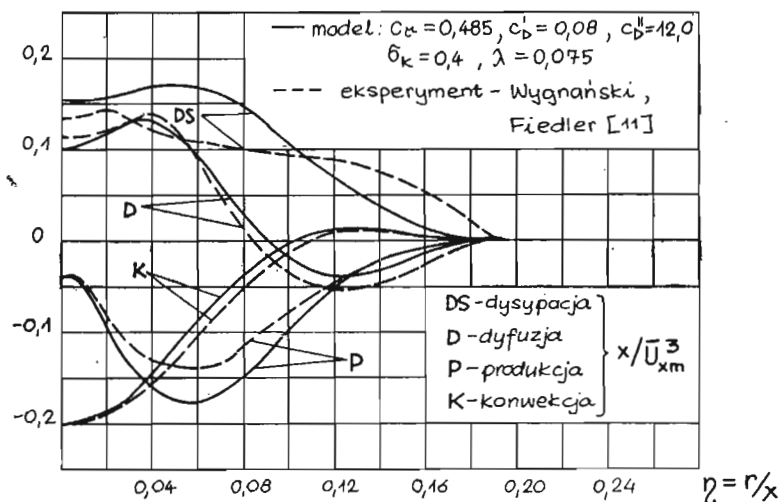
gdzie:  $\eta = r/x$ .

Okazuje się, że wprowadzenie formuły (16) do równania transportu kinetycznej energii turbulencji, przy odpowiednim doborze współczynników  $c'_D$  i  $c''_D$  pozwala na znaczne zbliżenie wyników obliczeń składników równania do rezultatów uzyskanych na drodze eksperymentalnej.

Na rys. 12 i 13 przedstawiono wyniki obliczeń przy zastosowaniu następującego zestawu stałych zmodyfikowanego modelu Prandtla-Kołmogorowa:  $c_\mu = 0.485$ ;  $c'_D = 0.08$ ;  $c''_D = 12.0$ ;  $\sigma_k = 0.4$ ;  $\lambda = 0.075$ . Widoczne jest, że wprowadzona modyfikacja dopro-



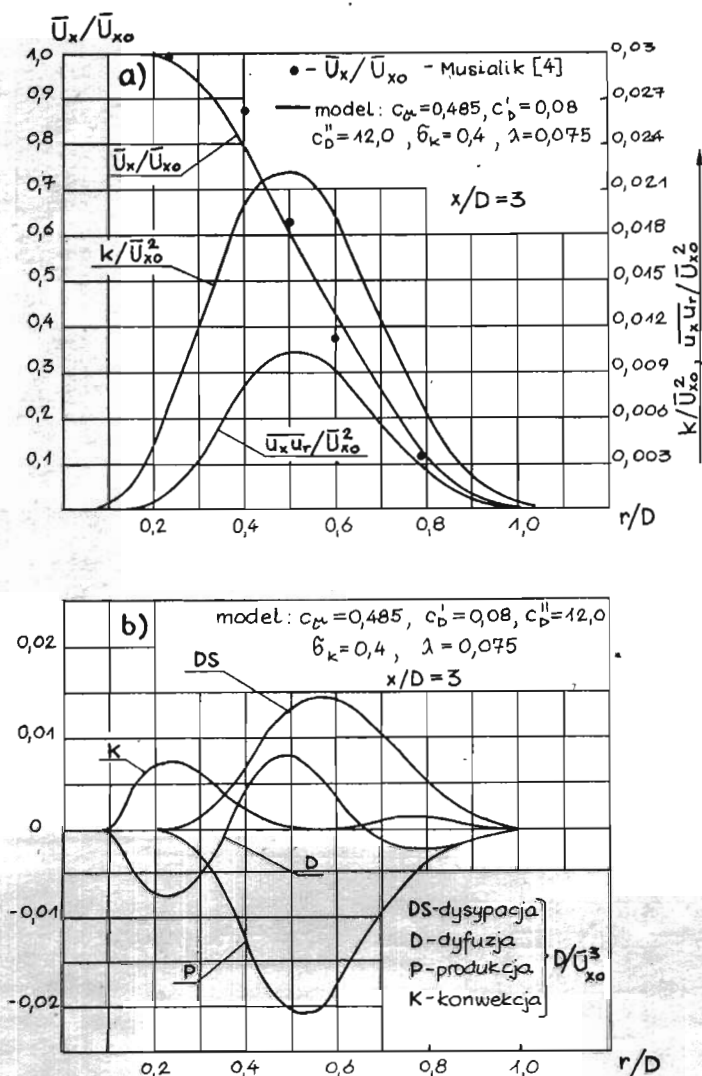
Rys. 12. Profile składowej osiowej prędkości średniej, kinetycznej energii turbulencji oraz turbulentnych naprężeń stycznych w obszarze samopodobnym ( $c_D = c'_D + c''_D \eta^2$ )



Rys. 13. Bilans kinetycznej energii turbulencji w obszarze samopodobnym ( $c_D = c'_D + c''_D \eta^2$ )

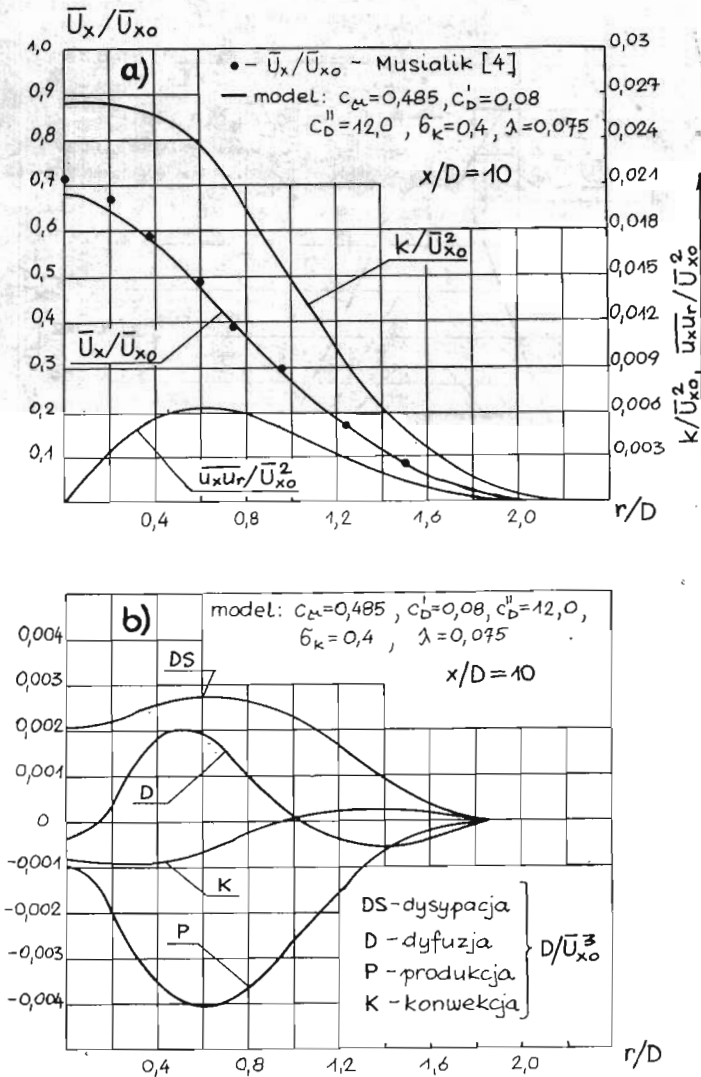
wadziła do znacznej poprawy jakości zarówno rozkładu kinetycznej energii turbulencji, turbulentnych naprężeń stycznych, jak i składników równania transportu kinetycznej energii turbulencji. Biorąc pod uwagę duży błąd pomiaru składników równania energii, można stwierdzić, że zaproponowana modyfikacja prowadzi do rezultatu wykazującego zadowalającą zgodność z danymi eksperymentalnymi, co świadczy o prawidłowym odtworzeniu mechanizmu transportu kinetycznej energii turbulencji.

Przeprowadzone w pracy obliczenia obejmowały również początkowy obszar rozwoju strugi. Na kolejnych rysunkach 14, 15 i 16 przedstawiono ewolucję pola prędkości średniej,



Rys. 14. Profile składowej osiowej prędkości średniej, kinetycznej energii turbulencji, turbulentnych naprężeń stycznych (a), bilans kinetycznej energii turbulencji (b) w przekroju  $x/D = 3$

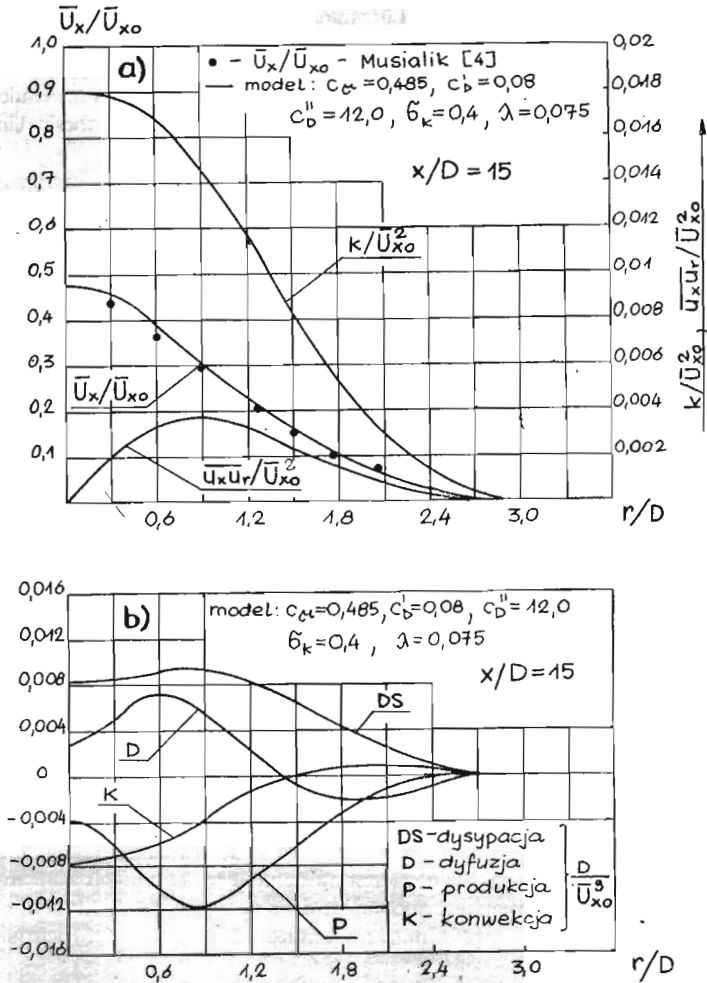
kinetycznej energii turbulencji, turbulentnych naprężeń stycznych oraz bilansu energii w trzech wybranych przekrojach strugi odległych odpowiednio o  $x/D = 3, 10, 15$  od wylotu dyszy. Na rys. 14 widoczna jest wyraźnie obecność potencjalnego rdzenia strugi, w którym nie występuje poprzeczny gradient składowej osiowej prędkości średniej, a stąd i nie występuje transport kinetycznej energii turbulencji. W obszarze tym kształt profilu energii powoduje, że człon konwekcyjny leży po stronie strat, natomiast dyfuzja po stronie zysku kinetycznej energii turbulencji w wewnętrznej części strefy mieszania. Sytuacja ulega zmianie w odległości  $x/D \cong 10$  (rys. 15), gdzie następuje wypełnienie profilu kinetycznej energii turbulencji, tzn. zanika lokalne minimum energii w otoczeniu osi strugi.



Rys. 15. Profile składowej osiowej prędkości średniej, kinetycznej energii turbulencji, turbulentnych naprężeń stycznych (a), bilans kinetycznej energii turbulencji (b) w przekroju  $x/D = 10$

Porównanie bilansu kinetycznej energii turbulencji w przekroju  $x/D = 15$  (rys. 16) z bilansem przedstawionym na rys. 13, który odpowiada warunkom samopodobieństwa dowodzi, że ze względu na strukturę turbulencji, w odległości  $x/D = 15$  nie osiągnięte zostały jeszcze warunki samopodobieństwa.

Przedstawione wyniki wykazują, że zmodyfikowany model Prandtla-Kołmogorowa pozwala również na uzyskanie dobrej zgodności z danymi eksperymentalnymi profili prędkości średniej w początkowym obszarze rozwoju strugi. Brak wiarygodnych danych eksperymentalnych uniemożliwił jednak kontrolę poprawności zamodelowania w tym obszarze poszczególnych składników równania energii.



Rys. 16. Profile składowej osiowej prędkości średniej, kinetycznej energii turbulencji, turbulentnych naprężeń stycznych (a), bilans kinetycznej energii turbulencji (b) w przekroju  $x/D = 15$

### 6. Podsumowanie

Jednorównaniowy model Prandtla-Kołmogorowa w swej konwencjonalnej postaci pozwala na prawidłowe wyznaczenie pola prędkości średniej w obszarze samopodobieństwa strugi osiowo — symetrycznej. Znaczne rozbieżności rezultatów obliczeń i danych eksperymentalnych dotyczą natomiast wielkości określających mechanizm transportu kinetycznej energii turbulencji.

Zaproponowana w pracy modyfikacja modelu, polegająca na funkcyjnym uzależnieniu współczynnika dysypacji od współrzędnych przestrzennych pola przepływu, w znacznym stopniu poprawia jakość modelu, umożliwiając również prawidłowe wyznaczenie struktury turbulencji przepływu. Model taki daje również zgodne z eksperymentem rezultaty w początkowym obszarze rozwoju strugi.

## Literatura

1. J. W. ELSNER, *Turbulencja przepływów*, Warszawa, PWN, 1987
2. B. E. LAUNDER, D. B. SPALDING, *Mathematical models of turbulence*, London, Academic Press, 1972
3. A. MORSE, *Axisymmetric turbulent shear flows with and without swirl*, Ph. D. thesis, University of London, 1980
4. M. MUSIALIK, *Transport energii turbulencji w swobodnych przepływach osiowosymetrycznych z zawirowaniem wstępnym*, Praca doktorska, Politechnika Częstochowska, 1982
5. S. V. PATANKAR, D. B. SPALDING, *Heat and mass transfer in boundary layers*, London, Intertext Books, 1972
6. S. V. PATANKAR, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Mc Graw Hill, New York, 1980
7. W. RODI, *The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two — equation model of turbulence*, Ph. D. thesis, University of London, 1972
8. W. RODI, D. B. SPALDING, *A two-parameter model of turbulence and its application to free jets*, Wärme — und — Stoffübertragung, Springer — Verlag, 1970
9. D. B. SPALDING, *GENMIX: A general computer program for two-dimensional parabolic phenomena*, Pergamon Press, London, 1977.
10. D. B. SPALDING — materiały niepublikowane
11. G. WYGNAŃSKI, H. R. FIEDLER. *Some measurements in the self-preserving jet*, J. Fluid. Mech., 1969.

## Резюме

### МОДЕЛЬ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ СТРУИ

В работе представлено попытку применения модели одного уравнения Прандтля-Колмогорова к анализу свободной осесимметрической струи.

Приведённые результаты утверждают, что модель одного уравнения в своей классической форме может вести к правильному определению только поля средних скоростей, для структуры турбулентности наблюдаются значительные различия с экспериментальными данными. Предложена в работе модификация модели заключается введением функциональной зависимости коэффициента диссипации  $c_D$  от пространственных координат поля течения, что ведет к правильному определению профиля турбулентных напряжений, кинетической энергии турбулентности и также её баланса.

## Summary

### ONE-EQUATION MODEL OF AXI-SYMMETRIC TURBULENT JET

The paper presents an attempt to apply the one-equation Prandtl-Kolmogorov model of turbulence for analysis of the round free jet. Presented results show that the energy model, in its classical form, provides only correct evaluation of velocity profile, while the predictions of turbulence structure are far from experimental data. The modification introducing the function describing  $c_D$  dissipation coefficient in the flow-field was proposed. This modification improves the performance of the one-equation energy model because predicted profiles of turbulence kinetic energy, its balance and turbulent shear stress are in good agreement with experiment.