

## ZASTOSOWANIE METODY LINEARYZACJI DO ANALIZY NIELINIOWEGO OSCYLATORA PODDANEGO DZIAŁANIU PRZYPADKOWYCH IMPULSÓW

WITOLD MAROWSKI

*Politechnika Warszawska*

### 1. Wstęp

W ostatnich latach zagadnienie wyznaczania własności odpowiedzi liniowych, dyskretnych układów dynamicznych poddanych działaniu losowego wymuszenia impulsowego było przedmiotem zainteresowania wielu badaczy. Stosowane podejścia można podzielić na wykorzystujące teorię punktów losowych oraz bazujące na teorii stochastycznych równań różniczkowych i uogólnionym równaniu Fokkera — Plancka — Kołmogorowa (równaniu FPK). Pierwsze z nich umożliwia, przy wykorzystaniu impulsowej funkcji przejścia oraz zasady superpozycji, wyznaczenie momentów odpowiedzi. Problem może być przy tym rozwiązany nie tylko dla poissonowskiego ciągu impulsów, lecz także dla impulsów wzajemnie skorelowanych. Możliwe jest również uwzględnienie statystycznych zależności między poszczególnymi parametrami, charakteryzującymi impuls. Wykorzystaniu tego typu podejścia poświęcone są m.in. prace: [5, 6, 12, 13]. Analizie układów liniowych poddanych działaniu poissonowskiego wymuszenia impulsowego przy użyciu drugiego z wymienionych podejść są poświęcone m.in. prace [11, 14, 16]. W pracy [15] przedstawiono metodę prowadzącą do otrzymania funkcji charakterystycznej odpowiedzi dla układu liniowego o jednym stopniu swobody przy dowolnym rozkładzie prawdopodobieństwa wielkości impulsów.

W pracy [17] badano możliwość wykorzystania metody linearyzacji statystycznej w połączeniu z wyżej wspomnianą metodą funkcji charakterystycznej do określania własności odpowiedzi nieliniowego układu o jednym stopniu swobody z nieliniowością zależną od przemieszczenia. Stosując jako kryterium sprawdzające symulację cyfrową (p. [9]) wykazano użyteczność metody linearyzacji przy rozwiązywaniu zagadnień tego rodzaju.

Obecna praca stanowi uogólnienie rozważań zawartych w [17]. Rozpatrzony będzie układ o jednym stopniu swobody z nieliniowością zależną zarówno od przemieszczenia, jak i prędkości oraz zostanie wykazane, że postać układu równań określających ekwiwalentne liniowe tłumienie i sztywność nie zależy od zakresu wartości tłumienia w układzie zlinearyzowanym.

## 2. Zależności wyjściowe i otrzymywanie równania układu zlinearyzowanego

Przedmiotem rozważań jest układ dynamiczny o jednym stopniu swobody, którego równanie ruchu ma postać:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon g(x, \dot{x}) = P(t), \quad (1)$$

gdzie przez  $g(x, \dot{x})$  oznaczono znaną funkcję nieliniową, przez  $P(t)$  — proces wymuszający, będący ciągiem impulsów o dowolnym rozkładzie prawdopodobieństwa popędów i czasowym rozkładzie Poissona, zaś przez  $\varepsilon$  — parametr określający wpływ nieliniowej części równania (1) na zachowanie się układu.

Zgodnie z zasadami linearyzacji statystycznej (p. np. [1, 10]) równanie (1) można zastąpić równaniem:

$$\ddot{x} + 2\beta_e \dot{x} + \omega_e^2 x + e(x, \dot{x}) = P(t), \quad (2)$$

gdzie  $\beta_e$  jest ekwiwalentnym współczynnikiem tłumienia liniowego,  $\omega_e$  — ekwiwalentną liniową sztywnością, zaś funkcja  $e(x, \dot{x})$  określa błąd linearyzacji i wyraża się związkami:

$$e(x, \dot{x}) = 2(\beta - \beta_e)\dot{x} + (\omega_0^2 - \omega_e^2)x + \varepsilon g(x, \dot{x}) \quad (3)$$

Współczynniki  $\beta_e$  i  $\omega_e$  należy dobrać w ten sposób, aby zminimalizować błąd wprowadzany przez linearyzację układu (1). Błąd ten jest określany jako błąd średniokwadratowy:

$$\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^2(x, \dot{x}) p(x, \dot{x}) dx d\dot{x}, \quad (4)$$

gdzie  $p(x, \dot{x})$  jest dwuwymiarową gęstością prawdopodobieństwa przemieszczenia i prędkości układu zlinearyzowanego.

Wykorzystując warunki konieczne istnienia ekstremum wyrażenia (4) i zamieniając kolejność różniczkowania i całkowania otrzymuje się układ równań określający ekwiwalentne współczynniki tłumienia i sztywności:

$$\beta_e = \beta + \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x} g(x, \dot{x}) p(x, \dot{x}) dx d\dot{x}}{2E[\dot{x}^2]}, \quad (5)$$

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 + \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x, \dot{x}) p(x, \dot{x}) dx d\dot{x}}{E[x^2]},$$

gdzie przez  $E$  oznaczono operację znajdowania wartości średniej.

Należy obecnie przyjąć konkretną postać funkcji nieliniowej. W pracy założono, że jest:

$$g(x, \dot{x}) = \alpha \dot{x}^3 + \eta x^3. \quad (6)$$

Równania (5) można wówczas przepisać jak niżej:

$$\beta_e = \beta + \frac{\varepsilon}{2E[\dot{x}^2]} \left[ \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 p(x, \dot{x}) dx d\dot{x} + \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \dot{x} p(x, \dot{x}) dx d\dot{x} \right], \quad (7)$$

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 + \frac{\varepsilon}{E[x^2]} \left[ \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \dot{x}^3 p(x, \dot{x}) dx d\dot{x} + \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 p(x, \dot{x}) dx d\dot{x} \right],$$

lub wprowadzając oznaczenie:

$$m_{ki} = E[x^k \dot{x}^i] \quad (8)$$

można napisać:

$$\beta_e = \beta + \frac{\varepsilon \alpha m_{04} + \varepsilon \eta m_{31}}{2m_{02}}, \quad (9)$$

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 + \frac{\varepsilon \alpha m_{13} + \varepsilon \eta m_{40}}{m_{20}}.$$

Jak widać, dla wykorzystania układu równań (9) konieczne jest wyznaczenie niektórych momentów odpowiedzi układu zlinearyzowanego. W tym celu zostanie wykorzystana metoda funkcji charakterystycznej, opisana w pracy [15].

### 3. Wyznaczenie funkcji charakterystycznej odpowiedzi układu zlinearyzowanego

Równanie układu zlinearyzowanego ma postać:

$$\ddot{x} + 2\beta_e \dot{x} + \omega_e^2 x = P(t). \quad (10)$$

W przypadku małego tłumienia ( $\beta_e < \omega_e$ ) funkcja charakterystyczna  $\psi$  odpowiedzi tego układu jest określona wzorem wyprowadzonym w pracy [15]:

$$\psi(z_1, z_2, t) = \exp \left[ -\lambda \int_0^t \left\{ 1 - N \left( e^{-\beta_e(t-\xi)} \left[ \frac{1}{\omega} (z_1 - \beta_e z_2) \sin \omega(t-\xi) + z_2 \cos \omega(t-\xi) \right] \right) \right\} d\xi \right], \quad (11)$$

gdzie:

$$\omega^2 = \omega_e^2 - \beta_e^2, \quad (12)$$

$\lambda$  jest intensywnością procesu Poissona, zaś  $N$  — funkcją charakterystyczną rozkładu prawdopodobieństwa popędów.

Obecnie zostanie rozważony przypadek tłumienia nadkrytycznego ( $\beta_e > \omega_e$ ). Równanie (10) może być po podstawieniu  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$  przedstawione w postaci:

$$dx_1 = x_2 dt, \quad (13)$$

$$dx_2 = -(2\beta_e x_2 + \omega_e^2 x_1) dt + \int w(dt, du),$$

gdzie  $v$  jest losową miarą Poissona. Odpowiadające układowi (13) uogólnione równanie FPK (p. [3]) ma postać:

$$\frac{\partial p(x_1, x_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial [x_2 p(x_1, x_2, t)]}{\partial x_1} - \frac{\partial [(2\beta_e x_2 + \omega_e^2 x_1) p(x_1, x_2, t)]}{\partial x_2} + \lambda p(x_1, x_2, t) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2 - u, t) \eta(u) du = 0, \quad (14)$$

gdzie  $\lambda$  jest intensywnością procesu Poissona,  $\eta(u)$  — gęstością prawdopodobieństwa wielkości impulsów, zaś  $p$  oznacza gęstość prawdopodobieństwa odpowiedzi układu zlinearyzowanego.

Rozwiązanie równania (14) nie jest znane. Można jednak, dokonując transformacji Fouriera, otrzymać z (14) równanie pierwszego rzędu, określające funkcję charakterystyczną  $\psi(z_1, z_2, t)$  odpowiedzi układu zlinearyzowanego:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (2\beta_e z_2 - z_1) \frac{\partial \psi}{\partial z_2} + \omega_e^2 z_2 \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + \lambda \psi - \lambda \psi N(z_2) = 0. \quad (15)$$

Sprowadzając to równanie do równania jednorodnego (p. [8, 15, 17]) i stosując do rozwiązania tego ostatniego metodę charakterystyk, opisaną np. w [7], otrzymuje się związki:

$$\psi = \exp \left\{ -\lambda \int_0^s [1 - N(z_2)] d\xi \right\}, \quad (16)$$

$$z_2 = \frac{1}{\omega_e^2} \frac{dz_1}{ds}, \quad (17)$$

$$\frac{d^2 z_1}{ds^2} - 2\beta_e \frac{dz_1}{ds} + \omega_e^2 z_1 = 0. \quad (18)$$

Przyjmując warunki początkowe  $z_1(0) = w_1$ ,  $z_2(0) = w_2$  można dla  $\beta_e > \omega_e$  zapisać rozwiązanie równania (18) w następujący sposób:

$$z_1(s) = e^{\beta_e s} \left( w_1 \cosh \tilde{\omega} s + \frac{w_2 - \beta_e w_1}{\tilde{\omega}} \sinh \tilde{\omega} s \right), \quad (19)$$

gdzie:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\beta_e^2 - \omega_e^2}. \quad (20)$$

Z kolei z (17) po pewnych przekształceniach otrzymuje się zależność:

$$z_2(s) = \frac{e^{\beta_e s}}{\omega_e^2} \left[ w_2 \cosh \tilde{\omega} s + \frac{\beta_e w_2 - \omega_e^2 w_1}{\tilde{\omega}} \sinh \tilde{\omega} s \right]. \quad (21)$$

Zatem wzór (16) można przepisać w postaci:

$$\psi = \exp \left[ -\lambda \int_0^s \left\{ 1 - N \left[ \frac{e^{\beta_e \xi}}{\omega_e^2} \left( w_2 \cosh \tilde{\omega} \xi + \frac{\beta_e w_2 - \omega_e^2 w_1}{\tilde{\omega}} \sinh \tilde{\omega} \xi \right) \right] \right\} d\xi \right]. \quad (22)$$

W wyrażeniu tym należy wyznaczyć  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $s$  w zależności od argumentów  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $t$  funkcji charakterystycznej  $\psi$ . Wykorzystuje się w tym celu wzory (19) i (21), uzupełnione związkiem:

$$t = s. \quad (23)$$

Po dość żmudnych przekształceniach otrzymuje się ostateczną postać wyrażenia, określającego funkcję charakterystyczną odpowiedzi układu zlinearyzowanego w przypadku tłumienia nadkrytycznego:

$$\psi(z_1, z_2, t) = \exp \left[ -\lambda \int_0^t \left\{ 1 - N \left( e^{-\beta_e(t-\xi)} \left[ \frac{1}{\tilde{\omega}} (z_1 - \beta_e z_2) \sinh \tilde{\omega}(t-\xi) + z_2 \cosh \tilde{\omega}(t-\xi) \right] \right) \right\} d\xi \right]. \quad (24)$$

Zastosowanie analogicznej metody w przypadku tłumienia krytycznego ( $\beta_e = \omega_e$ ) prowadzi do otrzymania wyrażenia na funkcję charakterystyczną, zapisanego niżej:

$$\psi(z_1, z_2, t) = \exp \left[ -\lambda \int_0^t \left\{ 1 - N(e^{-\beta_e(t-\xi)} [(z_1 - \beta_e z_2)(t-\xi) + z_2]) \right\} d\xi \right]. \quad (25)$$

Zatem wzory (11), (25) i (24) określają funkcję charakterystyczną odpowiedzi układu zlinearyzowanego, odpowiednio dla przypadków tłumienia podkrytycznego, krytycznego i nadkrytycznego.

#### 4. Zastosowanie metody funkcji charakterystycznej do wyznaczenia współczynników ekwiwalentnego tłumienia i sztywności

Współczynniki  $\beta_e$  i  $\omega_e$  są określone przez układ równań (9). Jednak dla praktycznego wykorzystania tego układu należy wyznaczyć występujące w prawych stronach jego równań momenty procesu wyjściowego  $m_{20}$ ,  $m_{02}$ ,  $m_{40}$ ,  $m_{04}$ ,  $m_{31}$  i  $m_{13}$  w zależności od  $\beta_e$  i  $\omega_e$  oraz znanych parametrów procesu wymuszającego. W tym celu zostaną wykorzystane zależności określające funkcję charakterystyczną  $\psi$ , związki pomiędzy funkcją charakterystyczną a półniezmiennikami  $\kappa_{mn}$  rozkładu prawdopodobieństwa odpowiedzi układu oraz zależności między momentami i półniezmiennikami. Możliwe byłoby również bezpośrednio obliczenie momentów z funkcji charakterystycznej, jednak postępowanie opisane wyżej wydaje się nieco wygodniejsze.

Sposób wyprowadzania zależności między momentami i półniezmiennikami dla jednowymiarowej gęstości prawdopodobieństwa został opisany np. w [2]. Uogólnienie na przypadek wielowymiarowy zawiera praca [4]. Postacie związków wykorzystywanych w dalszych rozważaniach przedstawiono poniżej:

$$m_{20} = \kappa_{20} + \kappa_{10}^2, \quad (26)$$

$$m_{02} = \kappa_{02} + \kappa_{01}^2, \quad (27)$$

$$m_{40} = \kappa_{40} + 3\kappa_{20}^2 + 4\kappa_{10}\kappa_{30} + 6\kappa_{10}^2\kappa_{20} + \kappa_{10}^4, \quad (28)$$

$$m_{31} = \kappa_{31} + 3\kappa_{10}\kappa_{21} + \kappa_{01}\kappa_{30} + 3\kappa_{20}\kappa_{11} + 3\kappa_{10}^2\kappa_{11} + 3\kappa_{10}\kappa_{01}\kappa_{20} + \kappa_{10}^3\kappa_{01}, \quad (29)$$

$$m_{13} = \kappa_{13} + \kappa_{10}\kappa_{03} + 3\kappa_{01}\kappa_{12} + 3\kappa_{11}\kappa_{02} + 3\kappa_{10}\kappa_{01}\kappa_{02} + 3\kappa_{01}^2\kappa_{11} + \kappa_{10}\kappa_{01}^3, \quad (30)$$

$$m_{04} = \kappa_{04} + 3\kappa_{02}^2 + 4\kappa_{01}\kappa_{03} + 6\kappa_{01}^2\kappa_{02} + \kappa_{01}^4. \quad (31)$$

Z wzorów (26) + (31) widać, że dla wyznaczenia momentów, występujących w prawych

stronach równań układu (9) należy wyznaczyć następujące półniezmienniki:  $\kappa_{10}$ ,  $\kappa_{01}$ ,  $\kappa_{20}$ ,  $\kappa_{11}$ ,  $\kappa_{02}$ ,  $\kappa_{30}$ ,  $\kappa_{21}$ ,  $\kappa_{12}$ ,  $\kappa_{03}$ ,  $\kappa_{40}$ ,  $\kappa_{31}$ ,  $\kappa_{13}$ ,  $\kappa_{04}$ .

Jak wiadomo, półniezmienniki można wyznaczyć na podstawie funkcji charakterystycznej, korzystając z zależności:

$$\kappa_{mn} = \frac{\partial^{m+n} \ln \psi}{\partial z_1^m \partial z_2^n} \Big|_{z_1=z_2=0} \quad (32)$$

Ze wzorów (11), (25) i (24) widać, iż we wszystkich trzech przypadkach argument funkcji charakterystycznej  $N$  jest liniową funkcją  $z_1$  i  $z_2$ . Oznaczając ten argument przez  $z$  oraz uwzględniając, że różniczkowanie funkcji charakterystycznej  $N$  przy  $z_1 = z_2 = z = 0$  jest równoznaczne z wyznaczaniem momentów  $\mu_{m+n}$  rozkładu prawdopodobieństwa wielkości impulsów, można otrzymać ogólny wzór na półniezmiennik rozkładu prawdopodobieństwa odpowiedzi układu:

$$\kappa_{m+n} = \lambda \mu_{m+n} \int_0^t \left( \frac{\partial z}{\partial z_1} \right)^m \Big|_{z_1=z_2=0} \left( \frac{\partial z}{\partial z_2} \right)^n \Big|_{z_1=z_2=0} d\xi. \quad (33)$$

W każdym z rozważanych przypadków z wzoru tego otrzymuje się, po podstawieniu odpowiedniej funkcji w miejsce  $z$ , wzór określający wartość półniezmiennika dla określonego zakresu wielkości tłumienia. Dla tłumienia podkrytycznego ( $\beta_e < \omega_e$ ) jest:

$$\kappa_{mn} = \frac{\lambda \mu_{m+n}}{\omega^m} \int_0^t e^{-\beta_e(m+n)(t-\xi)} \sin^m \omega(t-\xi) \left[ \cos \omega(t-\xi) - \frac{\beta_e}{\omega} \sin \omega(t-\xi) \right]^n d\xi. \quad (34)$$

Dla tłumienia krytycznego ( $\beta_e = \omega_e$ ) otrzymuje się:

$$\kappa_{mn} = \lambda \mu_{m+n} \int_0^t e^{-\beta_e(m+n)\tau} \tau^m (1 - \beta_e \tau)^n d\tau. \quad (35)$$

W przypadku tłumienia nadkrytycznego ( $\beta_e > \omega_e$ ) rozważany wzór ma postać:

$$\begin{aligned} \kappa_{mn} = \frac{\lambda \mu_{m+n}}{\tilde{\omega}^m} \int_0^t e^{-\beta_e(m+n)(t-\xi)} \sinh^m \tilde{\omega}(t-\xi) \times \\ \times \left[ \cosh \tilde{\omega}(t-\xi) - \frac{\beta_e}{\tilde{\omega}} \sinh \tilde{\omega}(t-\xi) \right]^n d\xi. \end{aligned} \quad (36)$$

Przy obliczaniu  $\beta_e$  i  $\omega_e$  rozważa się stan ustalony układu. Zatem we wzorach (34) ÷ (36) należy dokonać przejścia granicznego dla  $t \rightarrow \infty$ , uzyskując w ten sposób zależności, pozwalające na wyznaczenie ustalonych wartości półniezmienników  $\kappa_{mn}^u$ . Można przy tym wykazać, iż bez względu na wielkość ekwiwalentnego tłumienia  $\beta_e$  otrzymuje się związki o postaci:

$$\begin{aligned} \kappa_{10}^u &= \frac{\lambda \mu_1}{\omega_e^2}, \\ \kappa_{01}^u &= 0, \\ \kappa_{20}^u &= \frac{\lambda \mu_2}{4\beta_e \omega_e^2}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_{11}'' &= 0, \\
 \kappa_{02}'' &= \frac{\lambda u_2}{4\beta_e}, \\
 \kappa_{30}'' &= \frac{2\lambda\mu_3}{3\omega_e^2(8\beta_e^2 + \omega_e^2)}, \\
 \kappa_{21}'' &= 0, \\
 \kappa_{12}'' &= \frac{\lambda\mu_3}{3(8\beta_e^2 + \omega_e^2)}, \\
 \kappa_{03}'' &= \frac{4\lambda\mu_3\beta_e}{3(8\beta_e^2 + \omega_e^2)}, \\
 \kappa_{40}'' &= \frac{3\lambda\mu_4}{32\beta_e\omega_e^2(3\beta_e^2 + \omega_e^2)}, \\
 \kappa_{31}'' &= 0 \\
 \kappa_{13}'' &= \frac{\lambda\mu_4}{16(3\beta_e^2 + \omega_e^2)}, \\
 \kappa_{04}'' &= \frac{3\lambda\mu_4(4\beta_e^2 + \omega_e^2)}{32\beta_e(3\beta_e^2 + \omega_e^2)}.
 \end{aligned} \tag{37}$$

[cd.]

Podstawiając wzory (37) do zależności (26) ÷ (31) między momentami i półniezmiennikami otrzymuje się wyrażenia, określające momenty odpowiedzi układu w zależności od  $\beta_e$ ,  $\omega_e$  i parametrów procesu wymuszającego. Wyrażenia te są identyczne dla tłumienia podkrytycznego, krytycznego i nadkrytycznego, identyczne więc będą dla tych trzech przypadków układy równań określających ekwiwalentne tłumienie liniowe i ekwiwalentną liniową sztywność. W ten sposób zostało wykazane, iż zbędne jest założenie małego tłumienia, przyjmowane w pracach [8, 15, 17] przy wyprowadzaniu równania, z którego oblicza się współczynnik linearyzacji.

Postać układu (9) dla ogólnego przypadku dowolnego rozkładu prawdopodobieństwa wielkości impulsów byłaby bardzo złożona, co wynika głównie z rozbudowanego charakteru niektórych z wzorów (26) ÷ (31). Zatem układ ten zostanie zapisany jedynie w przypadku szczególnym, rozważanym w następnym punkcie.

### 5. Przypadek normalnego o zerowej średniej rozkładu prawdopodobieństwa wielkości impulsów

Obecnie zostanie przyjęte założenie, iż proces wymuszający ma normalny, o zerowej wartości średniej rozkład prawdopodobieństwa wielkości impulsów, tj. zachodzą związki:

$$\mu_1 = 0, \mu_3 = 0, \mu_2 = \sigma^2, \mu_4 = 3\sigma^4. \tag{38}$$

Wzory (37), określające ustalone wartości półniezmienników, można w takim przypadku zapisać w postaci:

$$\kappa_{20}'' = \frac{\lambda\sigma^2}{4\beta_e\omega_e^2}, \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{02}'' &= \frac{\lambda\sigma^2}{4\beta_e}, \\ \kappa_{40}'' &= \frac{9\lambda\sigma^4}{32\beta_e\omega_e^2(\omega_e^2+3\beta_e^2)}, \\ \kappa_{13}'' &= \frac{3\lambda\sigma^4}{16(\omega_e^2+3\beta_e^2)}, \\ \kappa_{04}'' &= \frac{9\lambda\sigma^4(4\beta_e^2+\omega_e^2)}{32\beta_e(3\beta_e^2+\omega_e^2)}, \end{aligned} \quad (39)$$

[cd.]

$$\kappa_{10}'' = \kappa_{01}'' = \kappa_{11}'' = \kappa_{30}'' = \kappa_{21}'' = \kappa_{12}'' = \kappa_{03}'' = \kappa_{31}'' = 0.$$

Z zależności (26)÷(31) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} m_{20} &= \kappa_{20}, \\ m_{02} &= \kappa_{02}, \\ m_{40} &= \kappa_{40} + 3\kappa_{20}, \\ m_{13} &= \kappa_{13}, \\ m_{04} &= \kappa_{04} + 3\kappa_{02}. \end{aligned} \quad (40)$$

Zatem układ (9) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \beta_e &= \beta + \frac{\varepsilon\alpha(\kappa_{04} + 3\kappa_{02})}{2\kappa_{02}}, \\ \omega_e^2 &= \omega_0^2 + \frac{\varepsilon\alpha\kappa_{13} + \varepsilon\eta(\kappa_{40} + 3\kappa_{20})}{\kappa_{20}}, \end{aligned} \quad (41)$$

lub po uwzględnieniu wzorów (39) i przekształceniach:

$$\begin{aligned} 48\beta_e^4 + 16\beta_e^2\omega_e^2 - 12(4\beta + 3\varepsilon\alpha\sigma^2)\beta_e^3 - 18\varepsilon\alpha\lambda\sigma^2\beta_e^2 - \\ - (16\beta + 9\varepsilon\alpha\sigma^2)\beta_e\omega_e^2 - 6\varepsilon\alpha\lambda\sigma^2\omega_e^2 = 0, \\ 24\beta_e^3\omega_e^4 - 24\omega_0^2\beta_e^3\omega_e^2 - 6\varepsilon\alpha\sigma^2\beta_e^2\omega_e^4 + 8\beta_e\omega_e^6 - \\ - 8\omega_0^2\beta_e\omega_e^4 - 18\varepsilon\eta\lambda\sigma^2\beta_e^2 - 9\varepsilon\eta\sigma^2\beta_e\omega_e^2 - \\ - 6\varepsilon\eta\lambda\sigma^2\omega_e^2 = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Obecnie rozpatrzone zostaną szczególne przypadki układu (42).

W przypadku, gdy rozważany układ jest liniowy, tj. gdy  $g(x, \dot{x}) \equiv 0$ , a więc  $\alpha = \eta = 0$ , z (42) po przekształceniach otrzymuje się:

$$\begin{aligned} 16\beta_e(\beta_e - \beta)(3\beta_e^2 + \omega_e^2) &= 0, \\ 8\beta_e\omega_e^2(\omega_e^2 - \omega_0^2)(3\beta_e^2 + \omega_e^2) &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Jedynym możliwym rozwiązaniem układu (43) jest  $\beta_e = \beta$  i  $\omega_e^2 = \omega_0^2$ , co jest oczywiste w związku z rozważaniem liniowego układu dynamicznego.

Dla nieliniowości zależnej tylko od przemieszczenia układu, tj. dla  $\alpha = 0$ , z pierwszego z równań (42) otrzymuje się warunek  $\beta_e = \beta$ . Natomiast drugie równanie można sprowadzić do postaci:

$$\omega_e^6 + (3\beta^2 - \omega_0^2)\omega_e^4 - \frac{3}{8} \left( 8\omega_0^2\beta^2 + \frac{2\varepsilon\eta\lambda\sigma^2}{\beta} + 3\varepsilon\eta\sigma^2 \right) \omega_e^2 - \frac{9}{4} \varepsilon\eta\lambda\sigma^2\beta = 0, \quad (44)$$



która, po uwzględnieniu pewnej różnicy w stosowanych oznaczeniach i w wyjściowej postaci równania ruchu (1), jest identyczna z zależnością otrzymaną w pracach [8, 17].

A więc, jak można się było tego spodziewać, przy nieliniowości zależnej tylko od przemieszczenia ekwiwalentny współczynnik tłumienia równy jest współczynnikowi tłumienia w wyjściowym równaniu nieliniowym.

Z kolei w przypadku nieliniowości zależnej tylko od prędkości, tj. dla  $\eta = 0$ , z układu (41) po wstawieniu wartości pólniezienników i przekształceniach można otrzymać równania:

$$\begin{aligned}\beta_e &= \beta + \frac{9\varepsilon\alpha\sigma^2(4\beta_e^2 + \omega_e^2)}{16(3\beta_e^2 + \omega_e^2)} + \frac{3\varepsilon\alpha\lambda\sigma^2}{8\beta_e}, \\ \omega_e^2 &= \omega_0^2 + \frac{3\varepsilon\alpha\sigma^2\beta_e\omega_e^2}{4(\omega_e^2 + 3\beta_e^2)}.\end{aligned}\quad (45)$$

Z drugiego z równań (45) wynika, iż w tym przypadku jest  $\omega_e \neq \omega_0$ , zatem ekwiwalentna sztywność układu zlinearyzowanego różni się od sztywności występującej w wyjściowym równaniu układu nieliniowego.

Po obliczeniu ekwiwalentnej sztywności  $\omega_e$  i ekwiwalentnego tłumienia liniowego  $\beta_e$  można wyznaczyć funkcję charakterystyczną, a także wartości ustalone oraz przebiegi w czasie momentów odpowiedzi układu. Do ostatniego celu można wykorzystać wzory (34), (35) lub (36).

W rozważanym przypadku szczególnym, wobec zerowej wartości średniej impulsu ( $\mu_1 = 0$ ), z wzorów tych otrzymuje się:

$$m_{10}(t) \equiv 0 \quad \text{i} \quad m_{01}(t) \equiv 0. \quad (46)$$

Wobec zerowości wartości średnich współrzędnych fazowych ich drugie momenty zwykle i centralne pokrywają się, przy czym odpowiednie wyrażenia zależą oczywiście od tego, czy tłumienie jest podkrytyczne, krytyczne, czy nadkrytyczne. Przykładowo wariancję przemieszczenia układu można wyrazić za pomocą wzorów:

— dla tłumienia podkrytycznego:

$$m_{20}(t) = \frac{\lambda\sigma^2}{2\omega^2\omega_e^2} \left[ \frac{\omega^2}{2\beta_e} (1 - e^{-2\beta_e t}) - e^{-2\beta_e t} \sin \omega t (\beta_e \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \right], \quad (47)$$

— dla tłumienia krytycznego:

$$m_{20}(t) = \frac{\lambda\sigma^2}{4\beta_e^3} \{1 - e^{-2\beta_e t} [2\beta_e t (\beta_e t + 1) + 1]\} \quad (48)$$

(uwzględniono tu, że  $\beta_e = \omega_e$ ),

— dla tłumienia nadkrytycznego:

$$\begin{aligned}m_{20}(t) &= \frac{\lambda\sigma^2}{4\tilde{\omega}^2} \left\{ \frac{1}{2(\beta_e - \tilde{\omega})} [1 - e^{-2(\beta_e - \tilde{\omega})t}] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\beta_e} (1 - e^{-2\beta_e t}) + \frac{1}{2(\beta_e + \tilde{\omega})} [1 - e^{-2(\beta_e + \tilde{\omega})t}] \right\}.\end{aligned}\quad (49)$$

Podobnie można otrzymać wzory określające przebieg zmienności w czasie wariancji prędkości.

Warto zauważyć, iż z wzorów (47), (48) i (49) dla  $t \rightarrow \infty$  otrzymuje się:

$$m_{20}^{\#} = \frac{\lambda \sigma^2}{4\omega_e^2 \beta_e}, \quad (50)$$

a więc wartość identyczną z wynikającą z pierwszych wzorów z grup (39) i (40). Analogiczną zbieżność uzyskuje się również dla wariancji prędkości.

## 6. Opis metody i przegląd wyników obliczeń numerycznych

Otrzymanie ścisłego rozwiązania układu równań (42) jest niemożliwe ze względu na jego złożoną postać. Należy zatem poszukiwać tego rozwiązania na drodze numerycznej. Z dobrym skutkiem został w tym celu zastosowany prosty algorytm, polegający na wyodrębnieniu prostokątnego obszaru na płaszczyźnie zmiennych  $\beta_e$ ,  $\omega_e^2$ , w którym powinno znaleźć się rozwiązanie układu (42) i systematycznym jego przeszukiwaniu z określonym krokiem, w ogólnym przypadku różnym dla obu zmiennych. W kolejnych punktach tego obszaru były obliczane wartości lewych stron równań układu (42). Dokładność otrzymanego przybliżenia była określana za pomocą wskaźnika jakości równego sumie kwadratów lewych stron równań (42), obliczonych w rozważanym punkcie ( $\beta_e$ ,  $\omega_e^2$ ). Najlepsze z uzyskanych przybliżeń było zapamiętywane i wartości odpowiadającego mu wskaźnika jakości używano jako kryterium porównawczego przy dalszych obliczeniach, aż do chwili uzyskania lepszego wyniku. Po zakończeniu przeszukiwania zadanego obszaru możliwe było albo zaakceptowanie otrzymanego przybliżenia, albo dokonanie zmiany granic obszaru i poszukiwanie lepszego punktu.

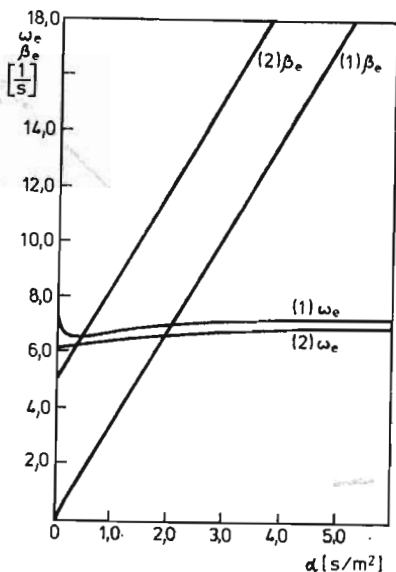
Metoda ta pozwoliła na w miarę szybkie wyznaczanie przybliżonych rozwiązań układu (42). Można było przy tym uzyskać zadowalającą dokładność nawet w najtrudniejszych z rozważanych przypadków bez nadmiernego przedłużania czasu obliczeń, prowadzonych na stosunkowo powolnej maszynie cyfrowej SM-4.

Obecnie zostanie dokonany krótki przegląd otrzymanych wyników, ilustrujący wpływ parametrów układu lub procesu wymuszającego na wartości ekwiwalentnego tłumienia liniowego  $\beta_e$  i ekwiwalentnej liniowej sztywności  $\omega_e$ .

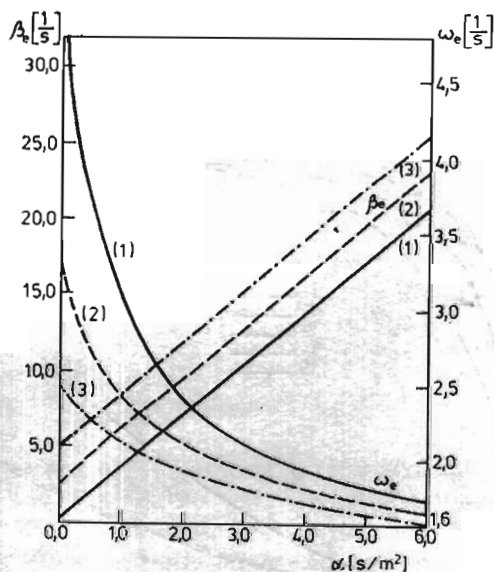
Z przeprowadzonych obliczeń wynika, iż ekwiwalentny współczynnik liniowego tłumienia  $\beta_e$  praktycznie nie zależy od współczynnika  $\eta$ , występującego w równaniu badanego układu przy nieliniowej części siły restytucyjnej (przynajmniej w zakresie uzasadnionych rodzajem rozważanego zagadnienia wartości tego współczynnika).

Wiąże się z tym podobna postać zależności  $\beta_e$  od małego parametru  $\varepsilon$  i współczynnika  $\alpha$  przy nieliniowej składowej siły tłumienia (p. (1), (6)). Przykłady takiej zależności pokazano na rys. 1 i 2.

Zależność  $\beta_e$  od współczynnika liniowego tłumienia okazała się praktycznie liniowa. Stwierdzono minimalne zmniejszenie się nachylenia wykresu dla  $\beta > \beta_{kr}$ , jednak jest to trudno dostrzegalne nawet na rysunku wykonanym w dużej podziałce. Zmiana współczynnika  $\alpha$ , określającego wartość nieliniowej części siły tłumiącej, powoduje równoległe przesunięcie wykresu, jednak nie o wartość równą przyrostowi  $\alpha$ . Przy małych wartościach  $\beta$  i  $\alpha$  widoczne jest odchylenie wykresu od liniowości. Oczywiście, zgodnie z rozważaniami



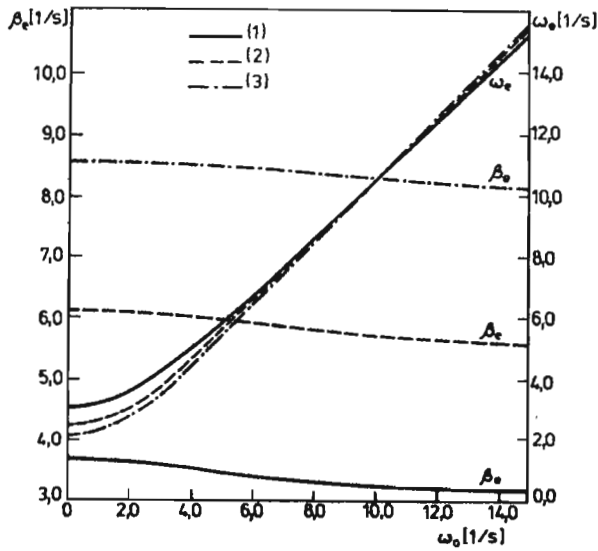
Rys. 1. Zależność ekwiwalentnej sztywności i tłumienia od współczynnika nieliniowej składowej siły tłumienia  $\alpha$ . Dane:  $\omega_0 = 6$  [1/s],  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\eta = 36$  [1/m<sup>2</sup> s<sup>2</sup>],  $\sigma = 3$  [m/s],  $\lambda = 1$  [1/s], (1)  $\beta = 0$ , (2)  $\beta = 5$  [1/s].



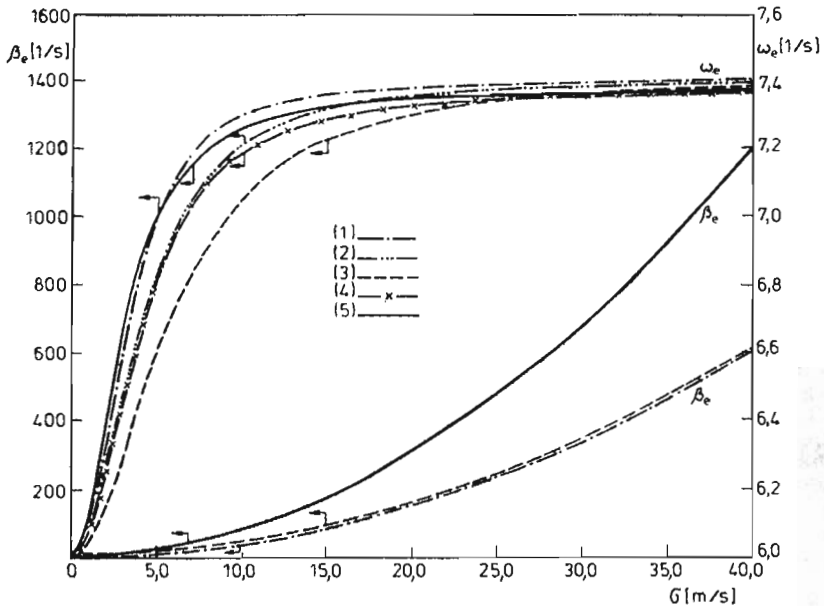
Rys. 2. Zależność ekwiwalentnej sztywności i tłumienia od współczynnika  $\alpha$  dla układu z czysto nieliniową siłą restytucyjną. Dane:  $\omega_0 = 0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\eta = 36$  [1/m<sup>2</sup> s<sup>2</sup>],  $\sigma = 3$  [m/s],  $\lambda = 1$  [1/s], (1)  $\beta = 0$ , (2)  $\beta = 2.5$  [1/s], (3)  $\beta = 5$  [1/s].

z poprzedniego punktu, w przypadku nieliniowości zależnej tylko od przemieszczenia zależność  $\beta_e(\beta)$  jest dokładnie liniowa.

Wpływ liniowej sztywności  $\omega_0$  na wielkość ekwiwalentnego tłumienia  $\beta_e$  nie jest zbyt



Rys. 3. Zależność ekwiwalentnej sztywności i tłumienia od liniowej sztywności  $\omega_0$ . Dane:  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\alpha = 1$  [s/m<sup>2</sup>],  $\eta = 36$  [1/m<sup>2</sup> s<sup>2</sup>],  $\sigma = 3$  [m/s],  $\lambda = 1$  [1/s], (1)  $\beta = 0$ , (2)  $\beta = 2.5$  [1/s], (3)  $\beta = 5$  [1/s]

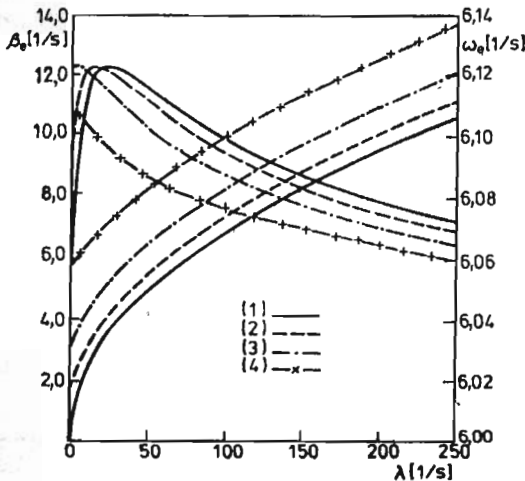


Rys. 4. Zależność ekwiwalentnej sztywności i tłumienia od odchylenia standardowego wielkości impulsów. Dane:  $\omega_0 = 6$  [1/s],  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\eta = 36$  [1/m<sup>2</sup> s<sup>2</sup>], (1)  $\beta = 2.5$  [1/s],  $\lambda = 1$  [1/s],  $\alpha = 1$  [s/m<sup>2</sup>]; (2)  $\beta = 5$  [1/s],  $\lambda = 1$  [1/s],  $\alpha = 1$  [s/m<sup>2</sup>]; (3)  $\beta = 10$  [1/s],  $\lambda = 1$  [1/s],  $\alpha = 1$  [s/m<sup>2</sup>]; (4)  $\beta = 5$  [1/s],  $\lambda = 0.5$  [1/s],  $\alpha = 1$  [s/m<sup>2</sup>]; (5)  $\beta = 5$  [1/s],  $\lambda = 1$  [1/s],  $\alpha = 2$  [s/m<sup>2</sup>].  $\square$  — granica stosowalności metody linearyzacji.

znaczący, jak o tym świadczą zamieszczone na rys. 3 wykresy tej zależności, sporządzone dla różnych wartości współczynnika liniowego tłumienia  $\beta$ .

Szczególnie silna jest zależność ekwiwalentnego tłumienia  $\beta_e$  od odchylenia standardowego wielkości impulsu  $\sigma$ . Ma ona postać silnie rosnącej funkcji nieliniowej, co wiąże się prawdopodobnie ze wzrostem wraz z wartością  $\sigma$  prędkości układu, a więc z silnym zwiększeniem wpływu nieliniowej składowej siły tłumienia. Potwierdzeniem tego jest bardzo wyraźne uzależnienie przebiegu funkcji  $\beta_e(\sigma)$  od wartości współczynnika  $\alpha$  występującego w równaniu badanego układu przy nieliniowej części tłumienia (p. rys. 4).

Zależność ekwiwalentnego tłumienia od intensywności procesu Poissona  $\lambda$  pokazano przykładowo na rys. 5, przy czym wykresy wykonano dla różnych wartości liniowego tłumienia.



Rys. 5. Zależność ekwiwalentnej sztywności i tłumienia od intensywności procesu Poissona  $\lambda$  dla układu z nieliniowością zależną od prędkości. Dane:  $\omega_0 = 6$  [1/s],  $\varepsilon = 0,5$ ,  $\eta = 0$ ,  $\sigma = 3$  [m/s],  $\alpha = 0,25$  [s/m<sup>2</sup>], (1)  $\beta = 0$ , (2)  $\beta = 1$  [1/s], (3)  $\beta = 2,5$  [1/s], (4)  $\beta = 5$  [1/s].

Ogólnie można stwierdzić, iż postacie otrzymanych wyżej zależności są zgodne z fizyczną naturą ruchu rozważanego układu.

Ekwiwalentna liniowa sztywność  $\omega_e$  jest w większym stopniu niż  $\beta_e$  funkcją wszystkich parametrów układu.

Stosunkowo niewielki wpływ na jej wartość ma współczynnik liniowego tłumienia. Funkcja  $\omega_e(\beta)$  jest malejącą funkcją nieliniową, dążącą ze wzrostem  $\beta$  do wartości stałej.

Również niewielki jest wpływ współczynnika nieliniowej składowej siły tłumienia  $\alpha$ , jednak pod warunkiem niezerowej wartości liniowej sztywności  $\omega_0$  w równaniu (1). Warto przy tym zwrócić uwagę na całkowicie odmienny charakter krzywych  $\omega_e(\alpha)$  dla przypadków  $\omega_0 \neq 0$  (rys. 1) i  $\omega_0 = 0$  (rys. 2). Malejącą w tym drugim przypadku ze wzrostem  $\alpha$  wartość sztywności ekwiwalentnej można wyjaśnić tym, że w miarę wzrostu tłumienia wychylenia układu stają się coraz mniejsze i nieliniowa charakterystyka sprężysta o przyjętej w (6) postaci jest coraz bardziej miękka.

Podobny charakter, coraz wolniej rosnących i zbliżających się do linii prostej funkcji nieliniowych, mają zależności sztywności ekwiwalentnej od parametrów  $\varepsilon$  i  $\eta$ , przy czym w drugim przypadku nachylenie wykresu maleje ze wzrostem współczynnika tłumienia liniowego  $\beta$ .

Przy zmianie wartości  $\beta$  wykresy omówionych funkcji ulegają przesunięciu, jednak bez zdecydowanej zmiany charakteru, poza przypadkami, w których układ dla pewnego zakresu parametrów staje się praktycznie nietłumiony.

Ciekawy charakter ma zależność  $\omega_e$  od liniowej sztywności  $\omega_0$ . Jest ona wyraźnie nieliniowa dla niewielkich wartości  $\omega_0$ , po czym staje się zbliżona do prostej o kącie nachylenia nieznacznie rosnącym wraz z wartością współczynnika tłumienia  $\beta$  (p. rys. 3).

Bardzo interesująca jest zależność ekwiwalentnej sztywności od intensywności procesu Poissona (tj. średniej częstości występowania impulsów) w przypadku, gdy nieliniowość jest zależna tylko od prędkości. Zależność tą pokazano na rys. 5. Jak widać, przy dostatecznie małych współczynnikach tłumienia  $\beta$  wartość  $\omega_e$  początkowo rośnie ze wzrostem częstości pojawiania się impulsów, osiąga przy pewnej wartości  $\lambda$  maksimum, a następnie maleje. Ze wzrostem tłumienia  $\beta$  wykres funkcji ulega przesunięciu w lewo, przy czym zostaje zachowana dokładnie taka sama maksymalna wartość  $\omega_e$  dla wszystkich krzywych. Przy dostatecznie dużym tłumieniu obserwuje się już tylko malejącą część krzywej. Można w tym widzieć pewną analogię do charakteru krzywej rezonansowej przy wymuszeniu harmonicznym i twierdzić, iż rozważany układ jest najbardziej wrażliwy na oddziaływanie takiego wymuszenia, dla którego średnia częstość pojawiania się impulsów odpowiada współrzędnej maksimum krzywej rezonansowej. Efekt ten jest jednak nieznaczny (por. podziałkę wykresu  $\omega_e(\lambda)$  na rys. 5). Można nawet powiedzieć, iż praktycznie wartość  $\omega_e$  w przypadku nieliniowości zależnej tylko od prędkości nie zależy od intensywności procesu Poissona.

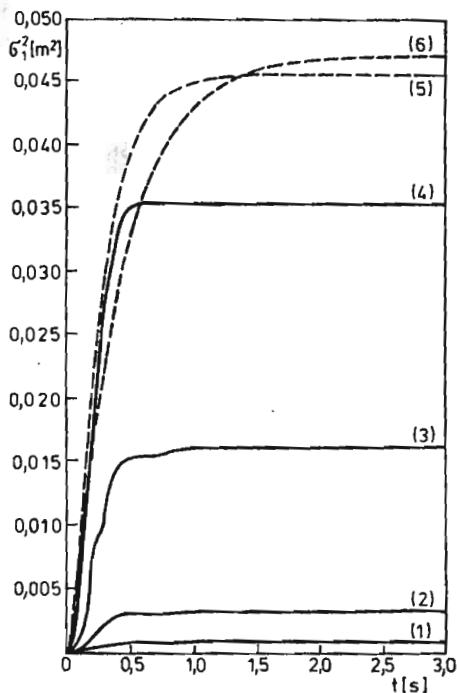
W przypadku, gdy nieliniowość zależy zarówno od przemieszczenia, jak i prędkości zależność ekwiwalentnej sztywności od parametru  $\lambda$  jest rosnącą funkcją nieliniową, dla dużych  $\lambda$  zbliżającą się do linii prostej. Charakter jej jest więc zupełnie inny niż poprzednio.

Zależność  $\omega_e$  od odchylenia standardowego wielkości impulsów  $\sigma$  została pokazana na rys. 4. Jak widać, jest to funkcja nieliniowa, początkowo silnie rosnąca ze wzrostem  $\sigma$ , a następnie dążąca do wartości stałej. Na rysunku pokazano wpływ, jaki na jej charakter wywierają wartości współczynnika nieliniowej składowej tłumienia  $\alpha$ , liniowego tłumienia  $\beta$  i intensywności procesu Poissona  $\lambda$ .

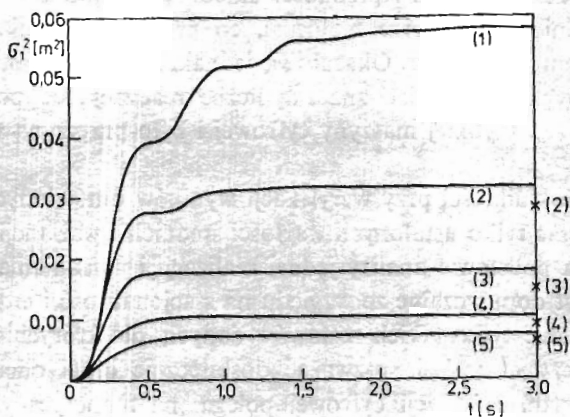
Zmiana liniowej sztywności  $\omega_0$  powoduje odpowiednie przesunięcie wykresu. Przy zmianach parametru  $\eta$  rośnie wraz z jego wzrostem prędkość wzrastania funkcji  $\omega_e(\sigma)$ , jak również ulega zwiększeniu granica, do której funkcja dąży przy dużych wartościach odchylenia standardowego wielkości impulsów. Ostatnich dwóch zależności nie pokazano na rys. 4, gdyż zmniejszyłoby to jego czytelność.

Własności odpowiedzi układu zlinearyzowanego zostaną przedstawione na przykładzie czasowych przebiegów wariancji przemieszczenia układu, pokazanych na rys. 6 i 7, na których zobrazowano wpływ niektórych parametrów układu lub wymuszenia na przebieg rozważanych funkcji.

Na rysunkach widoczne są nieregularności zanikające z czasem, występujące na niektórych krzywych. Są one tym mniej widoczne, im większy jest ekwiwalentny współczynnik



Rys. 6. Zmienność w czasie wariancji przemieszczenia układu. Dane:  $\beta = 2$  [1/s],  $\omega_0 = 6$  [1/s],  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\alpha = 0.25$  [s/m<sup>2</sup>],  $\eta = 0$ ,  $\lambda = 1$  [1/s], (1)  $\sigma = 0.5$  [m/s], (2)  $\sigma = 1.0$  [m/s], (3)  $\sigma = 2.5$  [m/s], (4)  $\sigma = 5.0$  [m/s], (5)  $\sigma = 10.0$  [m/s], (6)  $\sigma = 14.0$  [m/s], ——— tłumienie podkrytyczne, - - - tłumienie nadkrytyczne.



Rys. 7. Zmienność w czasie wariancji przemieszczenia układu. Dane:  $\omega_0 = 6$  [1/s],  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\alpha = 0.25$  [s/m<sup>2</sup>],  $\eta = 0$ ,  $\sigma = 3$  [m/s],  $\lambda = 1$  [1/s], (1)  $\beta = 0$ , (2)  $\beta = 1$  [1/s], (3)  $\beta = 2.5$  [1/s], (4)  $\beta = 5$  [1/s], (5)  $\beta = 7.5$  [1/s],  $\times (t)$  — ustalona wartość wariancji przemieszczenia układu otrzymana dla  $i$ -tego zestawu danych za pomocą metody symulacji cyfrowej ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ).

tłumienia, a dla  $\beta_e$  większego od wartości krytycznej nie występują w ogóle. Szczególnie wyraźnie widać to na rys. 6, na którym rozróżniono krzywe odpowiadające tłumieniu podkrytycznemu i nadkrytycznemu. Można zatem stwierdzić, iż nieregularności te związane są z występowaniem w układzie swobodnych drgań tłumionych, zanikających z czasem. Należy dodać, iż częstość nieregularności pokrywa się z częstością drgań tłumionych układu.

Warto zwrócić uwagę na przecinanie przez krzywą (6) linii (4) i (5) na rys. 6. Wskazuje to na fakt, iż duże (nadkrytyczne) ekwiwalentne tłumienie liniowe powoduje wolniejsze narastanie drgań układu, jednak ustalona wartość wariancji przemieszczenia rośnie ze wzrostem odchylenia standardowego wielkości impulsu.

Można również badać wpływ pozostałych parametrów układu lub wymuszenia na przebieg zmienności w czasie wariancji przemieszczenia i prędkości układu. Otrzymane wykresy mają charakter zbliżony do pokazanych na rys. 6 i 7. W szczególności dla podkrytycznych wartości ekwiwalentnego współczynnika tłumienia na krzywych występują podobne nieregularności, jak na rys. 6. Wpływ parametrów układu lub wymuszenia na przebieg tych funkcji jest zgodny z intuicyjnie oczekiwanym. Przykładowo przy wzroście małego parametru  $\varepsilon$  ustalone wartości wariancji zmniejszają się, zaś wzrost intensywności procesu Poissona powoduje szybsze narastanie funkcji i uzyskiwanie przez nie coraz wyższych wartości ustalonych.

## 7. Symulacyjna weryfikacja rezultatów linearyzacji statystycznej

Poprawność wyników uzyskanych przy pomocy metody linearyzacji powinna podlegać sprawdzeniu. Można w tym celu wykorzystać metodę symulacji cyfrowej. W pracy [17] wykazano w ten sposób, że linearyzacja statystyczna daje dobre wyniki w przypadku nieliniowości zależnej od przemieszczenia i tłumienia podkrytycznego. Wyznaczając estymatory momentów przemieszczenia i prędkości układu dokonywano w przypadku omawianym w [17] uśrednień po zbiorze realizacji, co pozwoliło na określenie przebiegu zmienności tych momentów w czasie. Okazało się jednak, iż dla uzyskania zadowalających wyników należało uwzględnić bardzo znaczną liczbę realizacji, co pociągnęło za sobą konieczność użycia dużej, szybkiej maszyny cyfrowej i było przyczyną wysokich kosztów obliczeń.

Dla uniknięcia tych trudności przy weryfikacji wyników omówionych wyżej zdecydowano się na wyznaczanie tylko ustalonych wartości średnich i wariancji prędkości i przemieszczenia układu na podstawie analizy jednej realizacji i uśredniania względem czasu. Postępowanie takie jest dopuszczalne ze względu na stacjonarność i ergodyczność wymuszenia oraz rozpatrywanie tylko takich zestawów danych, dla których układ (1) jest stacyczny (p. [18]). Należy oczywiście rozważać dostatecznie długi odcinek realizacji.

Zastosowany algorytm symulacji cyfrowej polegał na numerycznym rozwiązywaniu równania drgań swobodnych układu nieliniowego (tj. równania (1) z zerową prawą stroną). W chwilach występowania impulsów warunki początkowe dla kolejnego kroku całkowania numerycznego ulegały zmianie, wynikającej z pojawienia się impulsu o określonej wielkości. Otrzymane w ten sposób wartości rozwiązania służyły do wyznaczania estymatorów



momentów przemieszczenia i prędkości układu. Momenty występowania impulsów oraz ich wielkości były określane za pomocą cyfrowych generatorów liczb o rozkładzie Poissona oraz o rozkładzie normalnym.

Dokładniejsze omówienie algorytmu symulacji cyfrowej wymagałoby zbytniego rozbudowania tego rozdziału pracy. Będzie to tematem odrębnej publikacji, natomiast nieco szersze informacje dotyczące podobnej metody symulacji cyfrowej można znaleźć w pracach [9] i [17].

Obecnie zostaną przedstawione najważniejsze wnioski z porównania wyników otrzymanych za pomocą metody linearyzacji z rezultatami symulacji cyfrowej.

Dla wszystkich przebadanych zestawów danych została potwierdzona wynikająca z metody linearyzacji zerowość wartości średnich przemieszczenia i prędkości układu (wzory (46)). Wartości średnie uzyskane z metody symulacji były praktycznie zerowe (na ogół o kilka rzędów wielkości mniejsze od odchyłeń standardowych).

Nie stwierdzono wpływu przekroczenia przez ekwiwalentne tłumienie liniowe wartości krytycznej na przebieg funkcji określających dokładność metody linearyzacji, definiowanych jako stosunki ustalonych wartości wariancji przemieszczenia i prędkości, wyznaczonych metodą linearyzacji i metodą symulacji cyfrowej. Dokładność metody linearyzacji na ogół maleje ze wzrostem stosunku  $\beta_e/\omega_e$  (wyjątkiem jest przypadek, gdy wzrost ten wynika ze zwiększania współczynnika liniowego tłumienia  $\beta$ ), jednak uzyskiwane wyniki są wystarczająco dokładne także dla wielu przypadków nadkrytycznego ekwiwalentnego tłumienia liniowego. Malenie dokładności metody linearyzacji ze wzrostem stosunku  $\beta_e/\omega_e$  jest konsekwencją zależności obu tych wielkości od parametrów charakteryzujących układ i proces wymuszający. Z danych zawartych w rozdziale 6 można wywnioskować, iż wartość stosunku  $\beta_e/\omega_e$  rośnie wraz ze zwiększaniem się wpływu nieliniowej części równania (1) lub w razie wzrostu przemieszczeń i prędkości układu, np. na skutek zwiększenia się wariancji procesu wymuszającego. Jest oczywiste, że obie te przyczyny muszą spowodować zmniejszenie się dokładności wyników otrzymanych za pomocą metody linearyzacji.

W pracy przyjęto w charakterze kryterium dopuszczalności zastosowania metody linearyzacji nie większy niż 30% błąd wielkości wariancji, tj. warunek:

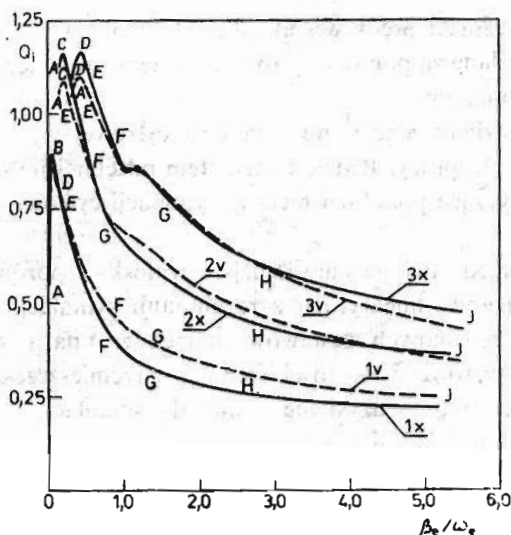
$$0.7 \leq Q_i \leq 1.3, \quad (51)$$

gdzie  $Q$  ( $i = 1, 2$ ) jest stosunkiem ustalonych wartości wariancji przemieszczenia ( $i = 1$ ) lub prędkości ( $i = 2$ ) otrzymanych z metody linearyzacji i symulacji, tzn:

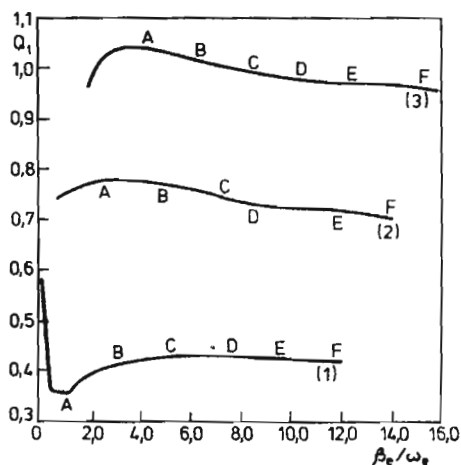
$$Q_i = \frac{\sigma_{iultn}^2}{\sigma_{i\text{sym}}^2}, \quad (i = 1, 2). \quad (52)$$

Na rys. 7 naniesiono punkty odpowiadające ustalonym wartościom wariancji, otrzymanym za pomocą metody symulacji cyfrowej dla danych, dla których wykreślono krzywe (2)÷(5). Jak widać, wartości te są bardzo zbliżone do otrzymanych za pomocą linearyzacji stochastycznej. Dla danych odpowiadających krzywej (1) z metody symulacji otrzymano ustaloną wariancję przemieszczenia układu  $\sigma_{1u}^2 = 0.0757$  [m<sup>2</sup>], a więc wartość również spełniająca warunek (51). Warto zwrócić uwagę, że krzywa (5) na rys. 6 odpowiada nadkrytycznemu ekwiwalentnemu tłumieniu liniowemu.

Dokładność wyników przedstawionych na rys. 6 można ocenić przy pomocy rys. 8,



Rys. 8. Wskaźniki dokładności metody linearyzacji. Dane:  $\omega_0 = 6$  [1/s],  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\alpha = 0.25$  [s/m<sup>2</sup>],  $\eta = 0$ ,  $\lambda = 1$  [1/s], (1)  $\beta = 0$ , (2)  $\beta = 1$  [1/s], (3)  $\beta = 2$  [1/s]. W zaznaczonych punktach wartości  $\sigma$  [m/s] wynoszą: A:  $\sigma = 0.1$ , B:  $\sigma = 1$ , C:  $\sigma = 1.5$ , D:  $\sigma = 2.5$ , E:  $\sigma = 3$ , F:  $\sigma = 5$ , G:  $\sigma = 10$ , H:  $\sigma = 14$ , J:  $\sigma = 20$ , x — przemieszczenie (wskaźnik  $Q_1$ ), v — prędkość (wskaźnik  $Q_2$ ).



Rys. 9. Wskaźniki dokładności wyznaczania wariancji przemieszczenia za pomocą metody linearyzacji. Dane:  $\omega_0 = 0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\eta = 36$  [1/m<sup>2</sup> s<sup>2</sup>],  $\sigma = 3$  [m/s],  $\lambda = 1$  [1/s], (1)  $\beta = 0$ , (2)  $\beta = 2.5$  [1/s], (3)  $\beta = 5$  [1/s]. W zaznaczonych punktach wartości  $\alpha$  [s/m<sup>2</sup>] wynoszą: A:  $\alpha = 1$ , B:  $\alpha = 2$ , C:  $\alpha = 3$ , D:  $\alpha = 4$ , E:  $\alpha = 5$ , F:  $\alpha = 6$ .

z którego wynika, iż kryterium (51) jest spełnione dla wszystkich krzywych z wyjątkiem (6), dla której jest nieznacznie przekroczone. Rys. 8 wykazuje jednak, iż dla dużych wartości odchylenia standardowego wielkości impulsów  $\sigma$  występuje zasadnicza niezgodność pomiędzy rezultatami linearyzacji i symulacji cyfrowej. W związku z tym na rys. 4 zaznaczono na poszczególnych krzywych punkty odpowiadające maksymalnym wartościom  $\sigma$ , dla których kryterium (51) jest jeszcze spełnione.

Przy rozpatrywaniu wpływu pozostałych parametrów układu na dokładność metody linearyzacji nie obserwuje się podobnych jakościowych różnic. Przykładowo na rys. 9 pokazano przebieg wskaźnika  $Q_1$  w zależności od stosunku  $\beta_e/\omega_e$  przy zmieniającym się współczynniku nieliniowej składowej siły tłumienia  $\alpha$ . Jak widać, dokładność metody linearyzacji w przypadku krzywych (2) i (3) pozostaje zadowalająca dla ekwiwalentnego tłumienia znacznie przekraczającego wartość krytyczną.

Dokładność ta jednak nie spełnia kryterium (51) w przypadku krzywej (1), odpowiadającej brakowi liniowej składowej siły tłumienia. Stwierdzenie to można traktować jako ogólne, co pociąga za sobą wniosek o nieodpowiedności metody linearyzacji stochastycznej do analizy układów o postaci (1) w przypadku gdy jest  $\beta = 0$ . Jest to prawdopodobnie spowodowane osiąganiem w takich przypadkach zbyt dużych wartości przez przemieszczenie i prędkość układu. Ten właśnie czynnik wydaje się być decydującym przy analizie możliwości zastosowania metody linearyzacji.

Warto jednak nadmienić, iż nawet w przypadkach gdy kryterium (51) nie jest spełnione, z wyników metody linearyzacji można na ogół wyciągnąć prawidłowe wnioski na temat istotności wpływu poszczególnych parametrów układu (1) na wariancje jego przemieszczenia i prędkości.

Na rys. 1, 2, 3, 5 zamieszczono wykresy funkcji obrazujące zmienność ekwiwalentne, inijowej sztywności i tłumienia dla przypadku  $\beta = 0$ . W związku z faktem, iż kryterium (51) nie jest wówczas spełnione, linie te należy traktować tylko jako ograniczenie obszarów w którym mieszczą się wykresy wykonane dla różnych wartości współczynnika liniowego tłumienia  $\beta$ .

## 8. Uwagi końcowe

W artykule przeanalizowano możliwość zastosowania metody linearyzacji stochastycznej do badania nieliniowego układu o jednym stopniu swobody z nieliniowością zależną zarówno od przemieszczenia jak i prędkości, poddanego działaniu wymuszenia losowego w postaci poissonowskiego ciągu impulsów. Wykazano, iż postać układu równań (42), określających ekwiwalentne tłumienie i sztywność, nie jest zależna od wielkości tłumienia w układzie. Omówiono wpływ parametrów układu i procesu wymuszającego na wartości ekwiwalentnej sztywności i ekwiwalentnego tłumienia.

Wykorzystanie metody linearyzacji statystycznej umożliwia wyznaczenie funkcji charakterystycznej rozkładu prawdopodobieństwa odpowiedzi układu, która charakteryzuje rozkład równie dobrze jak funkcja gęstości prawdopodobieństwa. Wobec złożoności całki występującej we wzorach (11), (24) lub (25), określających funkcję charakterystyczną, niemożliwe jest otrzymanie jawnej postaci tej funkcji. Można jednak wyznaczyć ją w wybranych punktach, obliczając numerycznie całkę z wzorów (11), (24) lub (25). Taka dyskretna reprezentacja funkcji charakterystycznej może być wykorzystana do dalszej analizy własności odpowiedzi układu.

Ponadto na podstawie wzorów przytoczonych w punkcie 5 można wyznaczyć przebiegi czasowe wariancji przemieszczenia i prędkości układu oraz ich wartości ustalone. W artykule przytoczono przykładowe wykresy, obrazujące zmiany w czasie wariancji współ-

rzędnych fazowych oraz wpływ, jaki na ich przebieg wywierają zmiany parametrów układu lub wymuszenia. Analizie wpływu tych parametrów na ustalone wartości wariancji przemieszczenia i prędkości układu będzie poświęcona odrębna publikacja.

W pracy poświęcono również uwagę dokładności otrzymanych wyników. Weryfikacji dokonano za pomocą metody symulacji cyfrowej, stwierdzając iż metoda linearyzacji statystycznej pozwala na uzyskanie dobrej dokładności dla szerokiego zakresu zmian parametrów układu lub wymuszenia, jeśli tylko występujące w czasie ruchu przemieszczenia i prędkości nie są zbyt duże.

#### Literatura

1. T. K. CAUGHEY, *Equivalent linearization techniques*, J. Acoust. Soc. Am., 35, 1706 - 1711, 1963.
2. M. FISZ, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa, 1967.
3. I. I. GIKHMAN, A. V. SKOROKHOD, *Stochastic differential equations*, Ergebnisse der Mathematik, 72, Springer, New York, 1972.
4. R. A. IBRAHIM, *Parametric random vibration*, Research Studies Press, Letchworth, 1985.
5. R. IWANKIEWICZ, K. SOBCZYK, *Dynamic response of linear structures to correlated random impulses*, J. Sound Vibr., 86, 303 - 317, 1983.
6. R. IWANKIEWICZ, *Response of vibratory systems to general random pulses*, J. Sound Vibr., 108, 429 - 446, 1986.
7. E. KÄMKE, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, Band 2, Leipzig, 1959.
8. W. MAROWSKI, *Problemy obliczania charakterystyk probabilistycznych nieliniowych układów dynamicznych*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1985.
9. W. MAROWSKI, J. WRÓBEL, *Symulacyjne badanie nieliniowego układu mechanicznego o jednym stopniu swobody pod działaniem losowego wymuszenia impulsowego*, III Sympozjum „Symulacja Procesów Dynamicznych”, Zbiór referatów, Polana Chochołowska, 1986, 53 - 59.
10. K. PISZCZEK, *Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa, 1982.
11. A. RENGGER, *Eine Dichtegleichung für Schwingungssysteme bei gleichzeitigen kontinuierlichen und diskreten stochastischen Erregungen*, ZAMM, 59, 1 - 13, 1979.
12. J. B. ROBERTS, *The response of linear vibratory systems to random impulses*, J. Sound Vibr., 2, 375 - 390, 1965.
13. S. K. SRINIVASAN, R. SUBRAMANIAN, S. KUMARASWAMY, *Response of linear vibratory systems to non-stationary stochastic impulses*, J. Sound Vibr., 6, 169 - 179, 1967.
14. A. TYLIKOWSKI, *Drgania oscylatora harmonicznego wywołane ciągiem przypadkowych zderzeń*, Prace Instytutu Podstaw Budowy Maszyn Politechniki Warszawskiej, 13, 101 - 112, 1982.
15. A. TYLIKOWSKI, *Pewna metoda badania liniowych układów poddanych poissonowskiemu wymuszeniu impulsowemu*, XI Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”, Streszczenia referatów, Poznań—Błażejewko, 1984.
16. A. TYLIKOWSKI, *Analiza korelacyjna drgań układu liniowego poddanego poissonowskiemu wymuszeniu impulsowemu*, Sympozjum „Modelowanie w mechanice”, Zbiór referatów, Beskid Śląski, 1985.
17. A. TYLIKOWSKI, W. MAROWSKI, *Vibration of a non-linear single degree of freedom system due to Poissonian impulse excitation*, Int. J. Non-Linear Mech., 21, 229 - 238, 1986.
18. J. WRÓBEL, *Symulacyjne badanie jakości w nieliniowej stochastycznej dynamice maszyn*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika, 92, 1985.

## Резюме

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ

Рассматривается система с одной степенью свободы, с нелинейной упругостью и демпфированием, на которую действует случайная последовательность импульсов.

Применяя метод статистической линеаризации получается система уравнений для эквивалентных линейных коэффициентов упругости и демпфирования. Применение обобщенного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова и метода характеристической функции ведёт к получению общих формул для характеристической функции и моментов исходного процесса.

Зависимость эквивалентных линейных коэффициентов упругости и демпфирования от параметров системы и возмущения определяется для нормального с нулевым средним значением распределения вероятности величины импульсов. Для этого случая получается также дисперсии перемещения и скорости системы как функции времени.

## Summary

## ANALYSIS OF A NON-LINEAR OSCILLATOR SUBJECTED TO RANDOM PULSES VIA STOCHASTIC LINEARIZATION

A single degree of freedom system with non-linear stiffness and damping subjected to Poissonian impulse excitation is examined.

The stochastic linearization technique is used to obtain a system of equations for equivalent linear stiffness and damping. The generalized Fokker — Planck — Kolmogorov equation and the characteristic function method allow to obtain general formulae for the characteristic function and moments of the system response probability distribution.

The dependence of equivalent linear stiffness and damping upon system and excitation parameters is investigated for the case of zero mean Gaussian probability distribution of the linear impulse. The behaviour of system displacement variance as time function is also examined.

A digital simulation method is applied to verify the results obtained.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 7 kwietnia 1987 roku*

---