

## SWOBODNE DRGANIA POPRZECZNE UKŁADU DWÓCH BELEK Z MASAMI SKUPIONYMI, PODPORAMI SPRĘŻYSTYMI I SZTYWNYMI

ZBIGNIEW ONISZCZUK

*Politechnika Rzeszowska*

W pracy rozpatrzono swobodne drgania poprzeczne układu dwóch równoległych belek przyrównanych połączonych liniowym elementem sprężystym. W odpowiednich przekrojach obu belek występują masy skupione, podpory sprężyste i sztywne. Ruch układu opisano dwoma równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Rozwiązania uzyskano stosując metodę operatorową na bazie całkowych transformacji Laplace'a. Otrzymane rozwiązania ogólne umożliwiają określenie częstości i postaci drgań własnych belek w przypadku dowolnego układu obciążeń pochodzących od mas skupionych, podpór sprężystych i sztywnych.

W formie przykładu przeanalizowano drgania układu belek swobodnie podpartych na końcach z jedną wewnętrzną podporą sztywną.

### 1. Wstęp

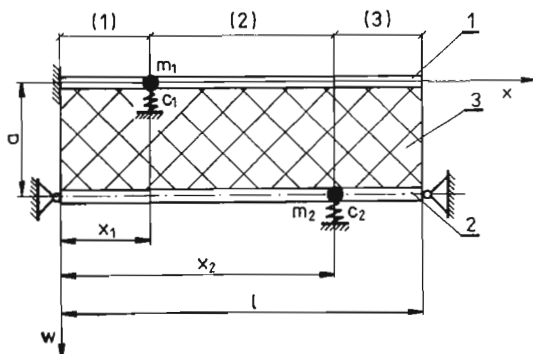
W pracy zajmiemy się drganiami poprzecznymi układu złożonego z dwóch belek połączonych elementem sprężystym. Postawiony problem jest interesujący przede wszystkim z teoretycznego punktu widzenia. W teorii drgań niewiele miejsca poświęcono dotychczas drganiom układów składających się z połączonych sprężyste elementów o masach rozłożonych w sposób ciągły. Zagadnienie drgań układu „dwuciągłego” poza wartościami poznawczymi ma także znaczenie praktyczne. Z problemem tym spotykamy się w budownictwie lądowym [11] i inżynierii wodnej [5], w konstrukcjach lotniczych [1] i w budowie maszyn [6], [8]. Z potrzeb natury technicznej wynika zainteresowanie szeregu autorów [1], [4]÷[11] powyższą problematyką. Rozpatrywano zwykle nietłumiony układ jednakowych pod względem fizycznym i geometrycznym belek przyrównanych z jednakowymi i w większości przypadków symetrycznymi warunkami brzegowymi (z wyjątkiem [4], [6], [7]). Jako model belki przyjmowano najprostszą formę Bernoulliego-Eulera (wyjątek [9]). Element sprężysty typu Winklera traktowano jako nieważki lub inercyjny [7], [10].

W pracy rozpatrzemy swobodne nietłumione drgania poprzeczne dwóch równoległych belek przyrównanych połączonych liniowym nieważkim elementem sprężystym. W odróżnieniu od pracy [6] rozważymy układ ogólniejszy — z masami skupionymi,

podporami sprężystymi i sztywnymi. Układ taki daje dość szerokie możliwości zastosowań technicznych, gdyż pozwala wyznaczyć m.in. drgania belek wieloprzęsłowych, a także może posłużyć do przybliżonego określania drgań belek niepryzmatycznych.

## 2. Różniczkowe równania ruchu. Rozwiązania.

Przyjmujemy, że z belkami są związane masy skupione  $m_1$ ,  $m_2$  odpowiednio w przekrojach  $x_1$ ,  $x_2$ . W punktach przyłożenia mas belki opierają się dodatkowo na sprężystych podporach o sztywnościach  $c_1$ ,  $c_2$  (rys. 1).



Rys. 1. Oznaczenia: 1, 2 — belka górna i dolna, 3 — element sprężysty,  $a$ ,  $l$  — rozstaw i długość belek

Podczas drgań układu w przekrojach  $x_1$ ,  $x_2$  pojawiają się siły skupione:

$$P_i(x_i, t) = P_i(x, t) \delta(x - x_i) = - \left( m_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + c_i w_i \right) \delta(x - x_i), \quad (1)$$

gdzie:

$w_i = w_i(x, t)$  — przemieszczenia przekrojów belek,

$x$  — współrzędna przestrzenna,

$t$  — czas,

$\delta(x - x_i)$  — funkcja delta Diraca,  $i = 1, 2$ .

Przy założeniu że układ nie jest tłumiony, a belki są dostatecznie smukłe (umożliwia to stosowanie teorii Bernoulliego-Eulera) otrzymujemy różniczkowe równania ruchu w następującej postaci:

$$\begin{aligned} E_1 J_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \varrho_1 F_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - k(w_2 - w_1) &= - \left( m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c_1 w_1 \right) \delta(x - x_1), \\ E_2 J_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \varrho_2 F_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + k(w_2 - w_1) &= - \left( m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + c_2 w_2 \right) \delta(x - x_2), \end{aligned} \quad (2)$$

przy czym:

$F_i, J_i$  — przekroje poprzeczne i momenty bezwładności,

$\varrho_i, E_i$  — masy właściwe i moduły Younga,  $i = 1, 2$ .

$k$  — współczynnik sprężystości elementu sprężystego.

Przyjmujemy warunki początkowe:

$$\begin{aligned} w_1(x, 0) &= w_{10}(x), & w_2(x, 0) &= w_{20}(x), \\ \left. \frac{\partial w_1}{\partial t} \right|_{(x, 0)} &= v_{10}(x), & \left. \frac{\partial w_2}{\partial t} \right|_{(x, 0)} &= v_{20}(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Dla zachowania ogólności rozwiązań nie precyzujemy warunków brzegowych, zakładając jedynie, że wynikają one z kombinacji możliwych sposobów zamocowania końców belek — koniec swobodny, utwierdzony lub swobodnie podparty.

Rozwiązań (drgań harmoniczych) poszukujemy w formie:

$$w_i(x, t) = Z_i(x)[A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)], \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

gdzie  $\omega$  jest nieznaną częstością drgań własnych układu.

Podstawiając (4) do (2) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E_1 J_1 Z_1^{IV} + (k - \omega^2 \rho_1 F_1) Z_1 - k Z_2 &= f_1(x), \\ E_2 J_2 Z_2^{IV} + (k - \omega^2 \rho_2 F_2) Z_2 - k Z_1 &= f_2(x), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$$f_i(x) = P_i(x) \delta(x - x_i) = (\omega^2 m_i - c_i) Z_i(x) \delta(x - x_i), \quad i = 1, 2.$$

Ogólne rozwiązania układu równań (5) mają postać:

$$Z_i(x) = X_i(x) + Y_i(x), \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

$X_1, X_2$  są całkami ogólnymi układu równań:

$$\begin{aligned} E_1 J_1 X_1^{IV} + (k - \omega^2 \rho_1 F_1) X_1 - k X_2 &= 0, \\ E_2 J_2 X_2^{IV} + (k - \omega^2 \rho_2 F_2) X_2 - k X_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Rozwiązując (7) znajdujemy [6]:

$$\begin{aligned} X_1(x) &= A_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + A_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + A_3 \sin(k_1 x) + A_4 \cos(k_1 x) + \\ &\quad + A_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + A_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + A_7 \sin(k_2 x) + A_8 \cos(k_2 x), \\ X_2(x) &= a_1 [A_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + A_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + A_3 \sin(k_1 x) + A_4 \cos(k_1 x)] + \\ &\quad + a_2 [A_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + A_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + A_7 \sin(k_2 x) + A_8 \cos(k_2 x)], \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{E_1 J_1} (\omega^2 \rho_1 F_1 - k) + \frac{1}{E_2 J_2} (\omega^2 \rho_2 F_2 - k) \right] + \right. \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{E_1 J_1} (\omega^2 \rho_1 F_1 - k) + \frac{1}{E_2 J_2} (\omega^2 \rho_2 F_2 - k) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4\omega^2}{E_1 J_1 E_2 J_2} [\omega^2 \rho_1 F_1 \rho_2 F_2 - k(\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2)] \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$a_{1,2} = \frac{E_1 J_1}{2k} [p \pm (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}] = -\frac{2k}{E_2 J_2} [p \mp (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}], \quad (10)$$

$$p = \frac{1}{E_1 J_1} (k - \omega^2 \rho_1 F_1) - \frac{1}{E_2 J_2} (k - \omega^2 \rho_2 F_2), \quad q^2 = \frac{4k^2}{E_1 J_1 E_2 J_2}.$$

$Y_1, Y_2$  stanowią rozwiązania szczególne układu równań z prawymi stronami:

$$\begin{aligned} E_1 J_1 Y_1^{IV} + (k - \omega^2 \rho_1 F_1) Y_1 - k Y_2 &= f_1(x), \\ E_2 J_2 Y_2^{IV} + (k - \omega^2 \rho_2 F_2) Y_2 - k Y_1 &= f_2(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Funkcje  $Y_i$  spełniają warunki:

$$Y_i(0) = Y_i'(0) = Y_i''(0) = Y_i'''(0) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Układ równań (11) rozwiązujemy metodą operatorową stosując całkowite transformacje Laplace'a [2], [3]. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= C \left\{ \int_0^x f_1(z) \left( \frac{1}{a_1 k_1^3} V_1[k_1(x-z)] - \frac{1}{a_2 k_2^3} V_2[k_2(x-z)] \right) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^x f_2(z) \left( \frac{1}{k_1^3} V_1[k_1(x-z)] - \frac{1}{k_2^3} V_2[k_2(x-z)] \right) dz \right\}, \\ Y_2(x) &= C \left\{ \int_0^x f_1(z) \left( \frac{1}{k_1^3} V_1[k_1(x-z)] - \frac{1}{k_2^3} V_2[k_2(x-z)] \right) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^x f_2(z) \left( \frac{a_1}{k_1^3} V_1[k_1(x-z)] - \frac{a_2}{k_2^3} V_2[k_2(x-z)] \right) dz \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie:

$$C = \frac{k}{E_1 J_1 E_2 J_2 (k_1^4 - k_2^4)},$$

$$V_i[k_i(x-z)] = \frac{1}{2} \{ \text{sh}[k_i(x-z)] - \sin[k_i(x-z)] \}, \quad i = 1, 2.$$

Przy pomocy wyrażeń (12) znajdujemy rozwiązania szczególne równań (2), a więc w przypadku występowania obciążeń skupionych w przekrojach  $x = x_1$  i  $x = x_2$ . Po scałkowaniu mamy:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= C \left\{ P_1(x_1) \left( \frac{1}{a_1 k_1^3} V_1[k_1(x-x_1)] - \frac{1}{a_2 k_2^3} V_2[k_2(x-x_1)] \right) H(x-x_1) + \right. \\ &\quad \left. + P_2(x_2) \left( \frac{1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_2)] - \frac{1}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_2)] \right) H(x-x_2) \right\}, \\ Y_2(x) &= C \left\{ P_1(x_1) \left( \frac{1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_1)] - \frac{1}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_1)] \right) H(x-x_1) + \right. \\ &\quad \left. + P_2(x_2) \left( \frac{a_1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_2)] - \frac{a_2}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_2)] \right) H(x-x_2) \right\}, \end{aligned}$$

gdzie:

$H(x-x_i)$  — jednostkowa funkcja Heaviside'a,

$$P_i(x_i) = (\omega^2 m_i - c_i) Z_i(x_i), \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Tak więc ogólne rozwiązania układu równań (5) określające postacie drgań własnych belek są następujące:

$$\begin{aligned} Z_1(x) = & A_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + A_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + A_3 \sin(k_1 x) + A_4 \cos(k_1 x) + \\ & + A_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + A_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + A_7 \sin(k_2 x) + A_8 \cos(k_2 x) + \\ & + C \left\{ (\omega^2 m_1 - c_1) Z_1(x_1) \left( \frac{1}{a_1 k_1^3} V_1[k_1(x-x_1)] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{a_2 k_2^3} V_2[k_2(x-x_1)] \right) H(x-x_1) + (\omega^2 m_2 - c_2) Z_2(x_2) \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_2)] - \frac{1}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_2)] \right) H(x-x_2) \right\}, \\ Z_2(x) = & a_1 [A_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + A_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + A_3 \sin(k_1 x) + A_4 \cos(k_1 x)] + \\ & + a_2 [A_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + A_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + A_7 \sin(k_2 x) + A_8 \cos(k_2 x)] + \\ & + C \left\{ (\omega^2 m_1 - c_1) Z_1(x_1) \left( \frac{1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_1)] + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_1)] \right) H(x-x_1) + (\omega^2 m_2 - c_2) Z_2(x_2) \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{a_1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_2)] - \frac{a_2}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_2)] \right) H(x-x_2) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Postacie drgań zawierają osiem stałych dowolnych  $A_i$ , które znajdujemy na podstawie odpowiednich warunków brzegowych. W rezultacie otrzymujemy układ ośmiu jednorodnych równań algebraicznych na poszukiwane stałe. Po zbudowaniu wyznacznika głównego i przyrównaniu go do zera uzyskujemy równanie częstości drgań własnych. Z tego równania wyliczamy nieskończony ciąg częstości  $\omega_n$  i w konsekwencji otrzymujemy nieskończone ciągi wszystkich wielkości uzależnionych od częstości własnych.

Ostatecznie drgania belek możemy przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} w_1(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} Z_{1n}(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)] \times \\ & \times \left\{ A_{1n} \operatorname{sh}(k_{1n} x) + A_{2n} \operatorname{ch}(k_{1n} x) + A_{3n} \sin(k_{1n} x) + A_{4n} \cos(k_{1n} x) + \right. \\ & + A_{5n} \operatorname{sh}(k_{2n} x) + A_{6n} \operatorname{ch}(k_{2n} x) + A_{7n} \sin(k_{2n} x) + A_{8n} \cos(k_{2n} x) + \\ & \left. + C_n \left( (\omega_n^2 m_1 - c_1) Z_{1n}(x_1) \left\{ \frac{1}{a_{1n} k_{1n}^3} V_{1n}[k_{1n}(x-x_1)] + \right. \right. \right. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{a_{2n}k_{2n}^3}V_{2n}[k_{2n}(x-x_1)]\}H(x-x_1)+(\omega_n^2m_2-c_2)Z_{2n}(x_2)\times \\
& \times\left\{\frac{1}{k_{1n}^3}V_{1n}[k_{1n}(x-x_2)]-\frac{1}{k_{2n}^3}V_{2n}[k_{2n}(x-x_2)]\}H(x-x_2)\right\}, \\
w_2(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}Z_{2n}(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\sin(\omega_n t)+B_n\cos(\omega_n t)]\times \quad (16) \text{ [cd.]} \\
& \times\left\{a_{1n}[A_{1n}\operatorname{sh}(k_{1n}x)+A_{2n}\operatorname{ch}(k_{1n}x)+A_{3n}\sin(k_{1n}x)+A_{4n}\cos(k_{1n}x)]+\right. \\
& +a_{2n}[A_{5n}\operatorname{sh}(k_{2n}x)+A_{6n}\operatorname{ch}(k_{2n}x)+A_{7n}\sin(k_{2n}x)+A_{8n}\cos(k_{2n}x)]+ \\
& +C_n\left((\omega_n^2m_1-c_1)Z_{1n}(x_1)\left\{\frac{1}{k_{1n}^3}V_{1n}[k_{1n}(x-x_1)]+\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{1}{k_{2n}^3}V_{2n}[k_{2n}(x-x_1)]\right\}H(x-x_1)+(\omega_n^2m_2-c_2)Z_{2n}(x_2)\times\right. \\
& \left.\times\left\{\frac{a_{1n}}{k_{1n}^3}V_{1n}[k_{1n}(x-x_2)]-\frac{a_{2n}}{k_{2n}^3}V_{2n}[k_{2n}(x-x_2)]\right\}H(x-x_2)\right\},
\end{aligned}$$

gdzie:

$$C_n = \frac{k}{E_1 J_1 E_2 J_2 (k_{1n}^4 - k_{2n}^4)},$$

$$Z_{1n}(x_1) = A_{1n}\operatorname{sh}(k_{1n}x_1) + A_{2n}\operatorname{ch}(k_{1n}x_1) + A_{3n}\sin(k_{1n}x_1) + A_{4n}\cos(k_{1n}x_1) + \\ + A_{5n}\operatorname{sh}(k_{2n}x_1) + A_{6n}\operatorname{ch}(k_{2n}x_1) + A_{7n}\sin(k_{2n}x_1) + A_{8n}\cos(k_{2n}x_1),$$

$$Z_{2n}(x_2) = a_{1n}[A_{1n}\operatorname{sh}(k_{1n}x_2) + A_{2n}\operatorname{ch}(k_{1n}x_2) + A_{3n}\sin(k_{1n}x_2) + A_{4n}\cos(k_{1n}x_2)] + \\ + a_{2n}[A_{5n}\operatorname{sh}(k_{2n}x_2) + A_{6n}\operatorname{ch}(k_{2n}x_2) + A_{7n}\sin(k_{2n}x_2) + A_{8n}\cos(k_{2n}x_2)] + \\ + C_n(\omega_n^2m_1 - c_1)Z_{1n}(x_1)\left\{\frac{1}{k_{1n}^3}V_{1n}[k_{1n}(x_2 - x_1)] - \frac{1}{k_{2n}^3}V_{2n}[k_{2n}(x_2 - x_1)]\right\}.$$

Stałe  $A_n$ ,  $B_n$  występujące w funkcjach czasu wyznaczamy z warunków początkowych wykorzystując warunek ortogonalności postaci drgań własnych. Ma ona w tym przypadku formę:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{x_1} (\varrho_1 F_1 Z_{1k} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 Z_{2k} Z_{2n}) dx + \\
& + \int_{x_1}^{x_2} (\varrho_1 F_1 Z_{1k} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 Z_{2k} Z_{2n}) dx + \int_{x_2}^l (\varrho_1 F_1 Z_{1k} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 Z_{2k} Z_{2n}) dx + \quad (17) \\
& + [m_1 Z_{1k}(x_1) Z_{1n}(x_1) + m_2 Z_{2k}(x_2) Z_{2n}(x_2)] = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq n, \\ b_n^2 & \text{dla } k = n, \end{cases}
\end{aligned}$$

przy czym:

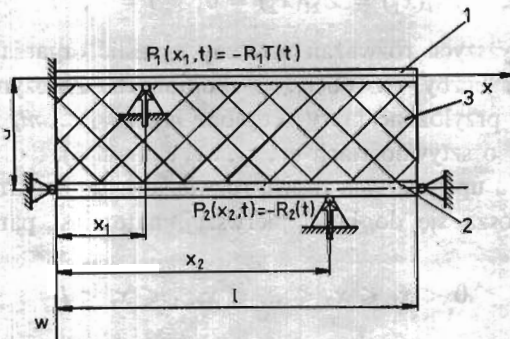
$$b_n^2 = \int_0^{x_1} (\varrho_1 F_1 Z_{1n}^2 + \varrho_2 F_2 Z_{2n}^2) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\varrho_1 F_1 Z_{1n}^2 + \varrho_2 F_2 Z_{2n}^2) dx + \int_{x_2}^l (\varrho_1 F_1 Z_1^2 + \varrho_2 F_2 Z_2^2) dx + [m_1 Z_{1n}^2(x_1) + m_2 Z_{2n}^2(x_2)]. \quad (18)$$

Wprowadzając (16) do (3) i wykonując odpowiednie transformacje całkowe otrzymujemy zależności pozwalające obliczyć nieznanne stałe:

$$A_n = \frac{1}{\omega_n b_n^2} \left[ \int_0^{x_1} [(\varrho_1 F_1 v_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 v_{20} Z_{2n}) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\varrho_1 F_1 v_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 v_{20} Z_{2n}) dx + \int_{x_2}^l (\varrho_1 F_1 v_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 v_{20} Z_{2n}) dx + m_1 v_{10}(x_1) Z_{1n}(x_1) + m_2 v_{20}(x_2) Z_{2n}(x_2) \right], \quad (19)$$

$$B_n = \frac{1}{b_n^2} \left[ \int_0^{x_1} (\varrho_1 F_1 w_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 w_{20} Z_{2n}) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\varrho_1 F_1 w_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 w_{20} Z_{2n}) dx + \int_{x_2}^l (\varrho_1 F_1 w_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 w_{20} Z_{2n}) dx + m_1 w_{10}(x_1) Z_{1n}(x_1) + m_2 w_{20}(x_2) Z_{2n}(x_2) \right].$$

Przedstawione rozwiązania drgań belek z masami skupionymi i podporami sprężystymi umożliwiają znalezienie rozwiązań w przypadku, gdy w przekrojach  $x_1, x_2$  występują podpory sztywne [2].



Rys. 2.

Oddziaływanie podpór na belki (rys. 2) określimy następująco:

$$P_i(x_i, t) = P_i T(t) \delta(x - x_i) = -R_i \delta(x - x_i) [A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)], \quad (20)$$

gdzie  $R_i$  — stałe charakteryzujące wielkość reakcji podpór.

W wyrażeniach (14) wystarczy więc przyjąć:

$$P_i(x_i) = -R_i, \quad i = 1, 2,$$

a wówczas z (15) wynikają postacie drgań dla rozważanego przypadku:

$$\begin{aligned} Z_1(x) &= X_1(x) - C \left\{ R_1 \left( \frac{1}{a_1 k_1^3} V_1[k_1(x-x_1)] - \frac{1}{a_2 k_2^3} V_2[k_2(x-x_1)] \right) H(x-x_1) + \right. \\ &\quad \left. + R_2 \left( \frac{1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_2)] - \frac{1}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_2)] \right) H(x-x_2) \right\}, \\ Z_2(x) &= X_2(x) - C \left\{ R_1 \left( \frac{1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_1)] - \frac{1}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_1)] \right) H(x-x_1) + \right. \\ &\quad \left. + R_2 \left( \frac{a_1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_2)] - \frac{a_2}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_2)] \right) H(x-x_2) \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Stałe  $R_1, R_2$  są oczywiście wielkościami nieznanymi. Trzeba więc wyznaczyć w sumie 10 niewiadomych —  $A_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  oraz  $R_1, R_2$ . Do dyspozycji mamy osiem warunków brzegowych i dwa warunki dodatkowe:

$$w_i(x_i, t) = 0 \quad \text{lub} \quad Z_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

które wynikają z faktu, że przemieszczenia belek na podporach sztywnych są równe zero. Na podstawie wspomnianych wyżej warunków otrzymamy układ dziesięciu równań algebraicznych, a następnie równanie częstości. Po zastąpieniu członów:

$$(\omega_n^2 m_i - c_i) Z_{in}(x_i) \quad \text{przez} \quad (-R_{in}), \quad i = 1, 2.$$

związki (16) będą opisywały drgania belek z podporami sztywnymi. Warunek ortogonalności uzyskamy z (17) przyjmując:

$$Z_{1i}(x_1) = Z_{2i}(x_2) = 0, \quad i = k, n.$$

Na podstawie powyższych rozważań możemy określić drgania układu w przypadku występowania większej liczby —  $r$  obciążeń skupionych. Założymy, że w przekrojach  $x_1, x_2, \dots, x_r$  belek są przyłożone masy skupione  $m_1, m_2, \dots, m_r$  i belki opierają się na sprężystych podporach o sztywnościach  $c_1, c_2, \dots, c_r$  (rys. 3).

Przyjmujemy (w celu uproszczenia zapisu rozwiązań), że przekroje oznaczone indeksami nieparzystymi odnoszą się do belki pierwszej, natomiast parzystymi — do drugiej, przy czym:

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{r-1} \leq x_r < l.$$

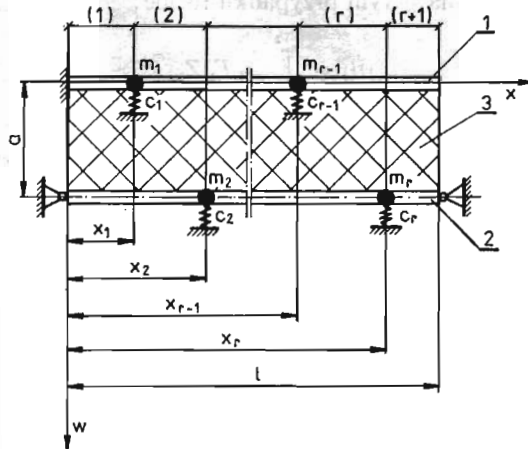
Po podstawieniu:

$$f_1(x) = \sum_{(i)} (\omega^2 m_i - c_i) Z_1(x) \delta(x-x_i) = \sum_{(i)} P_i(x) \delta(x-x_i),$$

$$f_2(x) = \sum_{(j)} (\omega^2 m_j - c_j) Z_2(x) \delta(x-x_j) = \sum_{(j)} P_j(x) \delta(x-x_j),$$

$$i = 1, 3, \dots, r-1, \quad j = 2, 4, \dots, r$$





Rys. 3.

do (12) i scałkowaniu możemy ogólne postacie drgań belek zapisać następująco:

$$Z_1(x) = X_1(x) + C \left\{ \sum_{(i)} P_i(x_i) \left( \frac{1}{a_1 k_1^3} V_1[k_1(x-x_i)] - \frac{1}{a_2 k_2^3} V_2[k_2(x-x_i)] \right) H(x-x_i) + \right. \\ \left. + \sum_{(j)} P_j(x_j) \left( \frac{1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_j)] - \frac{1}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_j)] \right) H(x-x_j) \right\}, \quad (22)$$

$$Z_2(x) = X_2(x) + C \left\{ \sum_{(i)} P_i(x_i) \left( \frac{1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_i)] - \frac{1}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_i)] \right) H(x-x_i) + \right. \\ \left. + \sum_{(j)} P_j(x_j) \left( \frac{a_1}{k_1^3} V_1[k_1(x-x_j)] - \frac{a_2}{k_2^3} V_2[k_2(x-x_j)] \right) H(x-x_j) \right\},$$

gdzie:

$$P_i(x_i) = (\omega^2 m_i - c_i) Z_1(x_i), \quad i = 1, 3, \dots, r-1,$$

$$P_j(x_j) = (\omega^2 m_j - c_j) Z_2(x_j), \quad j = 2, 4, \dots, r.$$

Jeżeli w określonych przekrojach mamy do czynienia z podporami sztywnymi, to należy przyjąć:

$$P_i(x_i) = -R_i, \quad P_j(x_j) = -R_j$$

z warunkami:

$$w_1(x_i, t) = w_2(x_j, t) = 0 \quad \text{lub} \quad Z_1(x_i) = Z_2(x_j) = 0.$$

Ogólny charakter rozwiązań (22) umożliwia określenie postaci drgań dla dowolnego układu obciążeń pochodzących od mas skupionych, podpór sprężystych i sztywnych, gdyż wystarczy przyjmować, że niektóre  $m_k = c_k = R_k = 0$ ,  $k = i, j$ . Równanie częstości otrzymujemy analogicznie jak poprzednio. Z (22) dla każdej częstości wynikają szczególne postacie drgań  $Z_{1n}(x)$ ,  $Z_{2n}(x)$ .

Warunek ortogonalności ma w tym przypadku formę:

$$\int_0^{x_1} (\varrho_1 F_1 Z_{1k} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 Z_{2k} Z_{2n}) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\varrho_1 F_1 Z_{1k} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 Z_{2k} Z_{2n}) dx + \dots +$$

$$+ \int_{x_{r-1}}^{x_r} (\varrho_1 F_1 Z_{1k} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 Z_{2k} Z_{2n}) dx + \int_{x_r}^l (\varrho_1 F_1 Z_{1k} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 Z_{2k} Z_{2n}) dx +$$

$$+ \sum_{(i)} m_i Z_{1k}(x_i) Z_{1n}(x_i) + \sum_{(j)} m_j Z_{2k}(x_j) Z_{2n}(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq n, \\ b_n^2 & \text{dla } k = n, \end{cases}$$

przy czym:

$$b_n^2 = \int_0^{x_1} (\varrho_1 F_1 Z_{1n}^2 + \varrho_2 F_2 Z_{2n}^2) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\varrho_1 F_1 Z_{1n}^2 + \varrho_2 F_2 Z_{2n}^2) dx + \dots +$$

$$+ \int_{x_{r-1}}^{x_r} (\varrho_1 F_1 Z_{1n}^2 + \varrho_2 F_2 Z_{2n}^2) dx + \int_{x_r}^l (\varrho_1 F_1 Z_{1n}^2 + \varrho_2 F_2 Z_{2n}^2) dx +$$

$$+ \sum_{(i)} m_i Z_{1n}^2(x_i) + \sum_{(j)} m_j Z_{2n}^2(x_j).$$

Drgania belek opisują wyrażenia:

$$w_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{1n}(x) [A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)],$$

$$w_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{2n}(x) [A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)],$$
(23)

gdzie:

$$A_n = \frac{1}{\omega_n b_n^2} \left[ \int_0^{x_1} (\varrho_1 F_1 v_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 v_{20} Z_{2n}) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\varrho_1 F_1 v_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 v_{20} Z_{2n}) dx + \right.$$

$$+ \dots + \int_{x_{r-1}}^{x_r} (\varrho_1 F_1 v_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 v_{20} Z_{2n}) dx + \int_{x_r}^l (\varrho_1 F_1 v_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 v_{20} Z_{2n}) dx +$$

$$\left. + \sum_{(i)} m_i v_{10}(x_i) Z_{1n}(x_i) + \sum_{(j)} m_j v_{20}(x_j) Z_{2n}(x_j) \right],$$

$$B_n = \frac{1}{b_n^2} \left[ \int_0^{x_1} (\varrho_1 F_1 w_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 w_{20} Z_{2n}) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\varrho_1 F_1 w_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 w_{20} Z_{2n}) dx + \right.$$

$$+ \dots + \int_{x_{r-1}}^{x_r} (\varrho_1 F_1 w_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 w_{20} Z_{2n}) dx + \int_{x_r}^l (\varrho_1 F_1 w_{10} Z_{1n} + \varrho_2 F_2 w_{20} Z_{2n}) dx +$$

$$\left. + \sum_{(i)} m_i w_{10}(x_i) Z_{1n}(x_i) + \sum_{(j)} m_j w_{20}(x_j) Z_{2n}(x_j) \right].$$

### 3. Podsumowanie

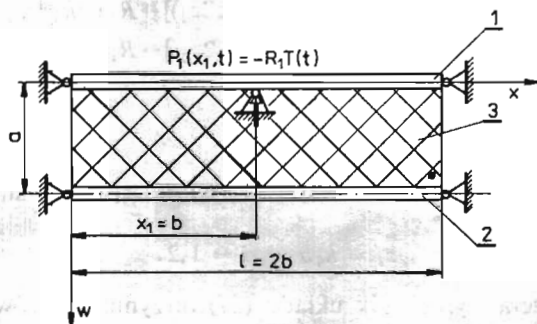
1. Określone w pracy rozwiązania mają charakter uniwersalny, ponieważ zostały otrzymane bez ingerencji warunków brzegowych. Ograniczenia nałożone na warunki brzegowe umożliwiły zbudowanie warunku ortogonalności słusznego dla pewnej grupy tychże warunków. W przypadku innych warunków brzegowych (masy skupione itp) konieczne jest wyprowadzenie nowego warunku ortogonalności postaci drgań. Pociągnięto to za sobą automatycznie modyfikację związków opisujących stałe występujące w funkcjach czasu.

2. Rozpatrzony problem zawiera szereg przypadków szczególnych. Na podstawie znalezionych rozwiązań ogólnych możemy bezpośrednio dyskutować m.in. drgania układu belek wieloprzęsłowych, czy też drgania belki pojedynczej na sprężystym podłożu.

### 4. Przykład

Rozwiążemy układ z jedną wewnętrzną sztywną podporą umieszczoną w przekroju  $x = b$  górnej belki. Przyjmujemy, że wszystkie końce belek są swobodnie podparte (rys. 4). Zakładamy, że belki są fizycznie i geometrycznie jednakowe, więc:

$$E_i = E, \quad F_i = F, \quad J_i = J, \quad \varrho_i = \varrho, \quad i = 1, 2,$$



Rys. 4.

Dane liczbowe (belki żelbetowe):

$$E = 1 \cdot 10^{10} [\text{Nm}^{-2}], \quad F = 5 \cdot 10^{-2} [\text{m}^2], \quad \varrho = 2 \cdot 10^5 [\text{kgm}^{-3}], \quad l = 2b = 10 [\text{m}], \\ k = 5 \cdot 10^5 [\text{Nm}^{-2}], \quad J = 4 \cdot 10^{-4} [\text{m}^4].$$

Warunki brzegowe i warunek dodatkowy:

$$Z_1(0) = Z_1(l) = Z_2(0) = Z_2(l) = 0, \quad Z_1(b) = 0, \\ Z_1'(0) = Z_1'(l) = Z_2'(0) = Z_2'(l) = 0.$$

Ogólne postacie drgań własnych dla tego przypadku otrzymujemy z (21):

$$Z_1(x) = X_1(x) - R_1 C \left\{ \frac{1}{a_1 k_1^3} V_1[k_1(x-b)] - \frac{1}{a_2 k_2^3} V_2[k_2(x-b)] \right\} H(x-b), \\ Z_2(x) = X_2(x) - R_1 C \left\{ \frac{1}{k_1^3} V_1[k_1(x-b)] - \frac{1}{k_2^3} V_2[k_2(x-b)] \right\} H(x-b), \quad (24)$$

gdzie  $X_1(x)$ ,  $X_2(x)$  są określone wzorami (8), do których wprowadzamy funkcje Kryłowa [12]:

$$\begin{aligned} X_1(x) &= X_{11}(x) + X_{12}(x), & X_2(x) &= a_1 X_{11}(x) + a_2 X_{12}(x), \\ X_{11}(x) &= A_1 S_1(k_1 x) + A_2 T_1(k_1 x) + A_3 U_1(k_1 x) + A_4 V_1(k_1 x), \\ X_{12}(x) &= A_5 S_2(k_2 x) + A_6 T_2(k_2 x) + A_7 U_2(k_2 x) + A_8 V_2(k_2 x). \end{aligned} \quad (25)$$

Ponadto z (9), (10), (12):

$$C = \frac{1}{2EJ}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad k_1 = \left( \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 \right)^{1/4}, \quad k_2 = \left( \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 - \frac{2k}{EJ} \right)^{1/4}. \quad (26)$$

Podstawiając (24) do warunków brzegowych odpowiadających lewym końcom belek otrzymujemy jednorodny układ czterech równań algebraicznych, z którego wynika, że stałe  $A_1 = A_3 = A_5 = A_7 = 0$ .

Na podstawie pozostałych warunków mamy:

$$\begin{aligned} A_2 T_1(z_1) + A_4 V_1(z_1) + A_6 T_2(z_2) + A_8 V_2(z_2) &= 0, \\ A_2 T_1(2z_1) + A_4 V_1(2z_1) + A_6 T_2(2z_2) + A_8 V_2(2z_2) - R_1 C [k_1^{-3} V_1(z_1) + k_2^{-3} V_2(z_2)] &= 0, \\ [A_2 T_1(2z_1) + A_4 V_1(2z_1)] - [A_6 T_2(2z_2) + A_8 V_2(2z_2)] - R_1 C [k_1^{-3} V_1(z_1) - k_2^{-3} V_2(z_2)] &= 0, \\ k_1^2 [A_2 V_1(2z_1) + A_4 T_1(2z_1)] + k_2^2 [A_6 V_2(2z_2) + A_8 T_2(2z_2)] - R_1 C [k_1^{-1} T_1(z_1) + k_2^{-1} T_2(z_2)] &= 0, \\ k_1^2 [A_2 V_1(2z_1) + A_4 T_1(2z_1)] - k_2^2 [A_6 V_2(2z_2) + A_8 T_2(2z_2)] - R_1 C [k_1^{-1} T_1(z_1) - k_2^{-1} T_2(z_2)] &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} T_i(z_i) &= \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(z_i) + \sin(z_i)], & V_i(z_i) &= \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(z_i) - \sin(z_i)], \\ z_i &= k_i b, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Przyrównując do zera wyznacznik układu (27) otrzymujemy równanie częstości:

$$\begin{aligned} \sin z_1 \sin z_2 [k_1^{-3} (\operatorname{sh} z_1 \cos z_1 - \operatorname{ch} z_1 \sin z_1) \operatorname{ch} z_2 \cos z_2 + \\ + k_2^{-3} (\operatorname{sh} z_2 \cos z_2 - \operatorname{ch} z_2 \sin z_2) \operatorname{ch} z_1 \cos z_1] &= 0, \end{aligned}$$

które rozpada się na trzy następujące równania:

$$\sin z_1 = 0, \quad \sin z_2 = 0, \quad (28)$$

$$k_1^{-3} [\operatorname{th} z_1 - \operatorname{tg} z_1] + k_2^{-3} [\operatorname{th} z_2 - \operatorname{tg} z_2] = 0. \quad (29)$$

Z (28) wynika, że

$$z_1 = z_2 = k_1 b = k_2 b = z_r = r\pi, \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

czyli:

$$k_{1r} = k_{2r} = k_r = \frac{r\pi}{b},$$

więc:

$$k_1 = 0,628, \quad k_2 = 1,257, \quad k_3 = 1,885, \dots \text{ [m}^{-1}\text{]}.$$

Wtedy z (26) mamy:

$$\omega_{1r} = \left( \frac{EJ}{\rho F} k_r^4 \right)^{1/2}, \quad \omega_{2r} = \left( \omega_{1r}^2 + \frac{2k}{\rho F} \right)^{1/2}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= 78,957, \quad \omega_{12} = 315,827, \quad \omega_{13} = 710,612, \dots, \\ \omega_{21} &= 127,413, \quad \omega_{22} = 331,281, \quad \omega_{23} = 717,613, \dots, \end{aligned} \quad [s^{-1}]$$

Z równania (29) metodą kolejnych przybliżeń obliczamy:

$$\omega_n = 142,899; 192,842; 405,808, \dots, [s^{-1}], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (31)$$

wtedy z (26):

$$\begin{aligned} k_{1n} &= 0,845; 0,982; 1,424, \dots, \\ k_{2n} &= 0,714; 0,908; 1,402, \dots, \end{aligned} \quad [m^{-1}]$$

Ciągowi częstości (31) odpowiadają symetryczne postacie drgań:

$$\begin{aligned} Z_{1n} &= k_{1n}^{-3} \left[ \frac{\operatorname{sh}(k_{1n}x)}{\operatorname{ch}(z_{1n})} - \frac{\sin(k_{1n}x)}{\cos(z_{1n})} \right] + k_{2n}^{-3} \left[ \frac{\operatorname{sh}(k_{2n}x)}{\operatorname{ch}(z_{2n})} - \frac{\sin(k_{2n}x)}{\cos(z_{2n})} \right] + \\ &- 2 \{ k_{1n}^{-3} [\operatorname{sh}[k_{1n}(x-b)] - \sin[k_{1n}(x-b)]] + k_{2n}^{-3} [\operatorname{sh}[k_{2n}(x-b)] - \sin[k_{2n}(x-b)]] \} H(x-b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{2n} &= k_{1n}^{-3} \left[ \frac{\operatorname{sh}(k_{1n}x)}{\operatorname{ch}(z_{1n})} - \frac{\sin(k_{1n}x)}{\cos(z_{1n})} \right] - k_{2n}^{-3} \left[ \frac{\operatorname{sh}(k_{2n}x)}{\operatorname{ch}(z_{2n})} - \frac{\sin(k_{2n}x)}{\cos(z_{2n})} \right] + \\ &- 2 \{ k_{1n}^{-3} [\operatorname{sh}[k_{1n}(x-b)] - \sin[k_{1n}(x-b)]] - k_{2n}^{-3} [\operatorname{sh}[k_{2n}(x-b)] - \sin[k_{2n}(x-b)]] \} H(x-b), \end{aligned}$$

gdzie:

$$z_{1n} = k_{1n}b, \quad z_{2n} = k_{2n}b.$$

Funkcje czasu mają formę:

$$T_n = A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t).$$

Druga grupa częstości własnych (30) prowadzi do antysymetrycznych postaci drgań:

$$Z_{1r} = X_r = \sin(k_r x), \quad Z_{2r} = X_r = \sin(k_r x)$$

i funkcji czasu:

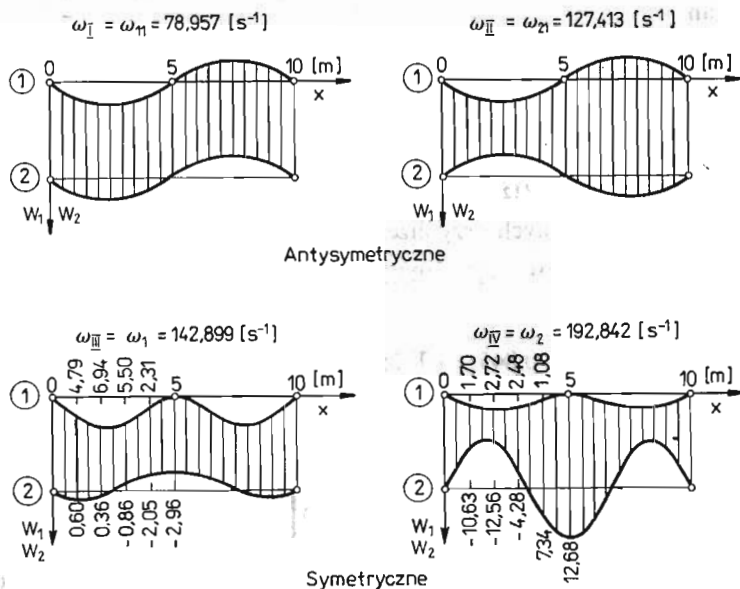
$$T_{1r} = [A_{1r} \sin(\omega_{1r} t) + B_{1r} \cos(\omega_{1r} t)] + [A_{2r} \sin(\omega_{2r} t) + B_{2r} \cos(\omega_{2r} t)].$$

$$T_{2r} = [A_{1r} \sin(\omega_{1r} t) + B_{1r} \cos(\omega_{1r} t)] - [A_{2r} \sin(\omega_{2r} t) + B_{2r} \cos(\omega_{2r} t)].$$

Ogólnie drgania swobodne układu można przedstawić w formie szeregów:

$$w_1(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} X_r T_{1r} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{1n} T_n, \quad w_2(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} X_r T_{2r} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{2n} T_n.$$

Są to kombinacje symetrycznych i antysymetrycznych postaci drgań. Postaciom antysymetrycznym odpowiadają identyczne kształty ugięć obu belek (jeden współczynnik kształtu  $k_r$ ) i po dwie częstości własne ( $\omega_{1r}, \omega_{2r}$ ) towarzyszące wychyleniom belek zgodnym lub przeciwnym (drgania synchroniczne lub asynchroniczne). Postać symetryczna jest formowana przez dwa współczynniki kształtu ( $k_{1n}, k_{2n}$ ) i przyporządkowana jej jest tylko jedna częstość ( $\omega_n$ ).



Rys. 5. Postacie drgań odpowiadające czterem pierwszym częstościom własnym układu. Częstościom  $\omega_I = \omega_{11}$  i  $\omega_{II} = \omega_{21}$  odpowiadają postacie antysymetryczne, zaś  $\omega_{III} = \omega_1$  i  $\omega_{IV} = \omega_2$  — symetryczne

Stałe występujące w funkcjach czasu określimy z przyjętych warunków początkowych:

$$w_{10} = w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right), \quad w_{20} = v_{10} = v_{20} = 0, \quad \text{gdzie } w_0 - \text{znana stała.}$$

Ostatecznie:

$$w_1(x, t) = \frac{1}{2} w_0 [\cos(78,957t) + \cos(127,413t)] \sin(0,628x),$$

$$w_2(x, t) = \frac{1}{2} w_0 [\cos(78,957t) - \cos(127,413t)] \sin(0,628x).$$

Przy tak zadanych warunkach początkowych drgania swobodne układu mają charakter antysymetryczny. Wzbudza się tylko jedna postać drgań własnych odpowiadająca dwóm najniższym częstościom (rys. 5). Przemieszczenia odbywające się z częstością  $\omega_{11}$  są synchroniczne (współbieżne), w przypadku  $\omega_{21}$  — asynchroniczne (przeciwbieżne).

#### Literatura

1. M. DUBLIN, H. FRIEDRICH, *Forced responses of two elastic beams interconnected by spring-damper systems*, Journal of the Aeronautical Sciences, 23, 1956.
2. А. П. Филиппов, *Колебания деформируемых систем*, Машиностроение, Москва 1970.
3. S. KALISKI, *Drgania i fale w ciałach stałych*, IPPT PAN, Warszawa 1966.
4. П. А. Кашин, *Свободные поперечные колебания непрерывно упругосвязанных балок*, Строительная механика, Москва 1974.

5. А. Б. Козлов, *О колебаниях стержней соединенных упругими связями*, Известия Всесоюзного Научно-Исследовательского Института Гидромеханики, 87, 1968
6. Z. ONISZCZUK, *Drgania poprzeczne układu dwóch belek połączonych elementem sprężystym*, Mech. Teoret. i Stos., 12, 1, 1974.
7. Z. ONISZCZUK, *Swobodne drgania poprzeczne układu dwóch belek połączonych inercyjnym elementem sprężystym*, Mech. Teoret. i Stos., 14, 2, 1976.
8. Z. OSBORNE, *Computations of bending modes and mode shapes of single and double beams*, Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics, 10, 1962.
9. S. S. RAO, *Natural vibrations of systems of elastically connected Timoshenko beams*, Journal of the Acoustical Society of America, 55, 6, 1974.
10. H. SAITO, S. CHONAN, *Vibrations of elastically connected double-beam systems*, Technology Reports, Tohoku University, 34, 1, 1969.
11. J. M. SEELIG, W. H. HOPPMANN II, *Impact on an elastically connected double-beam systems*, Journal of Applied Mechanics, 31, 4, 1964.
12. R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne*, Arkady, Warszawa 1964.
13. S. ЗИМБА, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1959.

#### Резюме

#### СВОБОДНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ БАЛОК С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ, УПРУГИМИ И ЖЕСТКИМИ ОПОРАМИ

В работе рассмотрены свободные поперечные колебания системы состоящей из двух параллельных призматических балок, соединенных линейным невесомым упругим элементом. Предполагается, что с балками связаны сосредоточенные массы, упругие и жесткие опоры. Приведены дифференциальные уравнения движения системы. Решения получены с помощью операционного исчисления. Представленный метод можно использовать для определения колебаний многопролетных (неразрезных) и непризматических балок. Дан численный пример расчёта.

#### Summary

#### FREE TRANSVERSE VIBRATIONS OF AN ELASTICALLY CONNECTED DOUBLE-BEAM SYSTEM WITH CONCENTRATED MASSES, ELASTIC AND RIGID SUPPORTS

This paper presents an analysis of free transverse vibrations of the system of two beams with concentrated masses, elastic and rigid supports. Parallel prismatic beams are coupled by means of a massless linear elastic element. The differential equations of motion of the system are solved by application of the method of Laplace-Carson integral transformations. The solutions may be used to find vibrations of multi-span(continuous) and non-uniform beams. A numerical example is given.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 grudnia 1987 roku.*