

DRGANIA GIĘTNE WAŁU Z TARCZAMI KOŁOWYMI W RUCHU USTALONYM

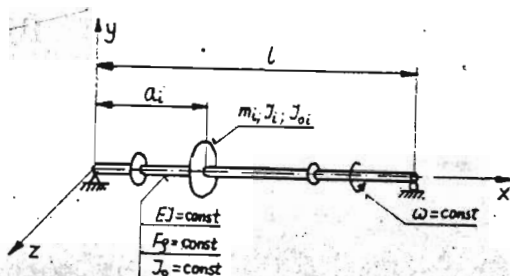
STANISŁAW WIŚNIEWSKI

Politechnika Poznańska

W pracy wyprowadzono i rozwiązano sprzężone równania różniczkowe drgań giętnych wału z utwierdzonymi centrycznie wąskimi tarczami kołowymi, obracającego się ze stałą prędkością kątową. W równaniach pominięto wpływ odkształceń postaciowych jako nieznacznych dla przekrojów kołowych wału; wpływ momentów giroskopowych uwzględniono od tarcz, które są traktowane jako sztywne i dyskretne oraz od samego wału. W końcowej części pracy wprowadzono wzory dla drgań giętnych wymuszonych.

1. Równania różniczkowe drgań giętnych własnych i ich całki

Rozważmy drgania giętne wału jednoprzęsłowego o stałej sztywności z utwierdzonymi centrycznie - prostopadle do osi wału - cienkimi tarczami kołowymi, rys.1.



Rys. 1.

gdzie:

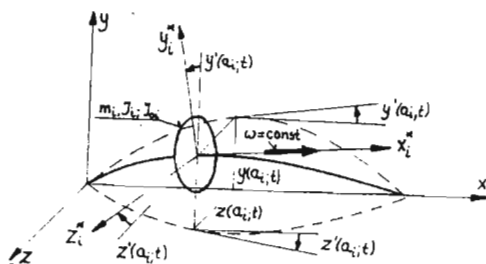
m_i - masa i -tej tarczy,

J_i - moment bezwładności i -tej tarczy względem głównej osi centralnej prostopadłej do osi wału,

- J_{0i} – moment bezwładności i -tej tarczy względem osi wału,
 $J_0 = 2J = \text{const}$ – moment bezwładności przekroju poprzecznego wału względem jego osi,
 $F = \text{const}$ – pole przekroju poprzecznego wału,
 $EJ = \text{const}$ – sztywność zginania wału,
 $\omega = \text{const}$ – prędkość kątowna wału,
 $\rho = \text{const}$ – gęstość wału.

Wyznamy moment z jakim i -ta tarcza oddziałuje na wał wytracony z położenia równowagi statycznej.

Wprowadzmy w tym celu lokalny układ x_i^* , y_i^* , z_i^* , którego osie są głównymi i centralnymi osiami rozpatrywanej tarczy (rys.2) i nie wykonuje obrotu względem osi x_i^* .



Rys. 2.

Zauważmy, że składowe krętu i -tej tarczy w lokalnym układzie wynoszą:

$$K_{x_i^*} = J_{0i}\omega, \quad K_{y_i^*} = -J_i\dot{z}'(a_i; t), \quad K_{z_i^*} = J_i\dot{y}'(a_i; t).$$

Składowe krętu rozpatrywanej tarczy (i -tej) względem nieruchomego układu osi x, y, z z dokładnością do małych pierwszego rzędu natomiast wynoszą:

$$\begin{aligned}
 K_{ix} &= K_{x_i^*} - K_{y_i^*}y'(a_i; t) - K_{z_i^*}z'(a_i; t) \cong J_{0i}\omega, \\
 K_{iy} &= K_{y_i^*} + K_{x_i^*}y'(a_i; t) = J_i\dot{z}'(a_i; t) + J_{0i}\omega y'(a_i; t), \\
 K_{iz} &= K_{z_i^*} + K_{x_i^*}z'(a_i; t) = J_i\dot{y}'(a_i; t) + J_{0i}\omega z'(a_i; t),
 \end{aligned}$$

Zatem i -ta tarcza zgina wał parą sił o składowych:

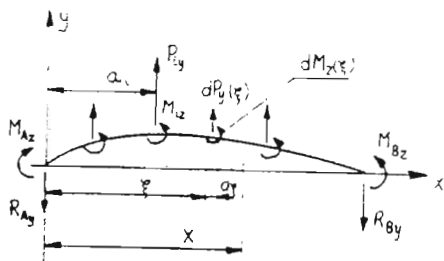
$$\begin{aligned}
 M_{iy} &= -\dot{K}_{iy} = -J_i\ddot{z}'(a_i; t) - J_{0i}\omega\dot{y}'(a_i; t), \\
 M_{iz} &= -\dot{K}_{iz} = -J_i\ddot{y}'(a_i; t) - J_{0i}\omega\dot{z}'(a_i; t),
 \end{aligned}$$

gdyż moment skręcający $M_{ix} = -\dot{K}_{ix} = 0$.

Zatem w zakresie małych drgań (liniowych) drgania giętne nie są sprzężone z drganiami skrętnymi.

Poprzeczne siły zginające – wywołane oddziaływaniem i -tej tarczy wynoszą:
w płaszczyźnie xy

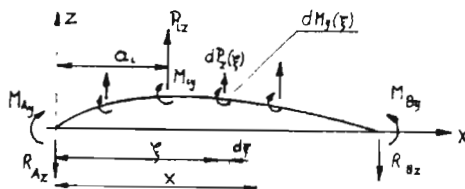
$$P_{iy} = -m_i \ddot{y}(a_i; t),$$



Rys. 3.

oraz w płaszczyźnie xz

$$P_{iz} = -m_i \ddot{z}(a_i; t).$$



Rys. 4.

Prócz tego wał jest zginany parami sił rozłożonymi w sposób ciągły wzdłuż jego długości:

w płaszczyźnie xz

$$dM_y = [J\rho\ddot{z}'(\xi; t) - J_0\rho\omega\dot{y}'(\xi; t)]d\xi,$$

oraz w płaszczyźnie xy

$$dM_z = -[J\rho\ddot{y}'(\xi; t) + J_0\rho\omega\dot{z}'(\xi; t)]d\xi.$$

Poza tym poprzecznymi siłami zginającymi rozłożonymi także w sposób ciągły wzdłuż długości wału:

w płaszczyźnie xy

$$dP_y = -F\rho\ddot{y}(\xi; t)d\xi,$$

oraz w płaszczyźnie xz

$$dP_z = -F\rho\ddot{z}(\xi; t)d\xi.$$

Momenty gnące w dowolnym przekroju x wału wynoszą zatem w płaszczyźnie xy :

$$\begin{aligned} M g_x(x) &= R_{Ay}x - M_{Ax} + F\rho \int_0^x \ddot{y}(\xi; t)(x - \xi)d\xi + \\ &- J\rho \int_0^x \ddot{y}'(\xi; t)d\xi - J_0\rho\omega \int_0^x \dot{z}'(\xi; t)d\xi + \\ &+ \sum_i \left\{ m_i \ddot{y}(a_i; t)(x - a_i) - [J_i \ddot{y}'(a_i; t) + J_{0i}\omega \dot{z}'(a_i; t)]H(x - a_i) \right\}, \end{aligned}$$

oraz w płaszczyźnie xz :

$$\begin{aligned} M g_y(x) &= R_{Az}x - M_{Ay} + F\rho \int_0^x \ddot{z}(\xi; t)(x - \xi)d\xi + \\ &- J\rho \int_0^x \ddot{z}'(\xi; t)d\xi + J_0\rho\omega \int_0^x \dot{y}'(\xi; t)d\xi + \\ &+ \sum_i \left\{ m_i \ddot{z}(a_i; t)(x - a_i) - [J_i \ddot{z}'(a_i; t) - J_{0i}\omega \dot{y}'(a_i; t)]H(x - a_i) \right\}, \end{aligned}$$

gdzie $H(x - a_i)$ - funkcja Heaviside'a zgaszona dla ujemnych argumentów podobnie jak funkcja liniowa $x - a_i$, ($x \leq a_i$).

Równania różniczkowe drgań giętych wału, przy pominięciu wpływu odkształceń postaciowych - jako nieznaczących, mają postać:

$$\begin{aligned} EJy^{IV}(x; t) - M''g_x(x; t) &\equiv EJy^{IV}(x; t) + F\rho\ddot{y}(x; t) + \\ &- [J\ddot{y}''(x; t) + J_0\omega\dot{z}''(x; t)]\rho + \sum_i \left\{ m_i \ddot{y}(a_i; t)\delta(x - a_i) + \right. \\ &\left. - [J_i \ddot{y}'(a_i; t) + J_{0i}\omega \dot{z}'(a_i; t)]\delta_I(x - a_i) \right\} = 0, \\ EJz^{IV}(x; t) - M''g_y(x; t) &\equiv EJz^{IV}(x; t) + F\rho\ddot{z}(x; t) + \\ &- [J\ddot{z}''(x; t) - J_0\omega\dot{y}''(x; t)]\rho + \sum_i \left\{ m_i \ddot{z}(a_i; t)\delta(x - a_i) + \right. \\ &\left. - [J_i \ddot{z}'(a_i; t) - J_{0i}\omega \dot{y}'(a_i; t)]\delta_I(x - a_i) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

gdzie:

$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$ - dystrybucja Diraca,

$\delta_I(x) = \frac{d^2 H(x)}{dx^2}$ - dystrybucja Diraca I-go rzędu.

Ze względu na symetrię osiową, drgań własnych będziemy poszukiwali w postaci¹:

¹Zakłada się łożyska o własnościach izotropowych niepodatne lub mało podatne sprężyste, [6] str.107.

- dla drgań współbieżnych

$$\begin{aligned}y(x; t) &= f(x) \cos pt, \\z(x; t) &= f(x) \sin pt,\end{aligned}$$

- dla drgań przeciwbieżnych

$$\begin{aligned}y(x; t) &= f(x) \cos pt, \\z(x; t) &= -f(x) \sin pt.\end{aligned}$$

Dla obracającego się ze stałą prędkością kątową ω wału, w którym tarcze są osadzone centrycznie i prostopadłe do jego osi, jest oczywistym, że powstałe na skutek zachwiania stanu równowagi wygięcie jest linią płaską (moment skręcający od sił bezwładności nie istnieje) i pozostaje w płaszczyźnie wirującej względem osi x -ów ze stałą prędkością kątową p będącą prędkością precesji. Prędkość precesji p jest zarazem częstością drgań giętnych wału, swobodnych.

Jeżeli kierunek wirowania ugiętej osi wału jest zgodny z kierunkiem obrotu wału to drgania takie będziemy nazywali drganiami giętnymi współbieżnymi. Jeżeli natomiast nie będzie zgodności kierunków obrotów, drganiami giętnymi przeciwbieżnymi.

W szczególnym przypadku gdy prędkość kątowa wału ω jest zgodnie skierowana z prędkością precesji p i jej równa, ruch drgający wału staje się aperiodyczny i ugięcie wału rośnie. Dla ruchu ustalonego ($\omega = \text{const}$) wzrost ugięć nie wynika z równań.

Dysypacja energii, którą w pracy pominięto, przy "obrotach krytycznych" $\omega_{kr} = p$ jest bardzo mała, wzrasta natomiast nieco gdy iloraz ω/p maleje. Silniejszy wzrost dysypacji występuje przy drganiach przeciwbieżnych gdyż na skutek tego, że ruch obrotowy ugiętej osi wału odbywa się w przeciwną stronę niż jego obrót, wzajemne przemieszczanie się cząstek wału jest znacznie intensywniejsze niż przy drganiach współbieżnych. Jest to powód dla którego drgania giętne przeciwbieżne bez udziału powstrzymujących ten rodzaj ruchu, okresowych sił zewnętrznych nie zachodzą.

Równania cząstkowe (1.1) redukują się zatem po rozdzieleniu zmiennych do jednego zwyczajnego:

$$\begin{aligned}f^{IV}(x) - \frac{p^2}{EJ} \left\{ F\rho f(x) - J\rho f''(x) \left(1 \mp 2\frac{\omega}{p} \right) + \right. \\ \left. + \sum_i [m_i f(a_i) \delta(x - a_i) - (J_i \mp J_{0i} \frac{\omega}{p}) f'(a_i) \delta_I(x - a_i)] \right\} = 0, \quad (1.2)\end{aligned}$$

gdzie znaki minus odnoszą się do drgań współbieżnych, natomiast plus do drgań przeciwbieżnych ($\omega/p \geq 0$).

Stosując przekształcenie Laplace'a w dziedzinie zmiennej zespolonej mamy dalej:

$$s^4 f(s) - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - s f''(0) - f'''(0) - \frac{p^2}{EJ} \left\{ F \rho f(s) - J \left(1 \mp 2 \frac{\omega}{p} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot [s^2 f(s) - s f(0) - f'(0)] + \sum_i [m_i f(a_i) - (J_i \mp J_{0i} \frac{\omega}{p}) f'(a_i) s] e^{-a_i s} \right\} = 0.$$

W dziedzinie zmiennej zespolonej funkcja ugięcia ma zatem postać:

$$f(s) = \frac{s(s^2 + 2\alpha)f(0) + (s^2 + 2\alpha)f'(0) + s f''(0) + f'''(0)}{s^4 + 2\alpha s^2 - \beta^2} + \\ + \frac{\beta^2 \sum_i [f(a_i - B_i l^2 (1 \mp \gamma_i \frac{\omega}{p})) f'(a_i) s] A_i l e^{-a_i s}}{s^4 + 2\alpha s^2 - \beta^2},$$

gdzie oznaczono:

$$\alpha = \frac{J \rho p^2}{2EJ} \left(1 \mp 2 \frac{\omega}{p} \right), \quad \beta^2 = \frac{p^2 F \rho}{EJ}, \\ A_i = \frac{m_i}{F \rho l}, \quad B_i = \frac{J_i}{m_i l^2}, \quad \gamma_i = \frac{J_{0i}}{J_i}.$$

Uwzględniając transformaty:

$$\frac{s^3}{s^4 + 2\alpha s - \beta^2} \bullet \text{---} \circ \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (C^2 \operatorname{ch} Cx + D^2 \cos Dx) = \hat{S}(\alpha; \beta; x), \\ \frac{s^2}{s^4 + 2\alpha s - \beta^2} \bullet \text{---} \circ \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (C \operatorname{sh} Cx + D \sin Dx) = \hat{T}(\alpha; \beta; x), \\ \frac{s}{s^4 + 2\alpha s - \beta^2} \bullet \text{---} \circ \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (\operatorname{ch} Cx - \cos Dx) = \hat{U}(\alpha; \beta; x), \\ \frac{1}{s^4 + 2\alpha s - \beta^2} \bullet \text{---} \circ \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\frac{1}{C} \operatorname{sh} Cx - \frac{1}{D} \sin Dx \right) = \hat{V}(\alpha; \beta; x), \quad (1.3)$$

gdzie:

$$C = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \text{oraz} \quad D = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

po przejściu do dziedziny zmiennej rzeczywistej, mamy:

$$f(\alpha; \beta; x) = K_1 [\hat{S}(\alpha; \beta; x) + 2\alpha \hat{U}(\alpha; \beta; x)] + K_2 [\hat{T}(\alpha; \beta; x) + 2\alpha \hat{V}(\alpha; \beta; x)] + \\ + K_3 \hat{U}(\alpha; \beta; x) + K_4 \hat{V}(\alpha; \beta; x) + \sum_i [G(\alpha; \beta; a_i) \hat{V}(\alpha; \beta; x - a_i) + \\ - H(\alpha; \beta; a_i) \hat{U}(\alpha; \beta; x - a_i)], \quad (1.4)$$

gdzie dla ujemnych argumentów funkcje są gaszone.

Stałe całkowania oznaczono:

$$K_1 = f(0), \quad K_2 = f'(0), \quad K_3 = f''(0), \quad K_4 = f'''(0),$$

poza tym oznaczono:

$$\begin{aligned} G(\alpha; \beta; a_i) &= \beta^2 A_i l f(\alpha; \beta; a_i), \\ H(\alpha; \beta; a_i) &= \beta^2 A_i B_i l^3 (1 \mp \gamma_i \frac{\omega}{p}) f'(\alpha; \beta; a_i). \end{aligned}$$

Korzystając z funkcji (1.4) dla wielkości $G(\alpha; \beta; a_i)$ oraz $H(\alpha; \beta; a_i)$ możemy napisać wzory rekurencyjne:

$$\begin{aligned} G(\alpha; \beta; a_i) &= \left\{ \sum_{\nu=1}^{i-1} \left[G(\alpha; \beta; a_\nu) \hat{V}(\alpha; \beta; a_i - a_\nu) - H(\alpha; \beta; a_\nu) \cdot \right. \right. \\ &\cdot \hat{U}(\alpha; \beta; a_i - a_\nu) \left. \right] + K_1 [\hat{S}(\alpha; \beta; a_i) - 2\alpha \hat{U}(\alpha; \beta; a_i)] + K_2 [\hat{T}(\alpha; \beta; a_i) + \\ &+ 2\alpha \hat{V}(\alpha; \beta; a_i)] + K_3 \hat{U}(\alpha; \beta; a_i) + K_4 \hat{V}(\alpha; \beta; a_i) \left. \right\} \beta^2 A_i l, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} H(\alpha; \beta; a_i) &= \left\{ \sum_{\nu=1}^{i-1} \left[G(\alpha; \beta; a_\nu) \hat{U}(\alpha; \beta; a_i - a_\nu) - H(\alpha; \beta; a_\nu) \cdot \right. \right. \\ &\cdot \hat{T}(\alpha; \beta; a_i - a_\nu) \left. \right] + K_1 \left[\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (C^3 \operatorname{sh} C a_i - D^3 \sin D a_i) + \right. \\ &+ 2\alpha \hat{T}(\alpha; \beta; a_i) \left. \right] + K_2 [\hat{S}(\alpha; \beta; a_i) + 2\alpha \hat{U}(\alpha; \beta; a_i)] + \\ &+ K_3 [\hat{T}(\alpha; \beta; a_i) + K_4 \hat{U}(\alpha; \beta; a_i)] \left. \right\} \beta^2 A_i B_i l^3 (1 \mp \gamma_i \frac{\omega}{p}), \end{aligned}$$

gdzie dla $i = 1$ oczywiście mamy:

$$\begin{aligned} G(\alpha; \beta; a_1) &= \left\{ K_1 [\hat{S}(\alpha; \beta; a_1) - 2\alpha \hat{U}(\alpha; \beta; a_1)] + K_2 [\hat{T}(\alpha; \beta; a_1) + \right. \\ &+ 2\alpha \hat{V}(\alpha; \beta; a_1)] + K_3 \hat{U}(\alpha; \beta; a_1) + K_4 \hat{V}(\alpha; \beta; a_1) \left. \right\} \beta^2 A_1 l, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} H(\alpha; \beta; a_1) &= \left\{ K_1 \left[\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (C^3 \operatorname{sh} C a_1 - D^3 \sin D a_1) + 2\alpha \hat{T}(\alpha; \beta; a_1) \right] + \right. \\ &+ K_2 [\hat{S}(\alpha; \beta; a_1) + 2\alpha \hat{U}(\alpha; \beta; a_1)] + K_3 \hat{T}(\alpha; \beta; a_1) + \\ &+ K_4 \hat{U}(\alpha; \beta; a_1) \left. \right\} \beta^2 A_1 B_1 l^3 (1 \mp \gamma_1 \frac{\omega}{p}), \end{aligned}$$

przy czym: $-\gamma_i(\omega/p)$ dla drgań współbieżnych; $+\gamma_i(\omega/p)$ dla drgań przeciwbieżnych (zawsze $(\omega/p) \geq 0$).

Rozpatrzmy najczęściej spotykany przypadek, a mianowicie swobodne podparcie końców wału, dla którego stałe wynoszą:

$$K_1 = K_3 = 0,$$

gdz:

$$f(0) = f''(0) = 0.$$

Rozwiązując układ równań (1.5) dwukrotnie przy $K_2 = 1$; $K_4 = 0$ oraz $K_2 = 0$; $K_4 = 1$ przedstawimy jego pierwiastki w postaci:

$$G(\alpha; \beta; a_i) = K_2 G^*(\alpha; \beta; a_i) + K_4 G^{**}(\alpha; \beta; a_i),$$

oraz

$$H(\alpha; \beta; a_i) = K_2 H^*(\alpha; \beta; a_i) + K_4 H^{**}(\alpha; \beta; a_i).$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do funkcji (1.4), możemy ją zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} f(\alpha; \beta; x) = & K_2 \left\{ \hat{T}(\alpha; \beta; x) + 2\alpha \hat{V}(\alpha; \beta; x) + \sum_i [G^*(\alpha; \beta; a_i) \hat{V}(\alpha; \beta; x - a_i) + \right. \\ & \left. - H^*(\alpha; \beta; a_i) \hat{U}(\alpha; \beta; x - a_i)] \right\} + K_4 \left\{ \hat{V}(\alpha; \beta; x) + \sum_i [G^{**}(\alpha; \beta; a_i) \cdot \right. \\ & \left. \hat{V}(\alpha; \beta; x - a_i) - H^{**}(\alpha; \beta; a_i) \hat{U}(\alpha; \beta; x - a_i)] \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Z warunków swobodnego podparcia prawego końca wału, a zatem $f(l) = f''(l) = 0$, otrzymuje się układ dwóch liniowych jednorodnych równań względem stałych całkowania K_2 i K_4 :

$$\begin{aligned} f(\alpha; \beta; l) \equiv & K_2 \left\{ \hat{T}(\alpha; \beta; l) + 2\alpha \hat{V}(\alpha; \beta; l) + \sum_i [G^*(\alpha; \beta; a_i) \hat{V}(\alpha; \beta; l - a_i) + \right. \\ & \left. - H^*(\alpha; \beta; a_i) \hat{U}(\alpha; \beta; l - a_i)] \right\} + K_4 \left\{ \hat{V}(\alpha; \beta; l) + \sum_i [G^{**}(\alpha; \beta; a_i) \cdot \right. \\ & \left. \hat{V}(\alpha; \beta; l - a_i) - H^{**}(\alpha; \beta; a_i) \hat{U}(\alpha; \beta; l - a_i)] \right\} = 0, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(\alpha; \beta; a_i) \equiv & K_2 \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (C^3 \operatorname{sh} Cl - D^3 \sin Dl) + 2\alpha \hat{T}(\alpha; \beta; l) + \right. \\ & \left. + \sum_i [G^*(\alpha; \beta; a_i) \hat{T}(\alpha; \beta; l - a_i) - H^*(\alpha; \beta; a_i) \hat{S}(\alpha; \beta; l - a_i)] \right\} + \\ & + K_4 \left\{ \hat{T}(\alpha; \beta; l) + \sum_i [G^{**}(\alpha; \beta; a_i) \hat{T}(\alpha; \beta; l - a_i) + \right. \\ & \left. - H^{**}(\alpha; \beta; a_i) \hat{S}(\alpha; \beta; l - a_i)] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny powyższego układu otrzymuje się, dla danego stosunku ω/p , następujące równanie częstości drgań giętnych:

$$\begin{aligned} & \left\{ \hat{T}(\alpha; \beta; l) + 2\alpha \hat{V}(\alpha; \beta; l) + \sum_i [G^*(\alpha; \beta; a_i) \hat{V}(\alpha; \beta; l - a_i) + \right. \\ & \left. - H^*(\alpha; \beta; a_i) \hat{U}(\alpha; \beta; l - a_i)] \right\} \left\{ \hat{T}(\alpha; \beta; l) + \sum_i [G^{**}(\alpha; \beta; a_i) \hat{T}(\alpha; \beta; l - a_i) + \right. \\ & \left. - H^{**}(\alpha; \beta; a_i) \hat{S}(\alpha; \beta; l - a_i)] \right\} - \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (C^3 \text{sh} Cl - D^3 \sin Dl) + \right. \\ & \left. + 2\alpha \hat{T}(\alpha; \beta; l) + \sum_i [G^*(\alpha; \beta; a_i) \hat{T}(\alpha; \beta; l - a_i) - H^*(\alpha; \beta; a_i) \hat{S}(\alpha; \beta; l - a_i)] \right\} \cdot \\ & \cdot \left\{ \hat{V}(\alpha; \beta; l) + \sum_i [G^{**}(\alpha; \beta; a_i) \hat{V}(\alpha; \beta; l - a_i) + \right. \\ & \left. - H^{**}(\alpha; \beta; a_i) \hat{U}(\alpha; \beta; l - a_i)] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

W przypadku podparcia końców wału na podporach niepodatnych, które przy obrocie korpusów łożysk stawiają stały opór (spowodowany tarciem suchym lub półpłynnym) dla $x = 0$ mamy:

$$f(0) = 0$$

oraz

$$EJ f''(0) = M_A = \text{const.}$$

stąd stałe całkowania: $K_1 = 0$ oraz $K_3 = M_A/EJ$.

Dla pozostałych stałych, t.zn. K_2 oraz K_4 , mamy analogiczne warunki dla $x = l$:

$$f(l) = 0,$$

$$-EJ f''(l) = M_B = \text{const.}$$

Zauważmy jeszcze, że dla sprężystego podparcia lewego końca wału dla $x = 0$, jest (bez dysypacji energii):

$$C_L f(0) = -EJ f'''(0),$$

gdzie C_L sztywność ugięcia lewej podpory, oraz

$$C_L^* f'(0) = EJ f''(0),$$

gdzie C_L^* sztywność obrotu lewej podpory.

Zależności między stałymi całkowania, dla podparcia sprężystego lewego końca wału, zatem wynoszą:

$$C_L K_1 = -EJ K_4,$$

$$C_L^* K_2 = EJ K_3,$$

stad $K_3 = (C_L^*/EJ)K_2$ oraz $K_4 = (C_L/EJ)K_1$.

Powyższe zależności dotyczą podpór izotropowych bez wzajemnego sprzężenia sprężystego.

Powracając do najczęściej występującego przypadku swobodnego podparcia końców wału, przedstawimy algorytm obliczeń numerycznych wartości własnych $l\sqrt{\beta}$ – równania częstości oraz częstości drgań p .

Przekształcając równania:

$$\alpha = \frac{J\rho p^2}{2EJ} \left(1 \mp 2\frac{\omega}{p}\right),$$

$$\beta^2 = \frac{p^2 F\rho}{EJ},$$

zapiszemy je w postaci:

$$\frac{\omega}{p} = \frac{\omega}{\beta} \sqrt{\frac{F\rho}{EJ}}, \quad (1.8)$$

$$\alpha = \frac{J\beta^2}{2F} \left(1 \mp 2\frac{\omega}{p}\right). \quad (1.9)$$

Zalóżmy parametry A_i , B_i , a_i , γ_i , l , poza tym stosunek masy jednostkowej wału do jego sztywności zginania $F\rho/EJ$ oraz promień bezwładności przekroju poprzecznego wału $\sqrt{J/F}$, a nadto prędkość kątową ω z jaką wiruje wał.

Z równania (1.8) wyrażając iloraz ω/p przez β , a następnie za pomocą związku (1.9) wyrugowując α z funkcji $\hat{S}(\alpha; \beta; a_i)$, $\hat{T}(\alpha; \beta; a_i)$, $\hat{U}(\alpha; \beta; a_i)$, $\hat{V}(\alpha; \beta; a_i)$ oraz z wyrażeń $G^*(\alpha; \beta; a_i)$, $G^{**}(\alpha; \beta; a_i)$, $H^*(\alpha; \beta; a_i)$ i $H^{**}(\alpha; \beta; a_i)$, otrzymujemy równanie częstości drgań (1.7), które rozwiązujemy względem wartości własnych $l\sqrt{\beta}$ przybliżoną metodą numeryczną. Powyższe czynności, łącznie z numerycznym wyrugowaniem α , programujemy na komputer dla wybieranych przez niego, np. metodą polowienia, wielkości β .

Częstości drgań p wylicza się potem ze związku:

$$p = \frac{(l\sqrt{\beta})^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{F\rho}}.$$

Przykład

Wyznaczyć częstości drgań giętnych p wału wirującego z prędkością kątową $\omega = 260$ [rs⁻¹]. Rozpatrywany wał jednoprzęsłowy o stałej sztywności jest podparty swobodnie w końcach na niepodatnych podporach oraz posiada pięć jednakowych cienkich tarcz rozłożonych symetrycznie wzdłuż jego długości.

Odległości tarcz od lewego końca wału wynoszą:

$$a_1 = 0.3l, \quad a_2 = 0.4l, \quad a_3 = 0.5l,$$

$$a_4 = 0.6l, \quad a_5 = 0.7l.$$

Parametry A_i , B_i oraz γ_i są dla wszystkich tarcz stałe i wynoszą:

$$A_i = \frac{m_i}{F \rho l} = 0.2, \quad B_i = \frac{J_i}{m_i l^2} = 0.1,$$

$$\gamma_i = \frac{J_{0i}}{J_i} = 2, \quad i = 1 \div 5.$$

Pozostałe parametry wynoszą:

$$l = 1.5 \text{ [m]}, \quad \frac{F \rho}{E J} = 2.9347 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}^4} \right],$$

$$\frac{J}{F} = 1.265 \cdot 10^{-4} \left[\text{m}^2 \right].$$

Wyniki liczbowe przeliczone na komputerze osobistym według programu ułożonego zgodnie z powyżej podanym algorytmem zebrano w tabeli 1.

Tabela 1

i	1	2	3	4	5	6
$l\sqrt{\beta_i}$	2.6268	4.8966	5.8782	6.5031	7.0194	7.3518
p_i [rs ⁻¹]	179.02	622.04	896.46	1097.19	1278.32	1402.24

Wartości własne $l\sqrt{\beta}$ jak i częstości drgań giętych p – do szóstej harmonicznej włącznie, przeliczono dla drgań współbieżnych.

Z obliczeń niezamieszczonych w pracy wynika, że wpływ momentów giroskopowych działających bezpośrednio na wał ma praktyczne znaczenie jedynie przy znacznych prędkościach kątowych, $\omega > 3000$ [rs⁻¹]. Zatem dla "normalnych" prędkości kątowych można zakładać, że $\alpha = 0$, wtedy funkcje \hat{S} , \hat{T} , \hat{U} , \hat{V} upraszczają się do funkcji podobnych do funkcji Krylowa:

$$S(\beta; x) = \frac{1}{2}(\text{ch}x\sqrt{\beta} + \cos x\sqrt{\beta}),$$

$$T(\beta; x) = \frac{\sqrt{\beta}}{2\beta}(\text{sh}x\sqrt{\beta} + \sin x\sqrt{\beta}),$$

$$U(\beta; x) = \frac{1}{2\beta}(\text{ch}x\sqrt{\beta} - \cos x\sqrt{\beta}),$$

$$V(\beta; x) = \frac{\sqrt{\beta}}{2\beta^2}(\text{sh}x\sqrt{\beta} - \sin x\sqrt{\beta}),$$

i program obliczeń na komputer znacznie się skraca.

W celu ułatwienia analizy rozpatrywanych drgań sporządzony zostanie wykres wartości własnych $l\sqrt{\beta}$ w funkcji ilorazu ω/p .

Algorytm obliczeń wyglądać będzie teraz następująco: zakłada się stałą wartość ilorazu ω/p , oblicza funkcje $S(\beta; a_i)$, $T(\beta; a_i)$, $U(\beta; a_i)$, $V(\beta; a_i)$, $G^*(\beta; a_i)$,

$G^{**}(\beta; a_i)$, $H^*(\beta; a_i)$ oraz $H^{**}(\beta; a_i)$ dla przewidywanego $\sqrt{\beta}$ i wstawia się wartości obliczonych funkcji w równanie częstości drgań (1.7).

Poszukiwanie wartości własnej $l\sqrt{\beta}$ programuje się na komputer metodą przybliżoną, np. przeszukiwania i połowienia.

Obliczenia numeryczne, zebrane w tabeli 2 i przedstawione na rys.5 przeprowadzono także na komputerze osobistym dla rodziny wałów z pięcioma jednakowymi tarczami rozmieszczonymi symetrycznie, przy czym podobnie jak poprzednio przyjęto:

$$A_i = \frac{m_i}{F\rho l} = 0.2, \quad B_i = \frac{J_i}{m_i} = 0.1, \quad \gamma_i = \frac{J_{0i}}{J_i}, \quad i = 1 \div 5,$$

przy czym:

$$a_1 = 0.3l, \quad a_2 = 0.4l, \quad a_3 = 0.5l, \quad a_4 = 0.6l, \quad a_5 = 0.7l.$$

Tabela 2

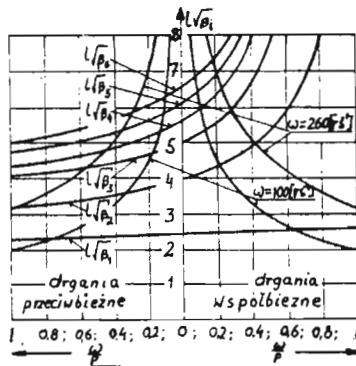
$\frac{\omega}{p}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$l\sqrt{\beta_1}$	2.382	$\frac{2.413}{2.351}$	$\frac{2.446}{2.321}$	$\frac{2.479}{2.293}$	$\frac{2.514}{2.266}$	$\frac{2.548}{2.240}$
$l\sqrt{\beta_2}$	3.958	$\frac{4.293}{3.725}$	$\frac{4.830}{3.546}$	$\frac{5.945}{3.403}$	$\frac{8.050}{3.285}$	$\frac{9.073}{3.185}$
$l\sqrt{\beta_3}$	4.980	$\frac{5.496}{4.657}$	$\frac{6.659}{4.438}$	$\frac{11.450}{4.275}$	$\frac{12.527}{4.147}$	$\frac{12.656}{4.043}$
$l\sqrt{\beta_4}$	5.600	$\frac{6.311}{5.168}$	$\frac{8.001}{4.864}$	$\frac{13.370}{4.632}$	*	*
$l\sqrt{\beta_5}$	6.191	$\frac{7.000}{5.709}$	$\frac{9.051}{5.376}$	$\frac{15.220}{5.126}$	*	*
$l\sqrt{\beta_6}$	6.553	$\frac{7.439}{6.027}$	$\frac{9.739}{5.662}$	$\frac{17.903}{5.385}$	*	*

Miejsca w tabeli, w których nie udało się na komputerze uzyskać sensownych wyników zaznaczono gwiazdkami.

Liczby umieszczone w tabeli "u góry" odnoszą się do drgań współbieżnych, "u dołu" do przeciwbieżnych.

Z wyników zebranych w tabeli widać, że przy wzroście prędkości kątowej, częstości (wartości własne) drgań giętnych współbieżnych rosną, natomiast przy drganiach przeciwbieżnych maleją.

Jest to konsekwencją działania momentów giroskopowych. Jak wiadomo przy drganiach współbieżnych momenty giroskopowe "usztynwiają" wał – (przeciwdziałają ugięciom), a zatem wał drga z większą częstością. Przy drganiach przeciwbieżnych zachodzi zjawisko przeciwne. W obu natomiast przypadkach składowe momenty giroskopowych rosną ze wzrostem prędkości kątowej.²



Rys. 5.

Na rys.5 oprócz funkcji $l\sqrt{\beta} = f(\omega/p)$ przedstawiono także funkcję (1.8) zapisaną w postaci:

$$l\sqrt{\beta} = \frac{l}{\sqrt{\frac{\omega}{p}}} \sqrt{\frac{\omega^2 F \rho}{EJ}}$$

dla parametrów $l = 1.5$ [m], $\frac{F\rho}{EJ} = 2.9347 \cdot 10^{-4}$ [s²/m⁴] oraz prędkości kątowych $\omega = 260$ [rs⁻¹] i 100 [rs⁻¹].

Przebiegi wykresów obu rodzin funkcji pozwalają analizować wpływ prędkości kątowych ω na wartości własne $l\sqrt{\beta}$ różnych rzędów, a tym samym wpływ momentów giroskopowych na drgania współ- i przeciwbieżne.

²W tabeli 2 w miejscach zaznaczonych gwiazdkami uzyskano wartości własne niepotwierdzające powyższej zasady, a nawet przeciwnie, momenty giroskopowe przy precesji współbieżnej jak gdyby "zmiękczały" wał. Potwierdzenia powyższego zjawiska w literaturze [6,7] autor nie znalazł.

2. Drgania giętne wymuszone

Zakładając wymuszenie w postaci sił poprzecznych skupionych $P_i(t)$ przyłożonych w punktach odległych od lewej podpory o b_i ; oraz obciążenia ciągłego $q(x; t)$, równania różniczkowe drgań wymuszonych można przedstawić w postaci (przy pominięciu dysypacji energii oraz momentów gيروسkopowych działających bezpośrednio na wał):

$$EJy^{IV}(x; t) + F\rho\ddot{y}(x; t) + \sum_i \left\{ m_i \ddot{y}(a_i; t) \delta(x - a_i) + \right. \quad (2.1)$$

$$\left. - [J_i \ddot{y}'(a_i; t) + J_{0i} \omega \dot{z}'(a_i; t)] \delta_I(x - a_i) \right\} = \sum_i P_{iy}(t) \delta(x - b_i) + q_y(x; t),$$

$$EJz^{IV}(x; t) + F\rho\ddot{z}(x; t) + \sum_i \left\{ m_i \ddot{z}(a_i; t) \delta(x - a_i) + \right. \quad (2.2)$$

$$\left. - [J_i \ddot{z}'(a_i; t) - J_{0i} \omega \dot{y}'(a_i; t)] \delta_I(x - a_i) \right\} = \sum_i P_{iz}(t) \delta(x - b_i) + q_z(x; t).$$

Calek szczególnych powyższego układu szukać będziemy w postaci:

$$y(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(t), \quad (2.3)$$

$$z(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) h_n(t),$$

gdzie $f_n(x)$ jest funkcją własną spełniającą równanie różniczkowe zwyczajne (1.1) rozpisane dla n -tej częstości i ma postać:

$$f_n(x) = T(\beta_n; x) + \sum_i G^*(\beta_n; a_i) V(\beta_n; x - a_i) - \sum_i H^*(\beta_n; a_i) U(\beta_n; x - a_i) +$$

$$+ K_4 \left[V(\beta_n; x) + \sum_i G^{**}(\beta_n; a_i) V(\beta_n; x - a_i) - \sum_i H^{**}(\beta_n; a_i) U(\beta_n; x - a_i) \right],$$

przy czym stała K_4 wyraża się wzorem:

$$K_4 = \frac{-T(\beta_n; l) - \sum_i \left[G^*(\beta_n; a_i) V(\beta_n; l - a_i) - H^*(\beta_n; a_i) U(\beta_n; l - a_i) \right]}{V(\beta_n; l) + \sum_i \left[G^{**}(\beta_n; a_i) V(\beta_n; l - a_i) - H^{**}(\beta_n; a_i) U(\beta_n; l - a_i) \right]},$$

Podstawiając szeregi (2.3) w równanie (2.1) przy wykorzystaniu równania (1.1), rozpisanego dla n -tej częstości, mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\ddot{g}_n(t) + p_n^2 g_n(t) \right] \left[F\rho f_n(x) + \sum_i m_i f_n(a_i) \delta(x - a_i) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_i J_i f'_n(a_i) \delta_I(x - a_i) \Big] + \left[-\dot{h}_n(t) \pm p_n g_n(t) \right] \omega \cdot \\
 & \cdot \left. \sum_i J_{0i} f'_n(a_i) \delta_I(x - a_i) \right\} = \sum_i P_{iy}(t) \delta(x - b_i) + q_y(x; t). \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Ortogonalizując równanie (2.4) z funkcją $f_k(x)$ na całej długości walca, mamy:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\ddot{g}_n(t) + p_n^2 g_n(t) \right] \left[F \rho \int_0^l f_n(x) f_k(x) dx + \sum_i m_i f_n(a_i) \cdot \right. \right. \\
 & \cdot \left. \int_0^l f_k(x) \delta(x - a_i) dx - \sum_i J_i f'_n(a_i) \int_0^l f_k(x) \delta_I(x - a_i) dx \right] + \\
 & - \left[\dot{h}_n(t) \mp p_n g_n(t) \right] \omega \sum_i J_{0i} f'_n(a_i) \int_0^l f_k(x) \delta_I(x - a_i) dx \Big\} = \\
 & = \sum_i P_{iy}(t) \int_0^l f_k(x) \delta(x - b_i) dx + \int_0^l f_k(x) q_y(x; t) dx. \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Uwzględniając, że całki:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l f_k(x) \delta(x - a_i) dx = f_k(a_i), \\
 & \int_0^l f_k(x) \delta_I(x - a_i) dx = -f'_k(a_i),
 \end{aligned}$$

równanie (2.5) przybiera postać:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\ddot{g}_n(t) + p_n^2 g_n(t) \right] \left[F \rho \int_0^l f_n(x) f_k(x) dx + \sum_i m_i f_n(a_i) f_k(a_i) + \right. \right. \\
 & + \sum_i J_i f'_n(a_i) f'_k(a_i) \Big] + \left[\dot{h}_n(t) \mp p_n g_n(t) \right] \omega \sum_i J_{0i} f'_n(a_i) f'_k(a_i) \Big\} = \\
 & = \sum_i P_{iy}(t) f_k(b_i) + \int_0^l f_k(x) q_y(x; t) dx. \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Postępując analogicznie z równaniem (2.2), otrzymujemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\ddot{h}_n(t) + p_n^2 h_n(t) \right] \left[F \rho \int_0^l f_n(x) f_k(x) dx + \sum_i m_i f_n(a_i) f_k(a_i) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_i J_i f'_n(a_i) f'_k(a_i) \Big] - \left[\dot{g}_n(t) \pm p_n h_n(t) \right] \omega \sum_i J_{0i} f'_n(a_i) f'_k(a_i) \Big\} = \quad (2.7) \\
 & = \sum_i P_{iz}(t) f_k(b_i) + \int_0^l f_k(x) q_z(x; t) dx.
 \end{aligned}$$

Równania (2.6) i (2.7) dla $n \neq k$ tworzą nieskończony układ równań różniczkowych jednorodnych spełnionych jak łatwo zauważyć przez rozwiązania drgań własnych. Natomiast dla $n = k$ układ równań (2.6) i (2.7) jest niejednorodny i można zapisać go w postaci:

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_k(t) + p_k^2 \left(1 \mp \varepsilon_k \frac{\omega}{p_k} \right) g_k(t) + \dot{h}_k(t) \varepsilon_k \omega &= F_{yk}(t) \equiv \\
 & \equiv \frac{\sum_i P_{iy}(t) f_k(b_i) + \int_0^l f_k(x) q_y(x; t) dx}{F\rho \int_0^l f_k^2(x) dx + \sum_i m_i f_k^2(a_i) + \sum_i J_i f_k'^2(a_i)}, \quad (2.8) \\
 -\dot{g}_k(t) \varepsilon_k \omega + \ddot{h}_k(t) + p_k^2 \left(1 \mp \varepsilon_k \frac{\omega}{p_k} \right) h_k(t) &= F_{zk}(t) \equiv \\
 & \equiv \frac{\sum_i P_{iz}(t) f_k(b_i) + \int_0^l f_k(x) q_z(x; t) dx}{F\rho \int_0^l f_k^2(x) dx + \sum_i m_i f_k^2(a_i) + \sum_i J_i f_k'^2(a_i)},
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\varepsilon_k = \frac{\sum_i J_{0i} f_k'^2(a_i)}{F\rho \int_0^l f_k^2(x) dx + \sum_i m_i f_k^2(a_i) + \sum_i J_i f_k'^2(a_i)}, \quad (0 \leq \varepsilon_k < 1).$$

W rezultacie, zgodnie z własnościami równań różniczkowych liniowych, poszukiwane rozwiązanie jest całką ogólną równań jednorodnych opisujących drgania swobodne:

$$\begin{aligned}
 y(x; t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) A_n \cos(p_n t + \varphi_n), \\
 z(x; t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) A_n \sin(p_n t + \varphi_n),
 \end{aligned}$$

oraz sumą iloczynów funkcji własnych $f_k(x)$ przez całki szczególne układu równań (2.8) rozciągniętą na nieskończony zbiór liczb naturalnych k – zgodnie z założonymi szeregami (2.3).

W dalszych rozważaniach będziemy poszukiwali całek szczególnych układu równań (2.8) opisujących drgania wymuszone.

Przechodząc, przy jednorodnych warunkach początkowych, z układem równań (2.8) do dziedziny zmiennej zespolonej mamy:

$$\begin{aligned}(s^2 + A)g_k(s) + \varepsilon_k \omega s h_k(s) &= F_{y_k}(s), \\ -\varepsilon_k \omega s g_k(s) + (s^2 + A)h_k(s) &= F_{z_k}(s),\end{aligned}\quad (2.9)$$

gdzie $A = p_k^2 \mp \varepsilon_k \omega p_k$, znak + odnosi się do drgań przeciwbieżnych. Stąd rozwiązując układ równań (2.9) mamy:

$$\begin{aligned}g_k(s) &= F_{y_k}(s) \frac{s^2 + A}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} + \\ &- F_{z_k}(s) \frac{\varepsilon_k \omega s}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2}, \\ h_k(s) &= F_{y_k}(s) \frac{\varepsilon_k \omega s}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} + \\ &+ F_{z_k}(s) \frac{s^2 + A}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Po rozłożeniu obu funkcji wymiernych na ułamki proste mamy:

$$\begin{aligned}\frac{s^2 + A}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} &= \frac{i}{4p_k(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{s + ip_k} - \frac{1}{s - ip_k} + \frac{1}{s + ip_k(1 \mp \varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} - \frac{1}{s - ip_k(1 \mp \varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} \right], \\ \frac{\varepsilon_k \omega s}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} &= \frac{\pm 1}{4p_k(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} \cdot \\ &\cdot \left[-\frac{1}{s + ip_k} - \frac{1}{s - ip_k} + \frac{1}{s + ip_k(1 \mp \varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} + \frac{1}{s - ip_k(1 \mp \varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} \right].\end{aligned}$$

Przechodząc do dziedziny oryginału otrzymujemy dla pierwszej funkcji:

$$\begin{aligned}\frac{s^2 + A}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} &\bullet \text{---} \circ \frac{i}{4p_k(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} \cdot \\ &\cdot \left[e^{-ip_k t} - e^{ip_k t} + e^{-ip_k(1 \mp \varepsilon_k \frac{\omega}{p_k}) t} - e^{ip_k(1 \mp \varepsilon_k \frac{\omega}{p_k}) t} \right].\end{aligned}$$

Wykorzystując tożsamość Eulera mamy:

$$\frac{s^2 + A}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} \bullet \text{---} \circ \frac{1}{2p_k(1 \mp \varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} \left[\sin p_k t + \sin p_k(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k}) t \right],$$

lub w postaci iloczynowej:

$$\frac{s^2 + A}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} \cdot \dots \circ \frac{1}{p_k(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} \cdot \sin p_k(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})t \cdot \cos 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k} t.$$

Przechodząc do dziedziny oryginału otrzymujemy dla drugiej funkcji:

$$\frac{\varepsilon_k \omega s}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} \cdot \dots \circ \frac{\pm 1}{2p_k(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} \left[-\cos p_k t + \cos p_k(1 \mp \varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})t \right],$$

lub w postaci iloczynowej:

$$\frac{\varepsilon_k \omega s}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} \cdot \dots \circ \frac{1}{p_k(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} \cdot \sin p_k(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})t \cdot \sin 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k} t.$$

Ostatecznie zgodnie z równaniami (2.10) drgania wymuszone przy jednorodnych warunkach początkowych, wyrażają się następującymi splotami funkcji:

$$y(x; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{p_k(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} \int_0^t \sin p_k \left[(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})(t - \tau) \right] \cdot \left\{ F_{yk}(\tau) \cos \left[0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k}(t - \tau) \right] - F_{zk}(\tau) \sin \left[0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k}(t - \tau) \right] \right\} d\tau, \quad (2.11)$$

$$z(x; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{p_k(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})} \int_0^t \sin p_k \left[(1 \mp 0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k})(t - \tau) \right] \cdot \left\{ F_{yk}(\tau) \sin \left[0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k}(t - \tau) \right] - F_{zk}(\tau) \cos \left[0.5\varepsilon_k \frac{\omega}{p_k}(t - \tau) \right] \right\} d\tau.$$

Przy wyrazach z dwoma znakami, znak minus odnosi się do drgań współbieżnych, plus natomiast do przeciwbieżnych.

Przy drganiach przeciwbieżnych częstotści drgań p_k są częstotściami drgań swobodnych przeciwbieżnych, czego we wzorach (2.11) nie wyróżniono z braku oznaczeń.

Ze wzorów (2.11) wynika, że przy udziale sił poprzecznych zginających wał (mogą to być siły ciężkości dla wału o osi poziomej) pojawiają się nowe prędkości krytyczne $\omega_{kr,k} = p_k / (0.5\varepsilon_k)$ jednak są one tak duże, że przekraczają na ogół stosowane prędkości kątowe wałów.³

³Prędkość krytyczna drugiego rodzaju jak widać zależy od masy wału oraz mas tarcz kołowych czego w pracach przeglądowych [6,7] nie stwierdza się.

Powracając do wyrażenia ε_k przedstawionego wzorem (2.8), w tabeli 3 zamieszczone wartości funkcji własnych $f_n(x)$ oraz ich pochodnych $f'_n(x)$ w jedenastu punktach x_i/l równomiernie rozłożonych wzdłuż wału, dla sześciu pierwszych harmonicznych – przy drganiach współbieżnych. Oczywiście, że $a_1 = x_3$, $a_2 = x_4$, $a_3 = x_5$, $a_4 = x_6$ oraz $a_5 = x_7$. Do określenia funkcji własnych $f_n(x)$, zamieszczono w tabeli 3 wartości stałych K_4 . Obliczenia przeprowadzono dla wału rozpatrywanego w przykładzie, przy pominięciu momentów giroskopowych pochodzących od samego wału ($\alpha = 0$).

Ze względu na zależności:

$$\begin{aligned} f_n(x_k) &= (-1)^{n+1} f_n(x_i), \\ f'_n(x_k) &= (-1)^n f'_n(x_i), \end{aligned} \quad (2.12)$$

gdzie $k = 10 - i$, w tabeli 3 podano wielkości tylko dla $i = 1 \div 5$.

3. Drgania własne wału dwuprzęsłowego

Rozpatrzmy drgania własne wału dwuprzęsłowego przedstawionego na rys.6, przy pominięciu momentów giroskopowych pochodzących od samego wału ($\alpha = 0$).

Dla lewego przęsła możemy napisać (warunki swobodnego podparcia na lewej podporze są spełnione):

$$\begin{aligned} f_L(x) &= K_2 \left\{ T(\beta; x) + \sum_i \left[G_L^*(\beta; a_i) V(\beta; x - a_i) - H_L^*(\beta; a_i) U(\beta; x - a_i) \right] \right\} + \\ &+ K_4 \left\{ V(\beta; x) + \sum_i \left[G_L^{**}(\beta; a_i) V(\beta; x - a_i) - H_L^{**}(\beta; a_i) U(\beta; x - a_i) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Dla prawego przęsła natomiast (warunki swobodnego podparcia na prawej podporze są spełnione):

$$\begin{aligned} f_P(x_1) &= K_2^* \left\{ T(\psi\beta; x_1) + \sum_i \left[G_P^*(\psi\beta; \hat{a}_i) V(\psi\beta; x_1 - \hat{a}_i) + \right. \right. \\ &- \left. \left. H_P^*(\psi\beta; \hat{a}_i) U(\psi\beta; x_1 - \hat{a}_i) \right] \right\} + K_4^* \left\{ V(\psi\beta; x_1) + \right. \\ &+ \left. \sum_i \left[G_P^{**}(\psi\beta; \hat{a}_i) V(\psi\beta; x_1 - \hat{a}_i) - H_P^{**}(\psi\beta; \hat{a}_i) U(\psi\beta; x_1 - \hat{a}_i) \right] \right\}, \end{aligned}$$

gdzie oznaczono:

$$\beta = p \sqrt{\frac{F_I \rho}{E J_I}}, \quad \psi = p \sqrt{\frac{F_{II} J_I}{F_I J_{II}}}.$$

Tabela 3

x_i/l	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	p_n [rs ⁻¹]	$K_4 t^2$	ω [rs ⁻¹]
$\frac{f_1(x_i)/l}{f'_1(x_i)}$	0 I	$\frac{0.09813}{0.9440}$	$\frac{0.1851}{0.7784}$	$\frac{0.2504}{0.5098}$	$\frac{0.2890}{0.2530}$	$\frac{0.3019}{0}$	178.93	- 11.2382	260
$\frac{f_2(x_i)/l}{f'_2(x_i)}$	0 I	$\frac{0.09469}{0.8418}$	$\frac{0.1586}{0.3944}$	$\frac{0.1663}{-0.2694}$	$\frac{0.1064}{-0.9095}$	$\frac{0}{-1.1699}$	622.10	- 32.1171	
$\frac{f_3(x_i)/l}{f'_3(x_i)}$	0 I	$\frac{0.09170}{0.7528}$	$\frac{0.1358}{0.06614}$	$\frac{0.09480}{-0.9241}$	$\frac{-0.004252}{-1.0386}$	$\frac{-0.0570}{0}$	896.66	- 50.4115	
$\frac{f_4(x_i)/l}{f'_4(x_i)}$	0 I	$\frac{0.08889}{0.06694}$	$\frac{0.1144}{-0.2428}$	$\frac{0.02705}{-1.5547}$	$\frac{-0.05732}{-0.1596}$	$\frac{0}{1.2305}$	1097.41	- 67.5783	
$\frac{f_5(x_i)/l}{f'_5(x_i)}$	0 I	$\frac{0.08753}{0.6298}$	$\frac{0.1047}{-0.3745}$	$\frac{-0.000622}{-1.7793}$	$\frac{-0.003369}{-1.6781}$	$\frac{0.08293}{0}$	1278.61	- 76.0198	
$\frac{f_6(x_i)/l}{f'_6(x_i)}$	0 I	$\frac{0.08581}{0.5788}$	$\frac{0.09170}{-0.5591}$	$\frac{-0.04107}{-2.1542}$	$\frac{0.04116}{3.6878}$	$\frac{0}{-4.5659}$	1402.39	- 86.5971	

Do określenia wielkości:

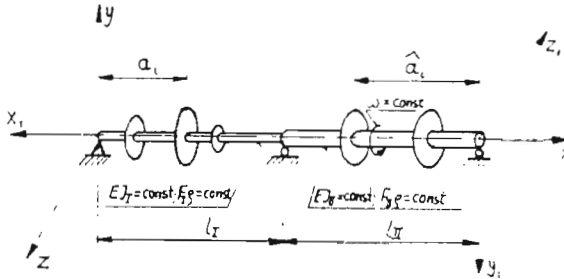
$$\begin{array}{cccc} G_L^*(\beta; a_i), & G_L^{**}(\beta; a_i), & H_L^*(\beta; a_i), & H_L^{**}(\beta; a_i), \\ G_P^*(\psi\beta; \hat{a}_i), & G_P^{**}(\psi\beta; \hat{a}_i), & H_P^*(\psi\beta; \hat{a}_i), & H_P^{**}(\psi\beta; \hat{a}_i), \end{array}$$

należy zastosować układ równań (1.5) przy założeniu, że $\alpha = 0$ oraz po odpowiednich zmianach oznaczeń.

Z warunków swobodnego podparcia na środkowej podporze:

1. $f_L(l_I) = 0$,
2. $f_P(l_{II}) = 0$,
3. $f'_L(l_I) = f'_P(l_{II})$,
4. $EJ_I f''_L(l_I) = EJ_{II} f''_P(l_{II})$,

otrzymuje się układ równań jednorodnych liniowych względem stałych całkowania K_2, K_2^*, K_4 oraz K_4^* .



Rys. 6.

Z warunku nietrywialności rozwiązań powyższego układu równań, przy jednoczesnym spełnieniu równań (1.5) dla lewego i prawego przęsła, otrzymuje się równanie częstości drgań giętnych wału przedstawionego na rys.6.

4: Drgania własne wału podpartego w łożyskach o własnościach ortotropowych

Dla wału jednoprzęsłowego podpartego na swych końcach w łożyskach ortotropowych drgań własnych będziemy poszukiwali w postaci:

$$\begin{array}{l} y(x; t) = f(x) \cos pt, \\ z(x; t) = g(x) \sin pt, \end{array}$$

gdzie funkcja $f(x)$ opisuje postacie drgań w płaszczyźnie xy natomiast $g(x)$ w płaszczyźnie xz .

Po rozdzieleniu zmiennych układ równań cząstkowych (1.1) sprowadza się do układu równań różniczkowych zwyczajnych, który symbolicznie można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} af(x) - bg(x) &= 0, \\ bf(x) - ag(x) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie współczynniki a i b są wyrażeniami z operatorami różniczkowymi $P^{(\nu)} = d^\nu/dx^\nu$:

$$\begin{aligned} a &= P^{(4)} - \frac{P^2}{EJ} \left\{ F\rho P^{(0)} - J\rho P^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \left[m_i P_{x=a_i}^{(0)} \delta(x - a_i) + J_i P_{x=a_i}^{(1)} \delta_I(x - a_i) \right] \right\}, \\ b &= \frac{P^2}{EJ} \left[2J \frac{\omega}{p} \rho P^{(2)} + \sum_i 2J_i \frac{\omega}{p} P_{x=a_i}^{(1)} \delta_I(x - a_i) \right]. \end{aligned}$$

Z układu równań (4.1) mamy więc:

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)f(x) &= 0, \\ (a^2 - b^2)g(x) &= 0, \end{aligned}$$

zatem w płaszczyźnie xy wał drga według równania różniczkowego

$(a - b)f(x) = 0$ - przy drganiach własnych współbieżnych, ($\omega p > 0$),
lub według równania

$(a + b)f(x) = 0$ - przy drganiach własnych przeciwbieżnych, ($\omega p < 0$).

Podobnie mamy w płaszczyźnie xz

$(a - b)g(x) = 0$ - przy drganiach własnych współbieżnych,

$(a + b)g(x) = 0$ - przy drganiach własnych przeciwbieżnych.

Ponieważ wał nie może jednocześnie drgać współ- i przeciwbieżnie, więc równania różniczkowe opisujące drgania w płaszczyźnie xy oraz xz muszą mieć identyczną postać.

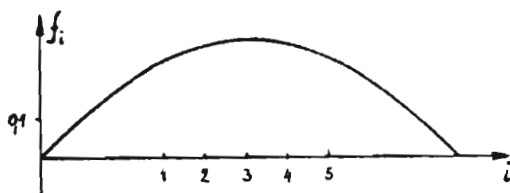
Całki tych równań, a zatem $f(x)$ oraz $g(x)$ mogą mieć jednak nieco różną postać gdy warunki brzegowe w obu płaszczyznach są różne. W konsekwencji dla wału wirującego ze stałą prędkością kątową ω , podpartego na swych końcach w łożyskach o własnościach ortotropowych występuje precesja eliptyczna, a spektra częstości drgań własnych dla obu płaszczyzn (xy oraz xz) są różne, co naturalnie należy mieć na uwadze przy wyznaczaniu drgań wymuszonych.

5. Wykresy postaci drgań własnych współbieżnych

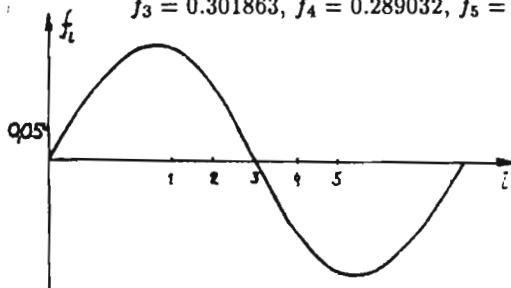
Wykresy postaci drgań własnych współbieżnych dla rozpatrywanego wyżej przykładu liczbowego wału, wirującego z prędkością kątową $\omega = 260$ [rs⁻¹] przedstawiono dla sześciu pierwszych harmonicznych (rys.7 ÷ 12). Wpływ momentów giroskopowych działających bezpośrednio na wał pominięto ($\alpha = 0$).

Bezwymiarowe wartości funkcji własnych $f_n(a_i)/l$, w miejscach przyłożenia tarcz, oznaczono krótko przez f_i .

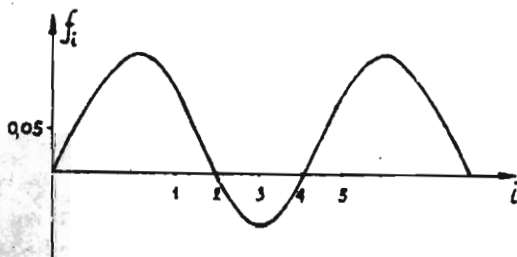
Ze względu na to, że dla wyższych harmonicznych wykresy stawałyby się mniej czytelne zastosowano zmienną skalę w kierunku osi rzędnych. W konsekwencji styczne do wykresów przy lewej podporze nie są nachylone do osi odciętych pod kątem 45°.



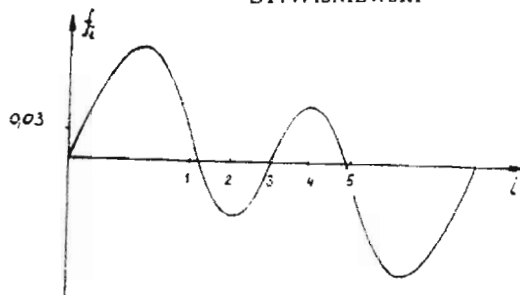
Rys. 7. Pierwsza harmoniczna ($n = 1$); $p_1 = 178.932$; $f_1 = 0.250368$, $f_2 = 0.289032$, $f_3 = 0.301863$, $f_4 = 0.289032$, $f_5 = 0.250368$



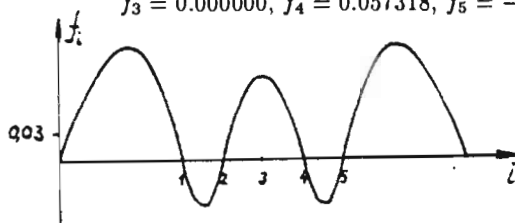
Rys. 8. Druga harmoniczna ($n = 2$); $p_2 = 622.092$; $f_1 = 0.166332$, $f_2 = 0.106436$, $f_3 = -0.000000$, $f_4 = -0.106436$, $f_5 = -0.166332$



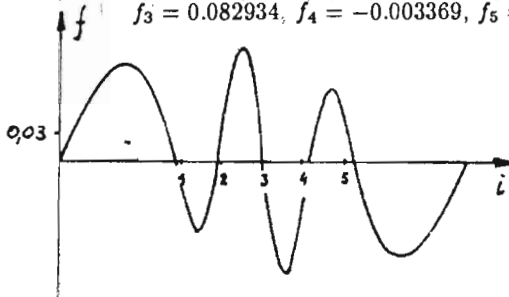
Rys. 9. Trzecia harmoniczna ($n = 3$); $p_3 = 896.652$; $f_1 = 0.094798$, $f_2 = -0.004252$, $f_3 = -0.056998$, $f_4 = -0.004252$, $f_5 = 0.094798$



Rys. 10. Czwarta harmoniczna ($n = 4$); $p_4 = 1097.411$; $f_1 = 0.027047$, $f_2 = -0.057318$,
 $f_3 = 0.000000$, $f_4 = 0.057318$, $f_5 = -0.027047$



Rys. 11. Piąta harmoniczna ($n = 5$); $p_5 = 1278.522$; $f_1 = -0.000622$, $f_2 = -0.003369$,
 $f_3 = 0.082934$, $f_4 = -0.003369$, $f_5 = -0.000622$

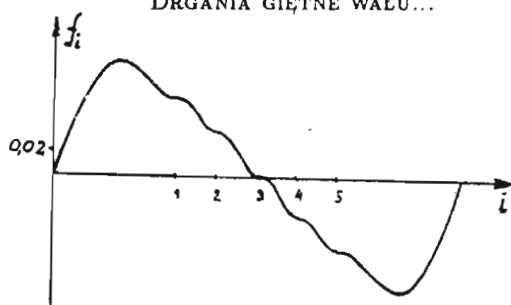


Rys. 12. Szósta harmoniczna ($n = 6$); $p_6 = 1402.389$; $f_1 = -0.041067$, $f_2 = 0.041160$,
 $f_3 = -0.000000$, $f_4 = -0.041160$, $f_5 = 0.041067$

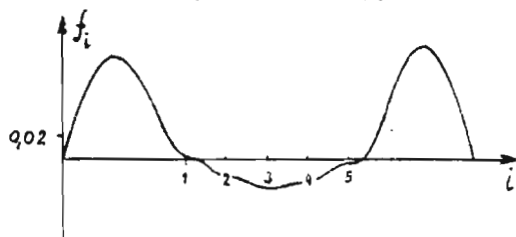
Postacie drgań dla harmonicznych wyższych od szóstej mają zmieniony charakter (dla rozpatrywanego przykładu). I tak dla siódmej harmonicznej postać drgań ma jeden punkt węzłowy (jak przy $n = 2$). Dla harmonicznych od 8 do 16 rzędu po dwa punkty węzłowe przy czym częstotliwości drgań zmieniają się z dużą "gęstością" ($p_8 = 4499.37$, $p_{16} = 4665.74$ [rs⁻¹]). Przy przejściu do postaci z trzema węzłami, których też jest pewna ilość (zbadano do dwudziestej harmonicznej) następuje wyraźniejszy wzrost częstotliwości drgań, a następnie ponowne ich zagęszczenie ($p_{17} = 4858.37$, $p_{20} = 4934.26$ [rs⁻¹]).

Zależności symetrii, wzór (2.12), zachodzą zatem do szóstej harmonicznej wyłącznie, dla wyższych harmonicznych natomiast bardzo wyraźnie zaznacza się wpływ oddziaływania tarcz na wał, a w szczególności momentów giroskopowych.

Jako ilustrację podaję wykresy postaci drgań dla siódmej i ósmej harmonicznej (rys.13 i 14).



Rys. 13. Siódma harmoniczna ($n = 7$); $p_7 = 3436.967$; $f_1 = 0.063914$, $f_2 = 0.037210$,
 $f_3 = 0.000000$, $f_4 = -0.037209$, $f_5 = -0.063913$



Rys. 14. Ósma harmoniczna ($n = 8$); $p_8 = 4499.371$; $f_1 = 0.002023$, $f_2 = -0.014215$,
 $f_3 = -0.022766$, $f_4 = -0.017913$, $f_5 = -0.003321$

6. Podsumowanie i wnioski

Powyższe rozważania przeprowadzone zostały przy założeniu, że rozpatrywany wał (o stałej sztywności i podparty na końcach) jest wykonany z dużą dokładnością – co jest zwykle spełnione przy tego typu konstrukcjach (wały wielowirnikowe pomp, turbin, przekładni transmisyjnych itp). Drugim założeniem jest pominięcie dysypacji energii zarówno w samym wale jak i jego konstrukcji wsporczej. Uproszczenie to może mieć ujemny wpływ na wyprowadzone wzory dla drgań wymuszonych przeciwbieżnych.

Przy bardziej dokładnej analizie może zachodzić również, ze względu na przenoszenie się drgań, konieczność uwzględnienia wzajemnego sprzężenia sprzężystego między podporami łożysk.

Na koniec należy jeszcze raz podkreślić, że uwzględnienie momentów girokopowych pochodzących od samego wału może mieć praktyczny wpływ przy prędkościach kątowych $\omega > 3000$. Dla "normalnych" prędkości kątowych można przyjmować $\alpha = 0$, co upraszcza obliczenia.

Literatura

1. Praca zbiorowa, *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, PWN 1957
2. TIMOSHENKO S., YOUNG D.H., *Vibration problems in engineering*, New York, 1955
3. PARSZEWSKI Z., *Drgania i dynamika maszyn*, WNT, 1982
4. WIŚNIEWSKI S., *Drgania giętne belki z dyskretnymi masami*, Arch. Bud. Maszyn, PWN z.2, 1986
5. WIŚNIEWSKI S., *Drgania giętne wału z wąskimi tarczami kołowymi*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika z.85, 1987
6. MUSZYŃSKA A., *Z zagadnień dynamiki wirników*, IPPT, 14/1971, Warszawa
7. MUSZYŃSKA A., *Modelowanie i analiza dynamiczna wirników*. Prace IPPT PAN, 52, 1975

Summary

The paper presents the process of creation and solution of coupled differential equations describing bending vibrations of the shaft with thin circular discs mounted centrally on it, rotating with a constant angular velocity.

The influence of shear strains on the equations is neglected, because of their relatively small value on a circular section of the shaft.

The influence of gyroscopic moment corresponding to the discs and the shaft is taken into consideration; the discs are assumed to be rigid and discrete.

At the end of the paper the relations for bending vibrations forced by transverse concentrated and uniformly distributed forces are defined.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 30 stycznia 1989 roku