

## UOGÓLNIONY MODEL DRGAŃ RDZENI STATORÓW TURBOGENERATORÓW

WŁODZIMIERZ PRZYBOROWSKI

*Politechnika Warszawska*

W pracy sformułowano model rdzenia statora turbogeneratorsa składający się z elementarnych modeli modułowych, które cechują się ortotropią mechaniczną. Wyznaczono ogólne rozwiązania dla funkcji przemieszczeń i naprężeń jako stanu elastokinetycznego, który zdeterminowany jest zbiorem wektorów naprężeń elektromagnetycznych zlokalizowanych na brzegach modeli modułowych.

Funkcje naprężeń określono w ogólnej postaci wyrażonej przez wielkości pola elektromagnetycznego oraz w jawnej formie przestrzenno-czasowej.

### 1. Wprowadzenie

Wobec granicznego wzrostu mocy (200, 360, 500, 1300 MW) i przekroczenia dziesięciu ośmiu procent wartości sprawności turbogeneratorów — podstawowych jednostek prądotwórczych systemu energetycznego, jak również uzyskanie optymalnych parametrów elektromagnetycznych oraz osiągnięcia wysokiej efektywności sterowania, najważniejszym problemem w dziedzinie konstrukcji i eksploatacji tych maszyn jest ich niezawodność.

Jest rzeczą naturalną, że graniczny wzrost jednostkowej mocy turbogeneratorów, a więc zintensyfikowanie gęstości prądów i strumieni magnetycznych, powoduje wzmożenie różnych efektów fizycznych (cieplnych, mechanicznych), które mają istotny wpływ na trwałość i niezawodność tych maszyn.

Do głównych zjawisk obniżających trwałość turbogeneratorów zalicza się obecnie drgania elementów (uzwojeń, rdzeni, zawieszona) ich podukładów (magneśnicy i twornika).

Uważa się, że ponad pięćdziesiąt procent awarii turbogeneratorów spowodowanych jest nadwyrężeniem elementów konstrukcyjnych wskutek ich drgań.

Chociaż problem drgań dużych maszyn elektrycznych był podejmowany od ponad trzydziestu lat, to dopiero w ostatnich latach problem ten jest ujmowany na podstawie kontinualnych modeli maszyny z zastosowaniem metod teorii sprężystości [1, 7, 8, 9, 12].

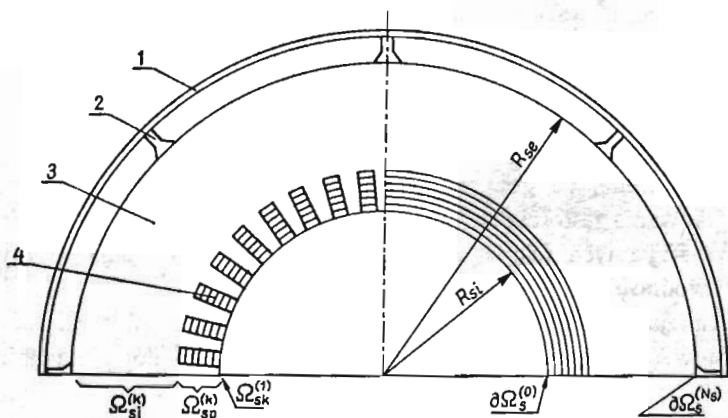
Istotnym elementem metod opisu efektów elastokinetycznych w dużych maszynach synchronicznych — turbogeneratorach, jest szerokie i efektywne ujęcie zjawisk elektromagnetycznych determinujących te efekty. Ważne jest bowiem, aby przez związki elektromagnetyczne uwzględniające liczny zbiór parametrów (eksploatacyjnych<sup>1)</sup> i konstrukcyjnych) maszyny, można było analizować wibro-wymuszające siły elektromagnetyczne i w rezultacie jej stan wibracyjny w funkcji tych parametrów [9, 10, 12].

Ważnym zagadnieniem w opisie zjawisk elastokinetycznych zachodzących w maszynach elektrycznych jest modelowanie konstytutywne ich ustrojów. Związane jest to przede wszystkim z ortotropią blach, z których spakietowany jest rdzeń oraz anizotropią konstrukcyjną ustroju statora wskutek segmentowania i spakietowania rdzenia oraz wkomponowania w niego uzwojeń, które mają inne właściwości materiałowe niż rdzeń (i oczywiście inne zadania techniczne).

Tak więc naturalne wydaje się postulowanie modeli tych maszyn w formie ośrodków cechujących się ortotropią mechaniczną (i magnetyczną). Należy przy tym zauważyć, że ze względu na różnorodność technologii, montażu i konstrukcji turbogeneratorów parametry materiałowe ustrojów tych maszyn odznaczają się dużym zróżnicowaniem, a ponadto zmieniają się podczas ich eksploatacji.

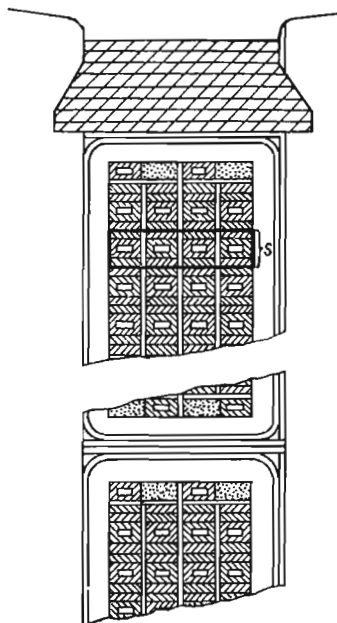
## 2. Model fizyczny rdzenia statora turbogeneratorsa

Zasadniczymi zespołami konstrukcyjnymi statora turbogeneratorsa są: kadłub, zawieszenie, rdzeń i uzwojenie (rys. 1). Kadłub statora wykonany w formie cylindrycznej powłoki, jest konstrukcją nośną maszyny. Wewnętrzne żebra kadłuba oraz grodzie i belki ściągające rdzeń stanowią konstrukcję nośną (zawieszenie) rdzenia. Rdzeń statora wykonany jest z pakietów blach elektrotechnicznych stanowiących obwód magnetyczny maszyny. We-



Rys. 1. Szkic przekroju statora turbogeneratorsa. 1 — kadłub; 2 — zawieszenie; 3 — rdzeń; 4 — pręty.

<sup>1)</sup> Przez parametry eksploatacyjne maszyn uważa się wartości generowanej mocy czynnej ( $P$ ) i biernej ( $Q$ ), które określają stan energetycznego obciążenia maszyny.



Rys. 2. Szkic fragmentu prętów uzwojenia statora turbogenerатора z oznaczoną ( $s$ ) sekwencją przewodów.

wnętrzną część rdzenia stanowi tak zwana strefa żłobkowo-zębowa, w żłobkach której umieszczone jest uzwojenie stanowiące obwód elektryczny maszyny. Elementami konstrukcyjnymi uzwojenia są pręty złożone z przewodów o bardzo małym przekroju względem pręta, a niektóre z tych przewodów mają kanaliki do przepływu czynników chłodzących (rys. 2). Pręty uzwojenia oddzielone są od siebie i rdzenia izolacją warstwową i żłobkową.

Dla opisanej powyżej konstrukcji, która jest standardowa dla tego typu maszyn [3], przyjmuje się model geometryczny w formie nieskończenie długiego pierścieniowego walca o rozmiarach radialnych odpowiadających rzeczywistym wymiarom (powierzchni wewnętrznej  $R_{si}$  i zewnętrznej  $R_{se}$ )<sup>2)</sup> rdzenia statora (rys. 1).

W dotychczas publikowanych pracach [3, 8, 9, 10, 12] strefę żłobkowo-zębową modelowano powierzchnią prądową zlokalizowaną na wewnętrznej powierzchni statora. Jest to dość silne założenie upraszczające, jednak należy zauważyć, że w wielu zagadnieniach elektromagnetycznych maszyn elektrycznych [2, 3] założenie to jest stosowane i daje zadowalające wyniki z punktu widzenia inżynierskiego.

Wprowadzając, w zakresie modelowania konstytutywnego, ortotropię ośrodka rdzenia statora zachodzi konieczność uchylenia powyżej wskazanego założenia zważywszy, że wysokość prętów uzwojenia stanowi około 25% grubości rdzenia [3].

Z drugiej strony jednak, biorąc pod uwagę osobliwą konstrukcję pręta złożonego

<sup>2)</sup> Przyjmuje się walcowy układ współrzędnych fizycznych, którego oś z pokrywa się z osią maszyny i układ ten związany jest ze statorem.

z przewodów o grubości rzędu  $\langle 0,02 - 0,1 \rangle$  wysokości pręta, naturalnym zabiegiem jest wprowadzenie uzwojenia w formie nieskończenie wielu warstw prądowych odpowiadających przewodom lub ich sekwencjom (rys. 2). Określone powierzchnie prądowe reprezentowane są odpowiednią zastępczą gęstością liniową prądu  $J_r$  [11].

Charakterystyczną cechą materiałową rdzeni maszyn elektrycznych, w szczególności stref żłobkowo-zębowych, jest ich niejednorodność fizyczna—mechaniczna i elektromagnetyczna. Spowodowane to jest kompozytową strukturą tej strefy (miedź, izolacja, ferromagnetyk), a ponadto rdzeń nie jest spójny geometrycznie wskutek zawartości kanałów wentylacyjnych. Nie bez znaczenia na własności mechaniczne ma również zróżnicowany stan namagnesowania ośrodka ustroju statora.

Wobec powyższego proponuje się utworzyć modele poszczególnych podobszarów, które cechują się geometryczną regularnością, zwartością konstrukcyjną i lokalną jednorodnością. Tak więc ośrodek ustroju rdzenia statora turbogeneratorskiego strukturalnie niejednorodny zastępuje się modelami ośrodków anizotropowych o niejednorodnych stałych materiałowych.

W tym celu obszar statora jest rozdzielony na podobszary — moduły elementarne, które przyjmuje się analogicznie jak cały model maszyny w formie nieskończenie długich pierścieniowych walców sprężystych o różnych grubościach.

Moduły te cechują się w ogólnym przypadku ortotropią mechaniczną (i magnetyczną). Powierzchnie rozdziału modułów w strefie żłobkowo-zębowej pokrywają się z powierzchniami prądowymi, natomiast w pozostałych podobszarach są sytuowane w miejscach zmiany struktury konstrukcyjnej (np. podstawy zębów) oraz zmiany własności materiałowych.

Zapis analityczny określonego modułu elementarnego ma formę:

$\Omega_s^{(k)} = \{(r, \varphi, z): R^{(k)} < r < R^{(k+1)}, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, z \in \langle 0, l_{Fe}^\infty \rangle\}$ , przy czym  $R^{(k)}$ ,  $R^{(k+1)}$  graniczne promienie modułu,  $l_{Fe}^\infty$  długość rdzenia maszyny (przyjęta w modelu jako nieskończenie wielka).

Do podstawowych modułów można zaliczyć: moduł obejmujący strefę klinów, a więc moduł przyszczelinowy ( $R^{(0)} = R_{sj}$ )  $\Omega_{sk}^{(1)}$ ; moduły ze strefy żłobkowo-zębowej  $\Omega_{sp}^{(k)}$ , których powierzchnie graniczne pokrywają się z nieskończenie wieloma warstwami prądowymi; moduły jarzma statora  $\Omega_{sj}^{(k)}$  o powierzchniach granicznych pokrywających się z brzegami otworów wentylacyjnych lub liniami stałego potencjału pola magnetycznego rozdzielającymi obszary silnych zmian namagnesowania.

Z powyższej charakterystyki modułów wynika, że strefa żłobkowo-zębowa może być *zdyskretyzowana* (w kierunku radialnym) kilkunastoma modułami  $N_{sp} = \langle 8 \div 16 \rangle$  odnoszącymi się do sekwencji przewodów w przecie poszczególnych warstw uzwojenia i kilkoma modułami  $N_{sj} = \langle 2 \div 4 \rangle$  w strefie jarzma.

Zwiększenie liczby modułów elementarnych stanowi o adekwatności postulowanego modelu, jednocześnie zmniejsza efektywność obliczeniową proponowanej metody.

Należy zauważyć, że wskazana dyskretyzacja statora umożliwia wnikliwszy wgląd w przebieg efektów wibracyjnych, w szczególności w obszarach, gdzie znajdują się źródła pola magnetycznego (prądy).

### 3. Zagadnienia elektromagnetyczne

**3.1. Siły i naprężenia elektromagnetyczne.** Sprzężenie zjawisk elektromagnetycznych i elastokinetycznych w maszynach elektrycznych zachodzi wskutek sił i naprężeń o naturze elektromagnetycznej.

Punktem wyjścia tego zagadnienia jest tensor naprężeń Maxwella określony wzorem:

$$T_{ij} = \frac{1}{2} [H_i B_j + H_j B_i - \delta_{ij} (H_k B_k)] \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (1)$$

w którym  $H_i, B_j$  oznaczają składowe wektorów natężenia i indukcji pola magnetycznego.

W powyższym wyrażeniu pomija się oddziaływania strykcyjne jako nie istotne w tych maszynach.

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że środowisko ferromagnetyczne traktuje się jako idealne bez histerezy. Ponadto, efekty namagnesowania i wzmoczenia strumieni w części podobszarów obwodu magnetycznego (zębach), wskutek bardzo znacznych wartości przewodności magnetycznych w tych częściach, uwzględnia się w strukturze funkcji indukcji magnetycznej.

Nieliniowość środowiska można uwzględnić parametrycznie określając przenikalność magnetyczną wg charakterystyk magnesowania w oparciu o stan obciążenia i napięcie na zaciskach maszyny.

Elektromagnetyczną siłę objętościową określa się dywergencją tensora Maxwella (1), która w notacji wskaźnikowej przyjmuje formę:

$$T_{ij,j} = \frac{1}{2} [e_{ikm} e_{kln} H_{n,l} B_m + e_{ikm} e_{kln} B_{n,l} H_m + B_i H_{j,j}], \quad (2)$$

$e_{ijk}$  — symbol permutacyjny Ricciego.

Jeżeli obszary prądowe przyjmuje się w formie nieskończenie małych warstw charakteryzujących się liniową gęstością prądu oraz założy się stałą wartość przenikalności magnetycznej w modułach elementarnych, to elektromagnetyczne siły objętościowe są równe zeru. Zatem jedyną determinantną stanu wibracyjnego maszyny elektrycznej pozostają elektromagnetyczne naprężenia powierzchniowe.

**3.2. Wektor naprężenia elektromagnetycznego.** Wektor naprężenia elektromagnetycznego określa się na podstawie tensora Maxwella według zależności [6]:

$$P_i^{(k)} = [T_{ij}^{(k)} - T_{ij}^{(k+1)}] n_j, \quad (i, j = r, \varphi), \quad k = 0, 1, \dots, N_s, \quad (3)$$

przy czym  $n_j$  oznacza jednostkowy wektor (zewnątrznie) normalny do powierzchni rozdziału obszarów (( $k$ ) i ( $k+1$ )), w których pole magnetyczne określa wskazane pola tensorowe naprężeń.

Biorąc pod uwagę warunki brzegowe dla wielkości elektromagnetycznych:

$$\begin{aligned} [B_i^{(k)} - B_i^{(k+1)}] n_i &= 0, & \xi \in \partial\Omega_s^{(k)}, \\ [H_i^{(k)} - H_i^{(k+1)}] \times n_i &= \begin{cases} 0 & \xi \in \partial\Omega_s^{(0)} \cup \partial\Omega_{sj}^{(k)} \\ J_i^{(k)} & \xi \in \partial\Omega_{sp}^{(k)} \end{cases}, \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>3)</sup> Powierzchnia  $\partial\Omega_s^{(0)}$  oddziela strefę klinów statora od szczeliny przywornikowej;  $N_s = 2 + N_{sp} + N_{sj}$ .

a więc ciągłość składowej normalnej indukcji i ciągłość składowej stycznej natężenia pola lub jej skok na powierzchni zawierającej liniową gęstość prądu  $J_r^{(k)}$  — okład prądu, można składowe wektora naprężenia elektromagnetycznego przedstawić w postaci:

$$P_r^{(k)} = \frac{1}{2} \{ (H_r^{(k)} - H_r^{(k+1)}) B_r^{(k)} - (B_\varphi^{(k)} - B_\varphi^{(k+1)}) H_\varphi^{(k+1)} + J_r^{(k)} B_n^{(k)} \},$$

$$P_\varphi^{(k)} = \frac{1}{2} \{ -J_\varphi^{(k)} B_r^{(k)} + H_r^{(k)} B_\varphi^{(k)} - H_r^{(k+1)} B_\varphi^{(k+1)} \}.$$
(5)

Nie dyskutując w tym miejscu uproszczeń powyższych zależności, w oparciu o własności magnetyczne ośrodków, oraz pomijając dyskusję formy przestrzennoczasowej wielkości elektromagnetycznych należy stwierdzić, że naprężenia brzegowe są funkcją kwadratową funkcji pola  $H$ ,  $B$  i okładu prądu  $J_r^{(k)}$ .

Tak więc wskutek *interferencji* tych wielkości struktura przestrzennoczasowa naprężeń jest bardzo złożona i w ogólnej formie, i w zapisie symbolicznym, może być przedstawiona w postaci:

$$P_\alpha^{(k)} = \sum_n P_{\alpha n} \exp(i(\Lambda_n \varphi - \Omega_n t + \Psi_n)), \quad (\alpha = r, \varphi),$$
(6)

w której:  $P_{\alpha n}$  oznacza składowe ( $r, \varphi$ ) amplitud harmonicznych przestrzennoczasowych naprężeń,  $\Lambda_n$  — liczby falowe,  $\Omega_n$  — częstości,  $\Psi_n$  — kąty przesunięcia fazowego uzależnione od stanu obciążenia maszyny.

Dla podstawowej harmonicznej pola elektromagnetycznego liczba falowa wynosi  $\Lambda_1 = 2p$  a częstość  $\Omega_1 = 2\omega_s$ , gdzie  $2p$  jest liczbą biegunów,  $\omega_s$  jest częstością zmian wielkości elektromagnetycznych, która odpowiada częstotliwości  $f = 50$  Hz.

Dla wyższych harmonicznych pola parametry falowe można napisać w postaci:

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \lambda_{n\varrho} \pm \lambda_{n_s}, & \Omega_n &= \omega_{n\varrho} \pm \omega_{n_s}, \\ \lambda_{n\varrho} &= n_\varrho^{(1)} \pm n_\varrho^{(2)}, & \omega_{n\varrho} &= \omega_{n_\varrho}^{(1)} \pm \omega_{n_\varrho}^{(2)}, \\ \lambda_{n_s} &= n_s^{(1)} \pm n_s^{(2)}, & \omega_{n_s} &= \omega_{n_s}^{(1)} \pm \omega_{n_s}^{(2)}, \\ n_\varrho^{(i)} &= p(2\hat{n} + 1), & \omega_{n_\varrho}^{(i)} &= \frac{\omega_s}{p} n_\varrho^{(i)}, \\ n_s^{(i)} &= p(6\hat{n} \pm 1), & \omega_{n_s}^{(i)} &= \omega_s, \\ & & i &= 1, 2 \quad \hat{n} = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Należy zaznaczyć, że scharakteryzowane parametry falowe naprężeń odnoszą się do tak zwanego pola magnetycznego o strukturze przepływowej [2] lecz przedstawiona metoda może być w prosty sposób rozszerzona na przypadek pola o strukturze reluktancyjnej. Oznacza to, że spektrum liczb falowych  $\Lambda_n$  i częstości  $\Omega_n$  zostanie powiększone o dodatkowy zbiór wartości tych parametrów wynikających ze struktury strefy żłobkowo-zębowej maszyny. Należy przy tym zasygnalizować, że z całego spektrum harmonicznych pola elektromagnetycznego w maszynach elektrycznych mają praktyczne znaczenie tylko harmoniczna podstawowa oraz harmoniczne o numerach zbliżonych do liczby żłobków magniesnicy i twornika maszyny [2].

Reasumując powyższe rozważania można stwierdzić, że w proponowanym modelu fizycznym maszyny przyjmuje się obciążenia — naprężenia elektromagnetyczne jako determinanty efektów wibracyjnych (5). Naprężenia te są zlokalizowane na brzegach określonych modułów elementarnych maszyny, a forma przestrzennoczasowa tych obciążeń wyraża się zależnością (6).

#### 4. Zagadnienie elastokinetyki

**4.1. Równania elastokinetyki.** Wobec przyjętego modelu maszyny równania ruchu przy pominięciu sił masowych, dla poszczególnych modułów elementarnych statora przyjmują (w układzie współrzędnych cylindrycznych) postać [5]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}) = \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi}^{(k)} = \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u_\varphi^{(k)}}{\partial t^2}, \quad k = 1 \dots N_s. \tag{7}$$

Zakładając ortotropowość ośrodków można związki Hooke'a przedstawić w formie [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)} &= a_{rr}^{(k)} \varepsilon_{rr}^{(k)} + a_{r\varphi}^{(k)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_{r\varphi}^{(k)} &= G_{r\varphi}^{(k)} \varepsilon_{r\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} &= a_{\varphi r}^{(k)} \varepsilon_{rr}^{(k)} + a_{\varphi\varphi}^{(k)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \end{aligned} \tag{8}$$

przy czym:

$$a_{rr}^{(k)} = \frac{E_r^{(k)}}{1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)}}, \quad a_{r\varphi}^{(k)} = \frac{E_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)}}{1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)}}, \quad a_{\varphi r}^{(k)} = \frac{E_\varphi^{(k)} \nu_r^{(k)}}{1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)}}, \quad a_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{E_\varphi^{(k)}}{1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)}},$$

$E_r^{(k)}$ ,  $E_\varphi^{(k)}$  — radialny i tangencjalny moduł Younga,  $\nu_r^{(k)}$ ,  $\nu_\varphi^{(k)}$  — stałe Poissona w odpowiednich kierunkach,  $G_{r\varphi}^{(k)}$  — moduł na ścianie,  $\rho^{(k)}$  — gęstość masy ośrodka ( $k$ -tego modułu elementarnego).

Wykorzystując powyższe równania (7) i (8) oraz związki geometryczne ( $\varepsilon_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i})$ ) otrzymuje się układ równań przemieszczeniowych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{a_{11}^{(k)}}{r^2} u_r^{(k)} + \frac{a_{12}^{(k)}}{r^2} \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial \varphi^2} + \frac{a_{13}^{(k)}}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \\ + \frac{a_{14}^{(k)}}{r^2} \frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial \varphi} = a_{15}^{(k)} \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\varphi^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial r} + \frac{a_{21}^{(k)}}{r^2} u_\varphi^{(k)} + \frac{a_{22}^{(k)}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi^{(k)}}{\partial \varphi^2} + \frac{a_{23}^{(k)}}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \\ + \frac{a_{24}^{(k)}}{r^2} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \varphi} = a_{25}^{(k)} \frac{\partial^2 u_\varphi^{(k)}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

w których:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(k)} &= -\frac{a_{\varphi\varphi}^{(k)}}{a_{rr}^{(k)}}, & a_{12}^{(k)} &= \frac{G_{r\varphi}^{(k)}}{a_{rr}^{(k)}}, & a_{13}^{(k)} &= \frac{a_{r\varphi}^{(k)} + G_{r\varphi}^{(k)}}{a_{rr}^{(k)}}, \\ a_{14}^{(k)} &= -\frac{a_{\varphi\varphi}^{(k)} + G_{r\varphi}^{(k)}}{a_{rr}^{(k)}}, & a_{15}^{(k)} &= \frac{\varrho^{(k)}}{a_{rr}^{(k)}}, \\ a_{21}^{(k)} &= -1, & a_{22}^{(k)} &= \frac{a_{\varphi\varphi}^{(k)}}{G_{r\varphi}^{(k)}}, & a_{23}^{(k)} &= \frac{a_{\varphi r}^{(k)} + G_{r\varphi}^{(k)}}{G_{r\varphi}^{(k)}}, \\ a_{24}^{(k)} &= \frac{a_{\varphi\varphi}^{(k)}}{G_{r\varphi}^{(k)}} + 1, & a_{25}^{(k)} &= \frac{\varrho^{(k)}}{G_{r\varphi}^{(k)}}. \end{aligned}$$

Należy zaznaczyć, że oddzielnym i bardzo skomplikowanym zagadnieniem pozostaje wyznaczenie stałych materiałowych ( $E_r$ ,  $E_\varphi$ ,  $G_{r\varphi}$ ,  $\nu_r$ ,  $\nu_\varphi$ ) ponieważ, jak zaznaczono, zależą od konstrukcji i technologii wykonania turbogeneratorsa oraz czasu jego eksploatacji. Wypada jednocześnie nadmienić, że w nielicznych pracach podejmujących to zagadnienie [1, 7, 12] podawane są sprzeczne wartości tych parametrów.

Zupełność zagadnienia opisanego układem równań (9) uzyskuje się dołączając warunki brzegowe w naprężeniach na powierzchniach granicznych modułów:

$$\begin{aligned} [\sigma_{rr}^{(k)} + T_{rr}^{(k)} - \sigma_{rr}^{(k+1)} - T_{rr}^{(k+1)}]n_r &= 0, \\ [\sigma_{r\varphi}^{(k)} + T_{r\varphi}^{(k)} - \sigma_{r\varphi}^{(k+1)} - T_{r\varphi}^{(k+1)}]n_r &= 0, \quad \xi \in \partial\Omega_s^{(k)} \end{aligned} \quad (10)$$

oraz w przemieszczeniach:

$$u_i^{(k)} - u_i^{(k+1)} = 0, \quad \xi \in \partial\Omega_s^{(k)}, \quad i = r, \varphi, \quad k = 1, \dots, N_s - 1. \quad (11)$$

Powyższe równania (10), (11) odnoszą się do powierzchni wewnętrznych modułów elementarnych obszaru statora turbogeneratorsa, natomiast na powierzchniach krańcowych ( $R_{si}$  i  $R_{se}$ ) równania brzegowe przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)}n_r &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_0 - \mu_r^{(1)}}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} \right] B_{r\delta}^2 + (\mu_0 - \mu_\varphi^{(1)}) H_{\varphi\delta}^2, \\ \sigma_{r\varphi}^{(1)}n_r &= -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mu_\varphi^{(1)}}{\mu_r^{(1)}} \right) B_{r\delta} H_{\varphi\delta}, \end{aligned} \quad \xi \in \partial\Omega_s^{(0)} \quad (12)$$

oraz:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(N_s)}n_r &= \frac{1}{2} [\mu_\varphi^{(N_s)} - \mu_0] [H_{\varphi}^{(N_s)}]^2, \\ \sigma_{r\varphi}^{(N_s)}n_r &= 0, \end{aligned} \quad \xi \in \partial\Omega_s^{(N_s)} \quad (13)$$

przy czym:  $B_{r\delta}$  jest składową radialną indukcji a  $H_{\varphi\delta}$  składową styczną natężenia pola magnetycznego w szczelinie przywornikowej,  $\mu_r^{(1)}$ ,  $\mu_\varphi^{(1)}$  — składowe tensora przenikalności magnetycznej w obszarze modułu zawierającego kliny statora modułu przyszczelinowego,  $\mu_0$  — przenikalność magnetyczna powietrza,  $\mu_\varphi^{(N_s)}$  — składowa tangencjalna tensora przenikalności magnetycznej krańcowego zewnętrznego modułu.

**4.2. Rozwiązania równań przemieszczeniowych.** Biorąc pod uwagę formę sił naprężeń (6) wymuszających drgania, poszukuje się rozwiązań dla funkcji przemieszczeń w postaci:

$$u_\alpha^{(k)} = \sum U_{\alpha n}^{(k)}(r) \exp(i(\Lambda_n \varphi - \Omega_n t)), \quad (\alpha = r, \varphi). \quad (14)$$



W oparciu o równania (9) oraz ze względu na powyższe wyrażenie (14) otrzymuje się układ równań dla funkcji  $U_{\alpha n}^{(k)}(r)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_{rn}^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_{rn}^{(k)}}{dr} - \left( \frac{A_{11}^{(k)}}{r^2} + \Omega_{1n}^{(k)} \right) U_{rn}^{(k)} + \frac{A_{12}^{(k)}}{r} \frac{dU_{\varphi n}^{(k)}}{dr} + \frac{A_{13}^{(k)}}{r^2} U_{\varphi n}^{(k)} &= 0, \\ \frac{d^2 U_{\varphi n}^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{dU_{\varphi n}^{(k)}}{dr} - \left( \frac{A_{21}^{(k)}}{r^2} + \Omega_{2n}^{(k)} \right) U_{\varphi n}^{(k)} + \frac{A_{22}^{(k)}}{r} \frac{dU_{rn}^{(k)}}{dr} + \frac{A_{23}^{(k)}}{r^2} U_{rn}^{(k)} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} A_{11}^{(k)} &= \frac{\Lambda_n^2 G_{r\varphi}^{(k)} (1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)}) + E_\varphi^{(k)}}{E_r^{(k)}}, & A_{12}^{(k)} &= \frac{i \Lambda_n G_{r\varphi}^{(k)} (1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)}) + \nu_\varphi^{(k)} E_r^{(k)}}{E_r^{(k)}}, \\ A_{21}^{(k)} &= \frac{\Lambda_n^2 E_\varphi^{(k)} + G_{r\varphi}^{(k)} (1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)})}{G_{r\varphi}^{(k)} (1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)})}, & A_{22}^{(k)} &= \frac{A_{12}^{(k)} E_r^{(k)}}{G_{r\varphi}^{(k)} (1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)})}, \\ A_{13}^{(k)} &= -i \Lambda_n \frac{G_{r\varphi}^{(k)} (1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)}) + E_\varphi^{(k)}}{E_r^{(k)}}, \\ A_{23}^{(k)} &= -\frac{A_{13}^{(k)} E_r^{(k)}}{G_{r\varphi}^{(k)} (1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)})}, & \Omega_{1n}^{(k)} &= -\frac{\Omega_n^2 \varrho^{(k)} (1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)})}{E_r^{(k)}}, & \Omega_{2n}^{(k)} &= -\frac{\Omega_n^2 \varrho^{(k)}}{G_{r\varphi}^{(k)}}. \end{aligned}$$

Układ równań (15) rozwiązuje się analogicznie jak w przypadku równań Bessela, metodą szeregów potęgowych postaci:

$$U_{rn}^{(k)} = \sum_N a_{Nn}^{(k)} r^{p+N}, \quad U_{\varphi n}^{(k)} = \sum_N b_{Nn}^{(k)} r^{p+N}. \quad (16)$$

Współczynniki szeregów potęgowych wyznacza się ze związków rekurencyjnych postaci:

$$\begin{aligned} a_{Nn}^{(k)} [(p+N)^2 - A_{n11}^{(k)}] + b_{Nn}^{(k)} [(p+N) A_{12n}^{(k)} + A_{13n}^{(k)}] - \Omega_{1n}^{(k)} a_{(N-2)n}^{(k)} &= 0, \\ b_{Nn}^{(k)} [(p+N)^2 - A_{21n}^{(k)}] + [(p+N) A_{22n}^{(k)} + A_{23n}^{(k)}] a_{Nn}^{(k)} - \Omega_{2n}^{(k)} b_{(N-2)n}^{(k)} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

w których przez  $p$  oznaczono pierwiastki równania charakterystycznego układu (15).

Równanie charakterystyczne tworzy się przez przyrównanie do zera wyznacznika macierzy układu równań dla współczynników  $a_{on}^{(k)}$ ,  $b_{on}^{(k)}$ , tak więc:

$$p^4 - p^2 \left[ 1 + \frac{E_\varphi^{(k)}}{E_r^{(k)}} + \Lambda_n^2 \frac{E_\varphi^{(k)}}{G_{r\varphi}^{(k)}} - 2 \Lambda_n^2 \nu_\varphi^{(k)} \right] + \frac{E_\varphi^{(k)}}{E_r^{(k)}} (1 - \Lambda_n^2)^2 = 0.$$

Z warunku  $a_{on}^{(k)} \neq 0$ ,  $b_{on}^{(k)} \neq 0$  oraz na podstawie równania charakterystycznego wynikają równości  $a_{(2N+1)n}^{(k)} = 0$  i  $b_{(2N+1)n}^{(k)} = 0$ , a więc szeregi (16) zawierają tylko współczynniki o numerach parzystych.

Ostatecznie, rozwiązania ogólne układu równań przemieszczeniowych mają postać:

$$\begin{aligned} u_r^{(k)} &= \sum_{m=1}^4 \sum_n F_{mn}^{(k)} \sum_n a_{mNn}^{(k)} r^{p_{mn}^{(k)} + 2N} \exp(i \Lambda_n \varphi - \Omega_n t), \\ u_\varphi^{(k)} &= \sum_{m=1}^4 \sum_n G_{mn}^{(k)} \sum_N b_{mNn}^{(k)} r^{p_{mn}^{(k)} + 2N} \exp(i \Lambda_n \varphi - \Omega_n t). \end{aligned} \quad (18)$$

Stałe  $F_{mu}^{(k)}$ ,  $G_{mn}^{(k)}$  nie są od siebie niezależne; związki między nimi wyznacza się z równania utworzonego przez podstawienie (18) do (9) i przyrównania do zera współczynników przy całkach ogólnych.

Wobec założenia  $a_{on}^{(k)} = 1$  (dla każdego  $n \in N_A$  i  $k = 1, \dots, N_s - 1$ ) i związku:

$$b_{mon}^{(k)} = -a_{nion}^{(k)} \frac{(p_{mn}^{(k)})^2 - A_{11n}^{(k)}}{p_{mn}^{(k)} A_{12n}^{(k)} + A_{13n}^{(k)}},$$

wynika  $F_{mn}^{(k)} = G_{mn}^{(k)}$  ( $k = 1, \dots, N_s - 1$ ,  $m = 1, \dots, 4$ ,  $n \in N_A$ ).

**4.3. Funkcje naprężeń.** Po podstawieniu rozwiązań dla funkcji przemieszczeń (18) do wzorów (8) i uwzględnieniu powyższego związku między stałymi całkowania, otrzymuje się następujące zależności dla funkcji naprężeń:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)} &= \frac{E_r^{(k)}}{1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)}} \sum_{m=1}^4 \sum_n F_{mn}^{(k)} \sum_N \{ (\nu_\varphi^{(k)} + p_{mn}^{(k)} + 2N) a_{m2Nn}^{(k)} + i \Lambda_n \nu_\varphi^{(k)} b_{m2Nn}^{(k)} \} \times \\ &\quad \times r^{p_{mn}^{(k)} + 2N - 1} \exp(i \Lambda_n \varphi - \Omega_n t), \\ \sigma_{\varphi r}^{(k)} &= 0.5 G_{r\varphi}^{(k)} \sum_{m=1}^4 \sum_n F_{mn}^{(k)} \sum_N \{ i \Lambda_n a_{m2Nn}^{(k)} + (p_{mn}^{(k)} + 2N - 1) b_{m2Nn}^{(k)} \} \times \\ &\quad \times r^{p_{mn}^{(k)} + 2N - 1} \exp(i \Lambda_n \varphi - \Omega_n t), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} &= \frac{E_\varphi^{(k)}}{1 - \nu_r^{(k)} \nu_\varphi^{(k)}} \sum_{m=1}^4 \sum_n F_{mn}^{(k)} \sum_N \{ [\nu_r^{(k)} (p_{mn}^{(k)} + 2N) + 1] a_{m2Nn}^{(k)} + i \Lambda_n b_{m2Nn}^{(k)} \} \times \\ &\quad \times r^{p_{mn}^{(k)} + 2N - 1} \exp(i \Lambda_n \varphi - \Omega_n t). \end{aligned} \quad (19)$$

Stałe całkowania  $F_{mn}^{(k)}$  ( $m = 1, \dots, 4$ ,  $k = 1, \dots, N_s$ ,  $n \in N_A$ ) wyznacza się z warunków brzegowych (10), (11) i (12), (13).

Należy przy tym zauważyć, że dla najprostszego modelu maszyny zawierającego jeden moduł elementarny ( $N_s = 1$ ) poszukiwane stałe  $F_{mn}^{(1)}$  wyznacza się z układu równań (12), (13).

## 5. Podsumowanie

Zaprezentowany model statora turbogeneratorsa i metoda opisu efektów wibracyjnych tego podokładu maszyny jest najogólniejszym ujęciem tego problemu w odniesieniu do dotychczas publikowanych [1, 7, 8, 9, 12].

Przedstawione podejście umożliwia właściwsze modelowanie konstytutywne poszczególnych podobszarów rdzenia statora oraz szersze uwzględnienie elektromagnetycznych naprężeń wymuszających drgania. Należy przy tym podkreślić, że wprowadzenie zbioru naprężeń elektromagnetycznych zlokalizowanych na nieskończenie małych warstwach prą-

dowych w strefie żłobkowo-zębowej oraz na granicach modułów w strefie jarzm znacznie uniwersalizuje opis efektów vibracyjnych a jednocześnie zapewnia efektywne wyznaczenie rozwiązań dla funkcji elastokinetycznych — przemieszczeń i naprężeń, co ma istotne znaczenie w sprzężonych (słabo) zagadnieniach elektro-magneto-mechanicznych.

Na zakończenie należy zaznaczyć, że podejście analityczne do rozważanego problemu jest bardzo istotne ze względu na możliwość wprowadzenia wielu parametrów turbogeneratorów charakteryzujących reżimy ich pracy, które stosuje się w tzw. opisie obwodowym maszyn. Wprowadzenie ich do np. bezpośrednich metod numerycznych powoduje, że metody te są obecnie nieoperatywne.

### Literatura

1. А. В. Глазенок, В. Э. Школник, *Расчёт частот собственных колебаний сердечника статора турбогенератора*, Электротехника, 7, 1976.
2. В. HELLER, V. НАМАТА, *Harmonic field effects in induction machines*, Academia Publishing House of the CAS, Prague 1977.
3. W. LATEK, *Turbogeneratory*, WNT Warszawa 1970.
4. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, Москва, Наука 1977.
5. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
6. W. NOWACKI, *Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych*, PWN, Warszawa 1983.
7. В. М. Рабинович, *Расчет колебаний шихтованного сердечника статора турбогенератора*, В кн. Методы расчета турбо- и гидрогенераторов, Ленинград, Наука 1975.
8. W. PRZYBOROWSKI, *Drgania ortotropowego rdzenia turbogenerators*, IX Sympozjum — Drgania w układach fizycznych. Poznań—Błażejewko 1980.
9. W. PRZYBOROWSKI, *Elektromagnetyczne radialne drgania statora turbogenerators*, PNPW Elektryka, No 65, 1981.
10. W. PRZYBOROWSKI, *Parametryczne zależności amplitud drgań rdzenia statora turbogenerators*, Arch. Bud. Maszyn, 21, 1 - 2, 1984.
11. W. PRZYBOROWSKI, *Modele i pola prądów zastępczych w strefie aktywnej turbogenerators*, Rozprawy Elektrotechniczne 34, 2, 1988.
12. Л. Я. Станиславский, Л. Г. Гаврилов, О. Э. Остерник, *Вибрационная надежность мощных турбогенераторов*, Энергия, Москва 1975.

### Резюме

#### ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ВИБРАЦИИ СЕРДЕЧНИКА СТАТОРА ТУРБОГЕНЕРАТОРА

В работе сформулирована обобщенная модель статора турбогенератора построена из элементарных моделей обладающих цилиндрической ортотропией.

Получено эффективные решения для перемещений и напряжений (в этих моделях) вызываемые электромагнитными напряжениями распределенными по боковых поверхностях моделей.

Эти усилия представлены в пространственно-временной форме и выражены в общем виде в зависимости от электромагнитных величин.

## Summary

## A GENERALIZED MODEL OF VIBRATIONS OF TURBOGENERATOR STATOR CORES

A model has been formulated of a turbogenerator stator core consisting of module elements with mechanical orthotropy. The general solution has been determined for the stress and displacement functions of elastokinetic state, determined by a set of electromagnetic stress vectors along the boundary of modules. The stress functions have been determined in the general form in terms of electromagnetic field quantities and in explicit space-time form.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 listopada 1987 roku*

---