

PROBLEMY WYZNACZANIA TRAJEKTORII, PRĘDKOŚCI I PRZYSPIESZEŃ W RUCHU MECHANIZMÓW IV-tej KLASY

BOGDAN SKALMIERSKI

Politechnika Częstochowska

W pracy znajdzie Czytelnik odpowiedź na pytanie o problem wyznaczania trajektorii, prędkości i przyspieszeń w ruchu mechanizmów IV-tej klasy. Temat jest dość złożony, a zarazem ciekawy i ma duże znaczenie praktyczne.

1. Wstęp

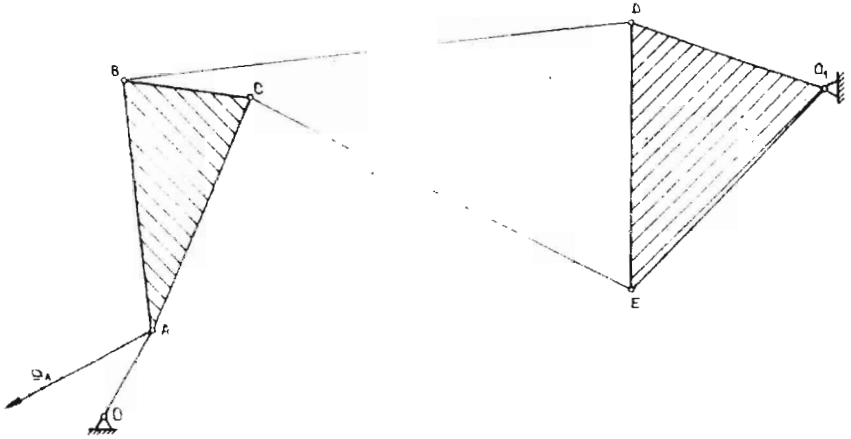
Problem mechanizmów IV-tej klasy zainteresował mnie parę lat temu, gdy podjąłem wykłady z zakresu teorii mechanizmów na Wydziale Budowy Maszyn Politechniki Częstochowskiej. Zagadnienie stało się dla mnie dość intrygujące, gdyż nie umiałem zrazu znaleźć odpowiedzi na wiele pytań dotyczących tej kwestii, które stawiałem sobie i innym. Zwłaszcza zagadnienie wyznaczania prędkości i przyspieszeń metodą graficzną sprawiało dość duże trudności. Również w dostępnej mi literaturze nie znalazłem zbyt wiele na ten temat. W tej sytuacji postanowiłem zająć się tym zagadnieniem.

2. Problem trajektorii

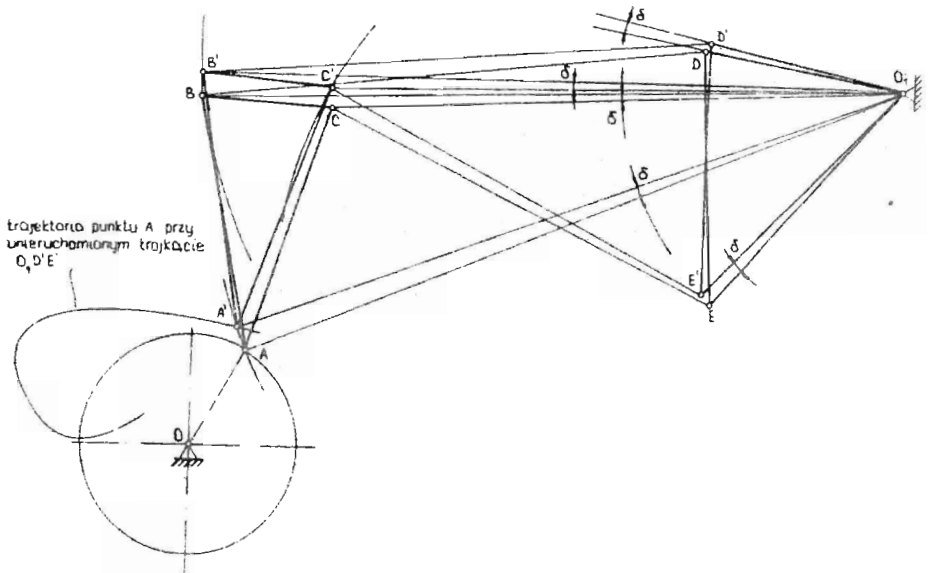
Rozważmy na początku mechanizm przedstawiony na rys.1. Najpierw zastanówmy się nad znalezieniem trajektorii jednego z punktów owego mechanizmu, np. punktu C . Zadanie można rozwiązać metodą graficzną, a także metodą analityczną.

Metoda graficzna wymaga patrzenia na ruch członu ABC jak na ruch złożony. Przyjmując, że ruch unoszenia jest ruchem obrotowym trójkąta O_1DE , wyznaczamy trajektorię punktu A względem nieruchomego trójkąta O_1DE (trajektorię w ruchu względnym), patrz rys.2.

Zauważamy, że punkt A w ruchu względem nieruchomego trójkąta O_1DE porusza się po torze krzywoliniowym, ale różnym od okręgu (rzecz jest oczywista).



Rys. 1.



Rys. 2.

W rzeczywistości punkt A porusza się po okręgu o promieniu r . A zatem, dla danej konfiguracji trójkąta ABC względem trójkąta O_1DE mamy możliwe (lub nie) położenie punktu A na okręgu o promieniu r . Położenie to znajdujemy obracając jako sztywną całość cały układ wokół punktu O_1 , aż do pokrycia punktu A' z punktem A na okręgu (patrz. rys.2). A zatem jeżeli znajdziemy trajektorię punktu A względem nieruchomego trójkąta O_1DE , to wychodząc z kolejnych punktów w okręgu 1,2,3... itd możemy znaleźć odpowiednią konfigurację trójkąta ABC względem nieruchomego trójkąta O_1DE . Obracając całością względem punktu O_1 , aż do pokrycia się punktu A' z punktem A otrzymujemy kolejne konfiguracje układu dla różnych położenia korby $0A$. Zestawienie tych kolejnych położenia układu mamy na rys.3. W ten sposób uwidacznia się trajektoria np. punktu C .

Zadanie rozwiązane graficznie można uzyskać metodą analityczną. Z rysunku 4 czytamy, że:

$$\begin{aligned} W &= r \cos \varphi + a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1 + c_1 \cos \gamma_1, \\ H &= r \sin \varphi + a_1 \sin \alpha_1 + b_1 \sin \beta_1 + c_1 \sin \gamma_1, \\ W &= r \cos \varphi + a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \cos \beta_2 + c_2 \cos \gamma_2, \\ H &= r \sin \varphi + a_2 \sin \alpha_2 + b_2 \sin \beta_2 + c_2 \sin \gamma_2, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \alpha, \quad \gamma_2 = \gamma_1 - \gamma. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Rozwiązanie układu (2.1) umożliwia wyznaczenie równania ruchu dowolnego punktu mechanizmu.

Eliminując z pierwszych czterech równań kąty β_1, β_2 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} b_1^2 &= (A_{11} - c_1 \cos \gamma_1)^2 + (A_{12} - c_1 \sin \gamma_1)^2, \\ b_2^2 &= (A_{21} - c_2 \cos \gamma_2)^2 + (A_{22} - c_2 \sin \gamma_2)^2, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_{11} &= W - r \cos \varphi - a_1 \cos \alpha_1, & A_{12} &= H - r \sin \varphi - a_1 \sin \alpha_1, \\ A_{21} &= W - r \cos \varphi - a_2 \cos(\alpha_1 + \alpha), & A_{22} &= H - r \sin \varphi - a_2 \sin(\alpha_1 + \alpha). \end{aligned}$$

Podnosząc odpowiednie wyrazy do kwadratu oraz podstawiając:

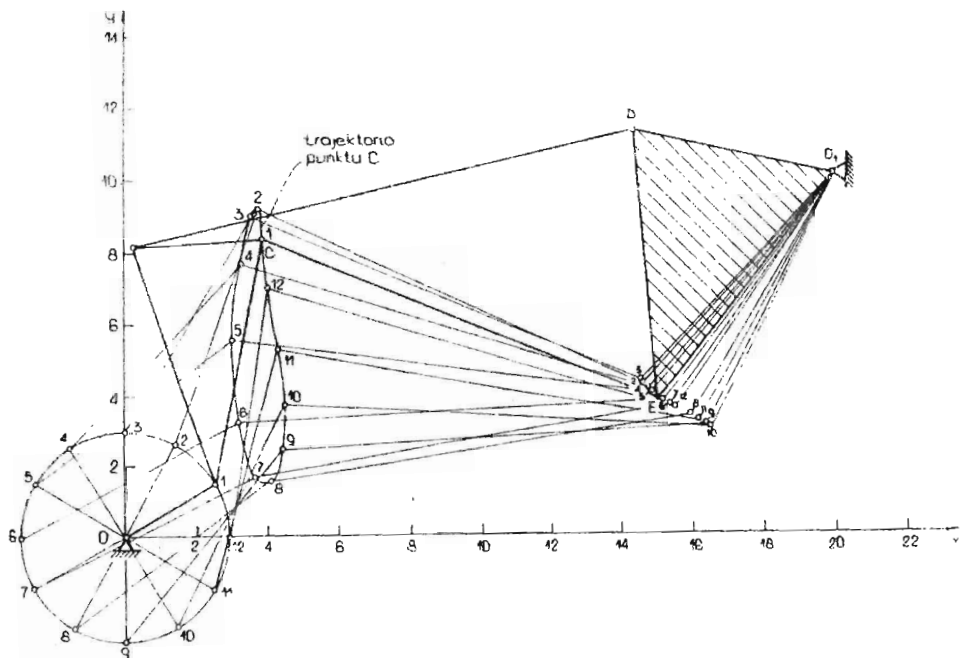
$$K_1 = b_1^2 - A_{11}^2 - A_{12}^2 - c_1^2, \quad K_2 = b_2^2 - A_{21}^2 - A_{22}^2 - c_2^2,$$

$$F_{11} = 2A_{11}c_1, \quad F_{12} = 2A_{12}c_1, \quad F_{21} = 2A_{21}c_2, \quad F_{22} = 2A_{22}c_2,$$

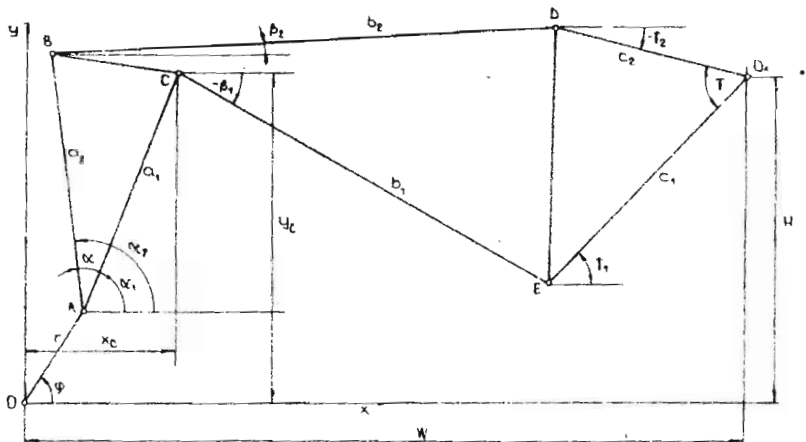
otrzymamy:

$$F_{11} \cos \gamma_1 + F_{12} \sin \gamma_1 + K_1 = 0, \quad (2.2)$$

$$F_{21} \cos \gamma_2 + F_{22} \sin \gamma_2 + K_2 = 0.$$



Rys. 3.



Rys. 4.

Rozwiązanie każdego z równań (2.2) jest następujące:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2} = \frac{-F_{12} \mp \sqrt{F_{12}^2 - K_1^2 - F_{11}^2}}{K_1 - F_{11}} = \frac{D_{1i}}{D_2} \quad (i = 1, 2),$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} = \frac{-F_{22} \mp \sqrt{F_{22}^2 - K_2^2 - F_{21}^2}}{K_2 - F_{21}} = \frac{E_{1j}}{E_2} \quad (j = 1, 2).$$

Ponieważ:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_2}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}},$$

przeto:

$$\frac{E_{1j}}{E_2} = \frac{D_{1i} - D_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{D_2 + D_{1i} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}},$$

co w konsekwencji prowadzi do czterech następujących równań przestępnych:

$$\begin{aligned} E_{11}(D_2 - D_{11} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}) - E_2(D_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + D_{11}) &= 0, \\ E_{12}(D_2 - D_{12} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}) - E_2(D_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + D_{12}) &= 0, \\ E_{11}(D_2 - D_{12} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}) - E_2(D_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + D_{12}) &= 0, \\ E_{12}(D_2 - D_{11} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}) - E_2(D_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + D_{11}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} E_{11} &= -F_{22} + S_2, & E_{12} &= -F_{22} - S_2, & S_2 &= \sqrt{F_{22}^2 - K_2^2 - F_{21}^2}, \\ E_2 &= K_2 - F_{21}, \\ D_{11} &= -F_{12} + S_1, & D_{12} &= -F_{12} - S_1, & S_1 &= \sqrt{F_{12}^2 - K_1^2 - F_{11}^2}, \\ D_2 &= K_1 - F_{11}. \end{aligned}$$

Wszystkie wielkości przed chwilą napisane są funkcjami kąta α_1 przy ustalonej wartości kąta φ . Tak więc na podstawie równań (2.3) będziemy wyznaczać odpowiednie kąty α_1 .

Zauważmy, że liczba konfiguracji układu odpowiadająca jednemu kątowi φ może być różna w zależności od wymiarów i kształtu członów mechanizmu. Może się zdarzyć, że nie ma żadnej konfiguracji, jest jedna lub więcej. Wszystko zależy od tego, czy istnieją rzeczywiste pierwiastki równań (2.3). Może się również zdarzyć, że nie dla wszystkich kątów φ istnieje możliwe położenie układu, co oznaczałoby, że

dla pewnych wartości φ naruszony byłby warunek geometrycznej zgodności przemieszczeń. Tak więc rozwiązanie równań (2.3) daje możliwość odpowiedzi na pytanie: czy narzucone przez konstruktora kształty i wymiary członów mechanizmu są sensowne. Znalezienie jakiegokolwiek rozwiązania jednego z równań (2.3) oznacza znalezienie kąta α_1 , a to wystarczy by podać położenia wszystkich punktów układu.

Przykład liczbowy przeprowadzimy dla następujących danych:

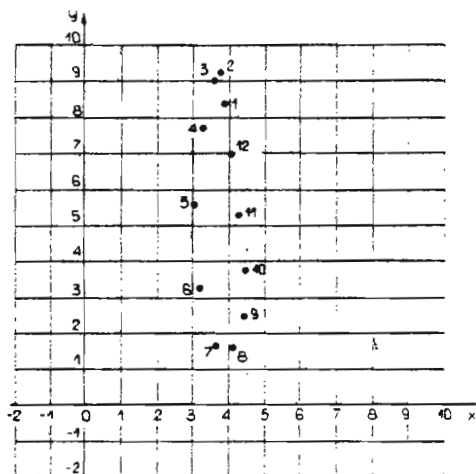
$$\begin{aligned} r &= 3, & a_1 &= 7, & a_2 &= 7, & b_1 &= 12, \\ b_2 &= 14.4, & c_1 &= 8, & c_2 &= 5.8. \end{aligned}$$

Dla tych danych obliczono kąty α_1 dla dwunastu położen korby OA ($\varphi_1 = (\frac{\pi}{6})i$, $i = 1, \dots, 12$).

Wyznaczenie kątów α_1 umożliwiło wyznaczenie dwunastu położen punktu C (patrz rys.5), przez podanie współrzędnych tego punktu odpowiadających różnym kątom φ :

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= r \cos \varphi + a_1 \cos[\alpha_1(\varphi)], \\ y(\varphi) &= r \sin \varphi + a_1 \sin[\alpha_1(\varphi)]. \end{aligned}$$

Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy I oraz zilustrowano na wykresie (rys.5).



Rys. 5.

Tablica I.

i	φ_i [rad]	x_i	y_i
1	0.524	3.857	8.386
2	1.047	3.752	9.226
3	1.571	3.583	9.013
4	2.094	3.299	7.694
5	2.618	3.089	5.582
6	3.142	3.200	3.250
7	3.665	3.646	1.664
8	4.189	4.113	1.582
9	4.712	4.411	2.435
10	5.236	4.474	3.739
11	5.760	4.308	5.288
12	6.283	4.046	6.921

Wyznaczenie konkretnego położenia punktu C , dla danego kąta α_1 jest jednocześnie odpowiedzią na pytanie o daną konfigurację układu, co oznacza, że położenie wszystkich jego punktów jest jednocześnie określone.

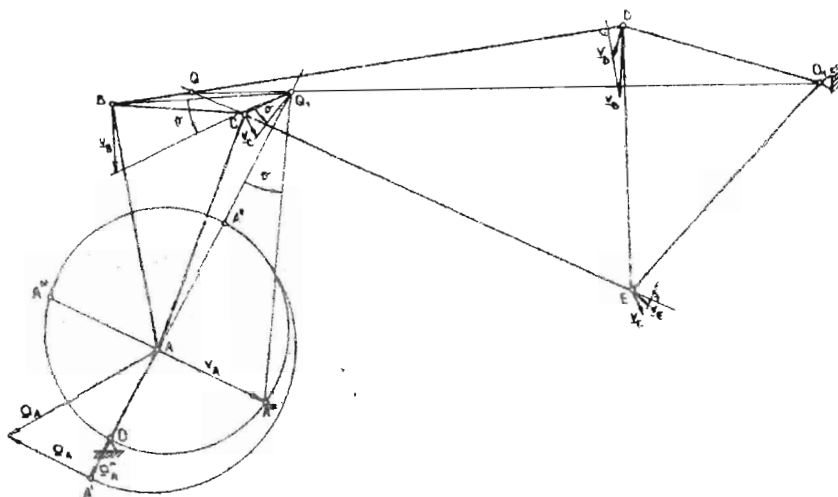
3. Prędkości i przyspieszenia

Przechodzimy obecnie do kwestii prędkości i przyspieszeń. Tu również można korzystać z metody graficznej lub metody analitycznej.

Przystępując do rozwiązania zadania metodą graficzną, będziemy wyznaczać prędkości i przyspieszenia punktów B, C, D, E mechanizmu przedstawionego na rys.1 przy znanym przyspieszeniu punktu A i tym, że korba OA obraca się zgodnie ze wskazówkami zegara.

Zadanie rozpoczniemy od wyznaczenia prędkości punktu A . Zauważmy, że przyspieszenie składa się z przyspieszenia stycznego a_A^t i normalnego a_A^n . To ostatnie potrafimy wyznaczyć wykreślnie o ile znana jest prędkość punktu A (stosujemy wówczas konstrukcję przyspieszenia normalnego). Teraz sytuacja jest odwrotna: znamy przyspieszenie a_A^n i chcemy na tej podstawie wyznaczyć prędkość punktu A . Ażeby zrealizować nasz zamiar musimy odwrócić bieg czynności, a więc odwrócić o 180° odcinek skierowany (AA') otrzymując (AA''). Następnie stawiając nóżkę cyrkla w połowie długości odcinka (OA'') kreślimy okrąg tak, by (OA'') był jego średnicą. Jeżeli z punktu A poprowadzimy prostą prostopadłą do średnicy (OA'') to otrzymamy dwa punkty A''' i A^{IV} przecięcia tej prostej z okręgiem. Ponieważ korba OA obraca się zgodnie ze wskazówkami zegara, to odcinek (AA''') jest proporcjonalny do prędkości punktu A . Znamy współczynniki skali konstrukcji μ_k oraz przyspieszeń μ_a . Stąd $\mu_v = \sqrt{\mu_a \mu_k}$ jest współczynnikiem skali prędkości.

Przystępujemy do wyznaczania prędkości punktów B, C, D, E . O ile kierunki prędkości punktów D i E są znane, gdyż trójkąt DEO_1 znajduje się w ruchu obrotowym dookoła punktu O_1 , to nieco trudniej zorientować się, gdzie znajduje się chwilowy środek obrotu trójkąta ABC . Zauważmy jednak, że wystarczy pomyśleć o ruchu trójkąta ABC jak o ruchu złożonym. Przyjmijmy, że ruchem unoszenia jest ruch trójkąta DEO_1 , zaś ruchem względnym jest ruch trójkąta ABC względem trójkąta DEO_1 . Zauważmy, że w tym ruchu względnym chwilowym środkiem obrotu jest punkt Q (rys.6).



Rys. 6.

Prędkość każdego punktu jest sumą prędkości unoszenia i prędkości względnej. Ponieważ prędkość względna punktu Q jest równa zero, przeto prędkość unoszenia jest prędkością całkowitą. Jej kierunek jest znany, ponieważ znamy środek obrotu, którym jest punkt Q_1 . Wnioskujemy zatem, że chwilowy środek obrotu trójkąta ABC w ruchu bezwzględnym leży na prostej łączącej punkt Q z punktem O_1 . Z drugiej strony znamy kierunek prędkości v_A punktu A i wiemy, że również na prostej prostopadłej do wektora v_A leży chwilowy środek obrotu trójkąta ABC . Tak więc przecięcie owych dwóch prostych wyznacza punkt Q_1 , który jest chwilowym środkiem obrotu w ruchu bezwzględnym trójkąta ABC . Znając położenie punktu Q_1 , znamy kierunki prędkości punktów B i C . Można zatem uznać, że znamy rozwiązanie zadania polegające na wyznaczeniu prędkości punktów A, B, C, D i E .

Przejdziemy do wyznaczenia przyspieszeń punktów B, C, D i E . Rozumowanie będzie podobne. Ruch trójkąta ABC będziemy uważali tak samo jak poprzednio za złożony. Punkt Q nie ma prędkości względnej i stąd jego przyspieszenie bezwzględne będzie składać się jedynie z dwóch składników – przyspieszenia

względny i przyspieszenia unoszenia (przyspieszenie Coriolisa jest równe zeru). W ruchu względnym trójkąt ABC porusza się przy nieruchomych punktach D i E . Prędkości względne punktu B i C są prostopadłe do odcinków DB oraz EC , zaś prędkości unoszenia są prostopadłe do odcinków Q_1B oraz Q_1C . Można zatem prędkości punktów B i C rozłożyć na składowe ruchu względnego oraz unoszenia. Na podstawie prędkości względnych punktów B i C wyznaczamy składowe normalne przyspieszeń tych punktów. Chcąc wyznaczyć przyspieszenie względne punktu Q napiszemy:

$$a_{QW} = a_{BW} + a_{QBW}^n + a_{QBW}^t \quad (3.1)$$

Ponieważ:

$$a_{BW} = a_{BW}^n + a_{BW}^t, \quad (3.2)$$

przeto:

$$a_{QW} = a_{BW}^n + a_{QBW}^n + a_{BW}^t + a_{QBW}^t \quad (3.3)$$

Zauważmy, że przyspieszenie normalne a_{BW}^n oraz a_{QBW}^n mają te same kierunki. Podobnie przyspieszenia a_{BW}^t oraz a_{QBW}^t mają również te same kierunki. Przyspieszenie a_{QBW}^n można wyznaczyć, bowiem:

$$v_{QBW} = -v_{BW} \quad \left(a_{QBW}^n = \frac{v_{QBW}^2}{L_{QB}} \right).$$

Przyspieszenie $a_{BW}^t + a_{QBW}^t$ leży na prostej prostopadłej poprowadzonej przez koniec wektora $a_{BW}^n + a_{QBW}^n$ zaczepionego w punkcie Q . Na razie ta informacja nam wystarczy.

Z drugiej strony idąc od punktu C do punktu Q zauważymy analogiczną sytuację:

$$a_{QW} = a_{CW}^n + a_{QCW}^n + a_{CW}^t + a_{QCW}^t \quad (3.4)$$

Wyznaczenie wektora $a_{CW}^n + a_{QCW}^n$ jest tak samo realizowane jak wektora $a_{BW}^n + a_{QBW}^n$. Również tak samo przyspieszenie $a_{CW}^t + a_{QCW}^t$ leży na prostej poprowadzonej przez koniec wektora $a_{CW}^n + a_{QCW}^n$ zaczepionego w punkcie Q .

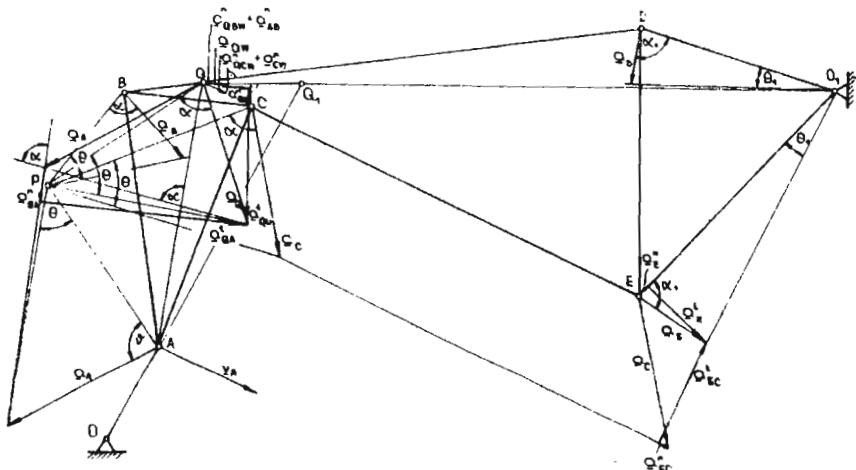
Zauważmy, że punkt przecięcia prostych prostopadłych przechodzących przez końce wektorów $a_{BW}^n + a_{QBW}^n$ oraz $a_{CW}^n + a_{QCW}^n$ wyznacza koniec wektora a_{QW} przyspieszenia punktu Q w ruchu względnym (rys.7).

Całkowite przyspieszenia punktu Q wyznaczymy w sposób następujący:

$$a_Q = a_{QW} + a_{QU} \quad (a_{Q \text{ Cor}} = 0), \quad (3.5)$$

przy czym:

$$a_{QU} = a_{QU}^n + a_{QU}^t, \quad (3.6)$$



Rys. 7.

\mathbf{a}_{QU}^n jest do wyznaczenia ze względu na znaną prędkość $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_{QU}$ ($\mathbf{v}_{QW} = 0$). Zatem znamy wektor $\mathbf{a}_{QW} + \mathbf{a}_{QU}^n$, natomiast nie znamy wektora \mathbf{a}_{QU}^t , lecz wiemy, że jego koniec (jak i koniec wektora \mathbf{a}_Q) leży na prostej prostopadłej do \mathbf{a}_{QU}^n .

Z drugiej strony przechodząc z punktu A do punktu Q napiszemy:

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{QA}^n + \mathbf{a}_{QA}^t. \quad (3.7)$$

Znamy $\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{QA}^n$, nie znamy \mathbf{a}_{QA}^t . Wiemy jedynie, że wektor ten leży na prostej prostopadłej do \mathbf{a}_{QA}^n przechodzącej przez jego koniec. Prosta ta przecina się w jakimś punkcie z prostą prostopadłą do wektora \mathbf{a}_{QU}^n i przechodzącą przez jego koniec. Punkt ten wyznacza koniec wektora \mathbf{a}_Q .

Znając przyspieszenia \mathbf{a}_A oraz \mathbf{a}_Q (dwóch punktów należących do trójkąta ABC) wyznaczamy przyspieszenia pozostałych punktów mechanizmu jedną ze znanych metod. Tyle na temat metody wykreślnej.

Przystępując do metody analitycznej wyznaczenia prędkości zauważamy, że można ten problem rozwiązać różnie. Jednym ze sposobów jest różniczkowanie równań więzów (2.1) w celu otrzymania równań możliwych prędkości:

$$\begin{aligned} r \sin \varphi \dot{\varphi} + a_1 \sin \alpha_1 \dot{\alpha}_1 + b_1 \sin \beta_1 \dot{\beta}_1 + c_1 \sin \gamma_1 \dot{\gamma}_1 &= 0, \\ r \cos \varphi \dot{\varphi} + a_1 \cos \alpha_1 \dot{\alpha}_1 + b_1 \cos \beta_1 \dot{\beta}_1 + c_1 \cos \gamma_1 \dot{\gamma}_1 &= 0, \\ r \sin \varphi \dot{\varphi} + a_2 \sin \alpha_2 \dot{\alpha}_2 + b_2 \sin \beta_2 \dot{\beta}_2 + c_2 \sin \gamma_2 \dot{\gamma}_2 &= 0, \\ r \cos \varphi \dot{\varphi} + a_2 \cos \alpha_2 \dot{\alpha}_2 + b_2 \cos \beta_2 \dot{\beta}_2 + s_2 \cos \gamma_2 \dot{\gamma}_2 &= 0, \\ \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2, \quad \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Z otrzymanych równań można wyznaczyć prędkości kątowe $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2$ przy założonym $\dot{\varphi}$, oczywiście przy uprzednim wyznaczeniu kątów $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ dla zadanego kąta φ . Wyznaczenie wszystkich prędkości kątowych jest jednocześnie rozwiązaniem problemu wyznaczenia prędkości poszczególnych punktów mechanizmu.

Powtórne różniczkowanie równań więzów (2.1) prowadzi do równań możliwych przyspieszeń, z których podobnie jak w przypadku wyznaczenia prędkości możemy wyznaczyć przyspieszenia kątowe. Znajomość prędkości i przyspieszeń kątowych daje możliwość wyznaczenia przyspieszeń wszystkich punktów układu.

Innym sposobem wyznaczenia prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmu jest wykorzystanie możliwości zbudowania funkcji różniczkowalnej, na podstawie znanych jej wartości w punktach pewnego przedziału.

My dysponujemy wartościami współrzędnych punktu C dla pewnych położań mechanizmu. Oczywiście liczba położań mechanizmu może być dowolnie wielka, co ma bezpośredni wpływ na dokładność aproksymacji.

Zbudowanie takich form analitycznych jest możliwe np. przez określenie współczynników Fouriera z dowolną dokładnością (wszystko zależy od liczby współrzędnych x_i oraz y_i (funkcji $x(\varphi)$ i $y(\varphi)$). Wiadomo bowiem, że [1]:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad (3.9)$$

gdzie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi.$$

Jeżeli nie dysponujemy przebiegiem funkcji $f(\varphi)$, a jedynie znamy jej wartości dla pewnych kątów φ , to wówczas istnieje zawsze możliwość przybliżonego obliczenia współczynników rozwinięcia.

Dla naszych celów wystarczy znać kilka pierwszych współczynników. Zadanie zrealizujemy przechodząc od wzorów dokładnych do przybliżonych przez zastąpienie całek sumami. Można tu wykorzystać różne metody przybliżonego całkowania. I tak wykorzystując metodę prostokątów, dzieląc najpierw przedział $[0, 2\pi]$ za pomocą punktów $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{2\pi}{m} \cdot 2, \frac{2\pi}{m} \cdot 3, \dots, \frac{2\pi}{m} \cdot (m-1), 2\pi$, na m równych

części napiszemy:

$$a_k \approx \frac{2}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f_i \cos \frac{2\pi i}{m} k, \quad (3.10)$$

$$b_k \approx \frac{2}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f_i \sin \frac{2\pi i}{m} k.$$

W naszym przypadku $m = 12$, wtedy wartości kątów są następujące:

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$, a pierwsze współczynniki Fouriera wyrażą się wzorami:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{6}(f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9 + f_{10} + f_{11}), \\ a_1 &= \frac{1}{6}[f_0 - f_6 + 0.866(f_1 + f_{11} - f_5 - f_7) + 0.5(f_2 + f_{10} - f_4 - f_8)], \\ a_2 &= \frac{1}{6}[f_0 + f_6 - f_3 - f_9 + 0.5(f_1 + f_5 + f_7 + f_{11} - f_2 - f_4 - f_8 - f_{10})], \\ a_3 &= \frac{1}{6}(f_0 + f_4 + f_8 - f_2 - f_6 - f_{10}), \\ b_1 &= \frac{1}{6}[0.5(f_1 + f_5 - f_7 - f_{11}) + 0.866(f_2 + f_4 - f_8 - f_{10}) + f_5 - f_9], \\ b_2 &= \frac{1}{6}[0.866(f_1 + f_2 + f_7 + f_8 - f_4 - f_6 - f_{10} - f_{11})], \\ b_3 &= \frac{1}{6}(f_1 + f_5 + f_9 - f_3 - f_7 - f_{11}), \end{aligned}$$

gdzie f_i są wartościami funkcji $f(\varphi)$ w punktach $\varphi_i = (2\pi/m)i$, $f_0 = f_{12}$, funkcja $f(\varphi)$ jest funkcją okresową o okresie 2π . W naszym przypadku dla danych: $r = 3$, $a_1 = 7$, $a_2 = 7$, $b_1 = 12$, $b_2 = 14.4$, $c_1 = 8$, $c_2 = 5.8$, mamy dla rozwinięcia funkcji $x(\varphi)$:

$$\begin{aligned} a_0 &= 7.63, & a_1 &= 0.483, & a_2 &= -0.186, & a_3 &= 0.005, \\ b_1 &= -0.474, & b_2 &= 0.029, & b_3 &= -0.03, \end{aligned}$$

natomiast dla funkcji $y(\varphi)$:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 10.797, & a_{11} &= 1.847, & a_{12} &= -0.323, & a_{13} &= -0.003, \\ b_{11} &= 2.783, & b_{12} &= -0.209, & b_{13} &= 0.073. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^3 (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \\ y(\varphi) &= \frac{a_{10}}{2} + \sum_{k=1}^3 (a_{1k} \cos k\varphi + b_{1k} \sin k\varphi). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Różniczkując $x(\varphi)$ oraz $y(\varphi)$ względem czasu otrzymujemy składowe wektora prędkości punktu C :

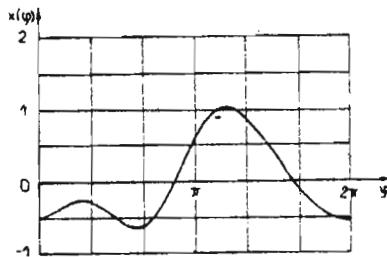
$$\dot{x}(\varphi) = \frac{dx}{d\varphi} \dot{\varphi}, \quad (3.12)$$

$$\dot{y}(\varphi) = \frac{dy}{d\varphi} \dot{\varphi}.$$

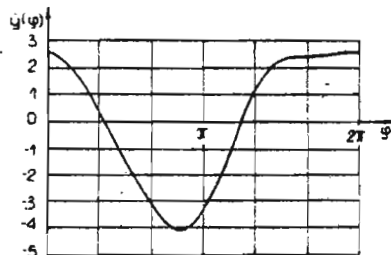
W celu wyznaczenia składowych przyspieszeń wykonujemy powtórne różniczkowanie:

$$\ddot{x}(\varphi) = \frac{d^2x}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{dx}{d\varphi} \ddot{\varphi}, \quad (3.13)$$

$$\ddot{y}(\varphi) = \frac{d^2y}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{dy}{d\varphi} \ddot{\varphi}.$$

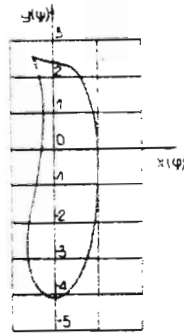


Rys. 8.



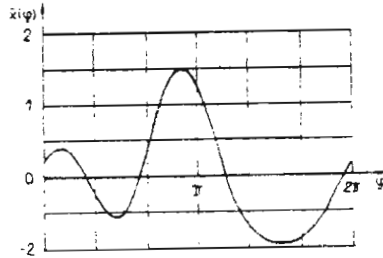
Rys. 9.

Na rysunkach 8 i 9 przedstawiono wykresy przebiegów składowych prędkości funkcji kąta φ , są to prędkości przy założeniu, że prędkość kątowa korby OA $\omega = 1/s$.

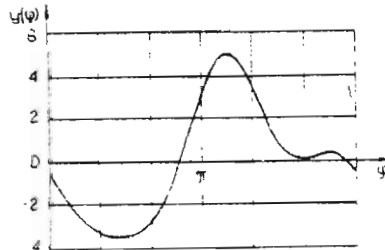


Rys. 10.

Na rys.10 znajduje się hodograf prędkości punktu C , tu również założono prędkość kątową stałą równą $1/s$.

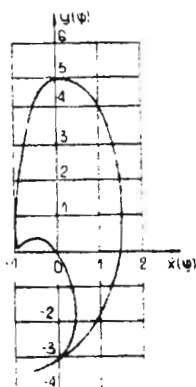


Rys. 11.



Rys. 12.

Kolejne rysunki 11, 12 oraz 13 obrazują przebiegi drugich pochodnych $\ddot{x}(\varphi)$ oraz $\ddot{y}(\varphi)$ w funkcji kąta φ oraz hodograf przyspieszenia punktu C przy założeniu $\omega = 1/s$.



Rys. 13.

Wyniki liczbowe zestawiono w tablicach II i III.

Tablica II

Tablica III

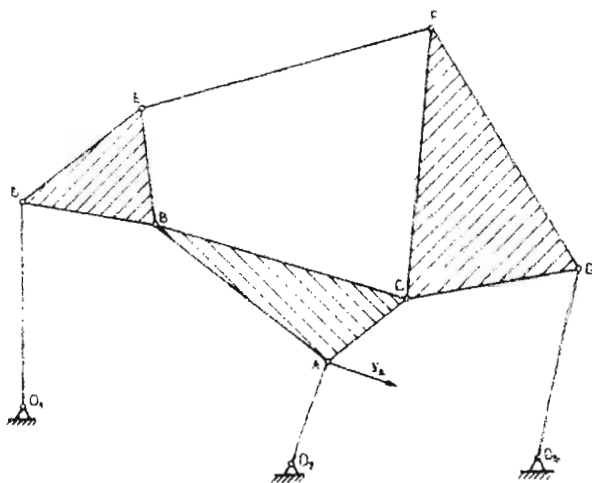
φ	$\dot{x}(\varphi)$	$\dot{y}(\varphi)$
0.000	- 0.506	2.584
0.524	- 0.316	1.846
1.047	- 0.272	0.341
1.571	- 0.526	- 1.438
2.094	- 0.622	- 3.123
2.618	- 0.139	- 4.093
3.142	0.622	- 3.420
3.665	1.018	- 1.145
4.189	0.858	1.196
4.712	0.410	2.274
5.236	- 0.080	2.422
5.760	- 0.447	2.556
6.283	- 0.506	2.584

φ	$\ddot{x}(\varphi)$	$\ddot{y}(\varphi)$
0.000	0.216	- 0.528
0.524	0.360	- 2.278
1.047	- 0.258	- 3.283
1.571	- 0.540	- 3.418
2.094	0.335	- 2.830
2.618	1.398	- 0.527
3.142	1.272	3.112
3.665	0.183	5.018
4.189	- 0.686	3.439
4.712	- 0.948	0.834
5.236	- 0.879	0.090
5.760	- 0.453	0.371
6.283	0.216	- 0.528

Na zakończenie omówimy przykład mechanizmu o jednym stopniu swobody, którego budowę przedstawiono na rys.14.

Ograniczymy się tu do metody graficznej, proponując Czytelnikowi podjęcie próby rozwiązania zadania metodą analityczną. Nie będziemy również tak szczegółowo opisywać metody rozwiązania problemu jak poprzednio ograniczając się do istotnych uwag dotyczących wyznaczenia prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmu.

I tak chcąc znaleźć prędkości punktów B, C, D, E, F i G rozpoczynamy od wyznaczenia prędkości punktów Assura S_1 i S_2 należących do trójkątów BDE oraz FGC (rys.15).



Rys. 14.

Następnie rozważając ruch trójkąta BDE jako ruch złożony z ruchu trójkąta FGC uważanego za ruch unoszenia oraz ruchu względnego trójkąta BDE względem trójkąta FGC wyznaczamy chwilowy środek obrotu trójkąta BDE w ruchu względem (punktu Q). Ponieważ punkt Q w rozpatrywanym położeniu mechanizmu nie porusza się względem trójkąta EGC przeto prędkość v_Q jest jedynie prędkością unoszenia, zatem:

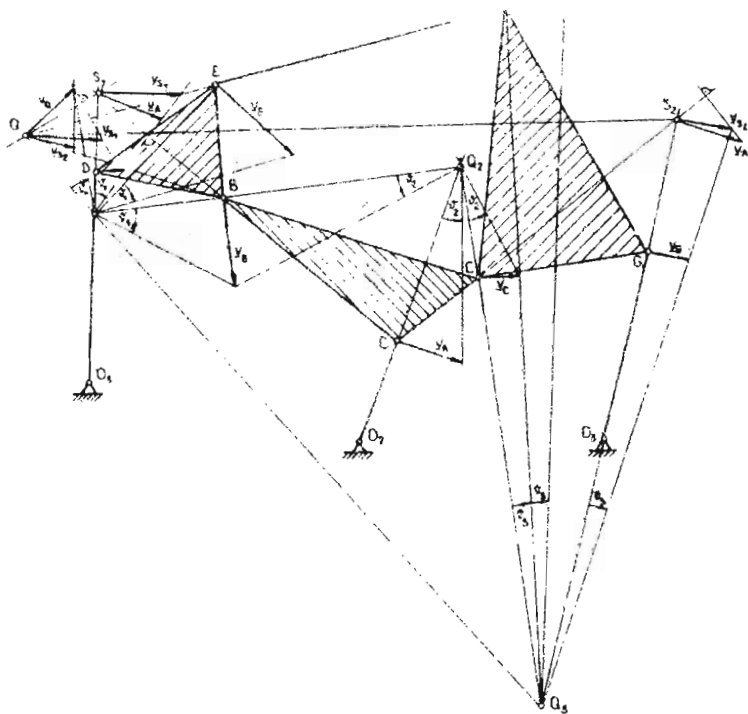
$$v_Q = v_{S_2} + v_{QS_2}. \quad (3.14)$$

Również:

$$v_Q = v_{S_1} + v_{QS_1}. \quad (3.15)$$

Przenosząc zatem v_{S_1} i v_{S_2} do punktu Q , a następnie kreśląc dwie proste przechodzące przez końce wektorów v_{S_1} i v_{S_2} prostopadle odpowiednio do odcinków S_1Q i S_2Q znajdujemy punkt przecięcia tych prostych jako koniec wektora prędkości punktu Q . Znając prędkość punktu Q oraz S_1 znajdujemy punkt Q_1 , który jest chwilowym środkiem obrotu trójkąta BDE . Teraz wyznaczamy prędkości punktów E i B .

Znajomość kierunków prędkości punktu B i A umożliwia wyznaczenie punktu Q_2 – chwilowego środka obrotów trójkąta ABC oraz prędkości punktu C . W dalszym ciągu wyznaczamy punkt Q_3 – chwilowy środek obrotów trójkąta CFG . Końcowy etap tej części zadania polega na wyznaczaniu prędkości punktów F i G (rys.15). Dla sprawdzenia dokładności naszych konstrukcji możemy z punktu F przejść do punktu E , wyznaczyć prędkość i porównać wynik z poprzednim.

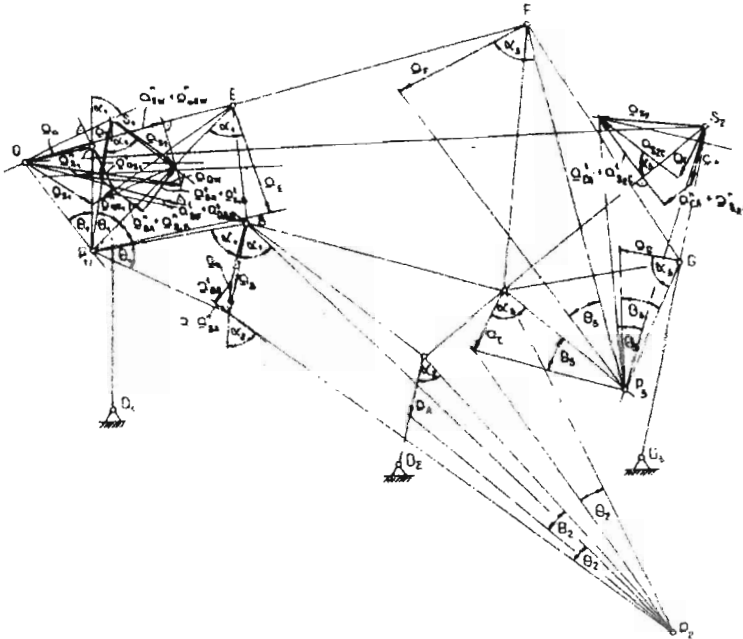


Rys. 15.

Rozwiązanie problemu przyspieszeń rozpoczynamy od wyznaczenia przyspieszeń punktów Assura S_1 i S_2 (rys.16). Znając przyspieszenia a_{S_1} i a_{S_2} punktów S_1 i S_2 wyznaczamy przyspieszenie punktu Q chwilowego środka obrotu ruchu trójkąta BDE względem trójkąta CFG . Postępujemy analogicznie jak w przypadku poprzedniego zadania, to znaczy łącząc z punktami B i E chwilowy środek obrotu trójkąta CFG wyznaczamy kierunki prędkości unoszenia tych punktów jako kierunki prostych prostopadłych do odcinków BQ_3 oraz EQ_3 . Kierunki prędkości względnych wyznaczamy jako kierunki prostych prostopadłych do odcinków QB oraz QE . Znając te kierunki rozkładamy prędkości punktów B i E na prędkości unoszenia i prędkości względne. Następnie metodą analityczną czy wykreślną wyznaczamy przyspieszenia normalne w ruchu względnym a_{BW}^n oraz a_{EW}^n jak również a_{QBW}^n oraz a_{QEW}^n zaczepiając wektory $a_{BW}^n + a_{QBW}^n$ oraz $a_{EW}^n + a_{QEW}^n$ w punkcie Q . Prowadząc przez końce tych wektorów proste do nich prostopadłe wyznaczamy koniec wektora przyspieszenia punktu Q w ruchu względnym a_{QW} . Przyspieszenie punktu Q składa się jedynie z przyspieszenia unoszenia i przyspieszenia względnego (przyspieszenie Coriolisa jest równe zero ze względu na brak

prędkości względnej tego punktu). Chcąc zatem znaleźć przyspieszenie punktu Q dodajemy do przyspieszenia (patrz rys.16) względnego a_{QW} przyspieszenie $a_{S_2} + a_{Q S_2}^n$. Składowa $a_{Q S_2}^t$ znana jest tylko co do kierunku – leży na prostej prostopadłej do $a_{Q S_2}^n$ przechodzącej przez jego koniec. Zauważmy, że również koniec wektora a_Q leży też na tej prostej:

$$a_Q = a_{QW} + a_{S_2} + a_{Q S_2}^n + a_{Q S_2}^t. \quad (3.16)$$



Rys. 16.

Na razie punktu tego nie jesteśmy w stanie wyznaczyć. Ale przechodząc z punktu S_1 do punktu Q stwierdzamy, że:

$$a_Q = a_{S_1} + a_{Q S_1}^n + a_{Q S_1}^t. \quad (3.17)$$

Zauważmy, że również i w tym wypadku wyznaczenie $a_{S_1} + a_{Q S_1}^n$ jest możliwe, zaś $a_{Q S_1}^t$ leży na prostej prostopadłej do $a_{Q S_1}^n$, przechodzącej przez jego koniec. Na tej prostej też leży koniec wektora a_Q . Zatem punkt przecięcia owych prostych prostopadłych, jednej do wektora $a_{Q S_1}^n$ a drugiej do wektora $a_{Q S_1}^t$ wyznacza koniec wektora przyspieszenia punktu Q . Znając przyspieszenie punktu Q oraz punktu S_1 możemy znaleźć punkt P_1 – chwilowy środek przyspieszeń trójkąta BDE , dzięki

czemu wyznaczamy przyspieszenia punktów BDE . Znając przyspieszenia punktów B i A znajdujemy chwilowy środek przyspieszeń trójkąta ABC (punkt P_2) i wyznaczamy przyspieszenia punktu C i dalej dzięki znajomości przyspieszenia punktu C oraz S_2 wyznaczamy punkt P_3 i przyspieszenie punktów F i G . Dla sprawdzenia dokładności metody można przejść z punktu F do punktu E obliczając niezależnie przyspieszenia punktu E i porównać z poprzednim wynikiem.

4. Zakończenie

W pracy omówiono problemy związane z rozwiązywaniem zagadnień kinematyki mechanizmów IV-tej klasy. Podano dwa przykłady. Sądzę, że na ich podstawie Czytelnik wyrobi sobie wyobrażenie o rozwiązywaniu podobnych zagadnień. Przedstawione rozwiązania dają możliwość racjonalnego projektowania mechanizmów tej klasy. Wydaje się, że mogą one znaleźć szersze zastosowanie.

Literatura

1. TOLSTOW G., *Szeregi Fouriera*, PWN, Warszawa 1954

Summary

The answer to the question how to analyse the 4-th class mechanisms motion in terms of proper trajectories velocities and accelerations determination can be found in the paper. This problem occurs to be both complicated and interesting. It also has a wide practical application.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 grudnia 1990 roku