

## OPTYMALNE KONFIGURACJE TRÓJSEGMENTOWYCH POŁĄCZEŃ CHIRURGICZNYCH

STANISŁAW TOKARZEWSKI

*IPPT PAN, Warszawa*

STANISŁAW ZAJĄC

*Akademia Medyczna, Warszawa*

CZESŁAW M. RODKIEWICZ

*University of Alberta, Edmonton*

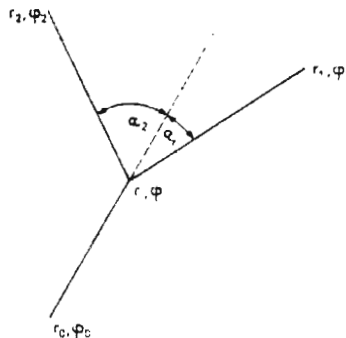
Dla trójsegmentowych połączeń powszechnie stosowanych w chirurgii sformułowano metodę optymalizacji kątów chirurgicznych opartą na minimalizacji strat energii przepływu oraz globalnej siły stycznej oddziałującej na ścianki naczyń. Uzyskane wyniki zilustrowano przykładem wyznaczania optymalnych kątów chirurgicznych dla trójsegmentowego rozgałęzienia: aorta brzuszna - tętnice biodrowe

### 1. Wstęp

Miażdżyca jest jedną z najpoważniejszych chorób układu krwionośnego człowieka. Choroba ta powstaje w wyniku zwężeń, a w dalszej konsekwencji niedrożności naczyń krwionośnych. Umieszcza się najczęściej w tętnicach odchodzących do aorty, w tętnicach doprowadzających krew do mózgu, do kończyn górnych, kończyn dolnych, a także innych narządów. Jedną z metod leczenia tej choroby jest operacyjne zastąpienie niedrożnego fragmentu układu krwionośnego sztucznym fragmentem drożnym. W ten sposób wprowadzane są do organizmu protezy naczyń krwionośnych często nazywane rozgałęzieniami chirurgicznymi. Konfiguracje protez naczyniowych prawie nigdy nie pokrywają się z konfiguracjami rozgałęzień naturalnych. Różnice występują głównie w kształtowanych ręką chirurga tak zwanych kątach chirurgicznych, które niejednokrotnie różnią się od kątów naturalnych o kilkadziesiąt i więcej stopni. Poszukiwanie dla kątów chirurgicznych wartości optymalnych jest więc ważne z praktycznego jak i teoretycznego punktu widzenia.

Problem optymalizacji rozgałęzień naczyń krwionośnych po raz pierwszy podjął Murray [5,6] i kolejno rozwijali tę tematykę autorzy: Kamiya i Togawa [2], Uylings [10], Zamir [13,14]. Jako kryteria optymalizacji konfiguracji badanych rozgałęzień naczyń krwionośnych przyjmowali: (i) moc potrzebną do przepompowania krwi przez badane rozgałęzienie, (ii) globalną siłę oddziaływującą na ścianki, (iii) całkowitą objętość rozgałęzienia, (iv) całkowitą powierzchnię rozgałęzienia. W przypadku (i) i (ii) analizę oparli na przepływie Poiseulle'a.

Optymalizację połączeń chirurgicznych opartą o w pełni rozwinięty przepływ pulsacyjny podjęto w pracy [8] (Rodkiewicz i wsp., 1988). Zbadano w niej między innymi wpływ kątów odejścia przeszczepów na globalne przepływy krwi w typowych rozgałęzieniach pooperacyjnych. Niniejsza praca poświęcona jest teoretycznemu wyznaczeniu wartości optymalnych dla kątów chirurgicznych, przy których w trójsegmentowej protezie naczyniowej (rys.1) globalna strata energii oraz globalna siła styczna oddziaływująca na ścianki rozgałęzienia osiągną minimum. Analiza w tej pracy oparta będzie na w pełni rozwiniętym przepływie pulsacyjnym.



Rys. 1. Schemat trójsegmentowego rozgałęzienia chirurgicznego

## 2. Sformułowanie problemu

Załóżmy, że w układzie krwionośnym znajduje się niedrożne, trójsegmentowe rozgałęzienie (na przykład: aorta brzuszna – tętnice udowe) ograniczone punktami zewnętrznymi  $r_i, \varphi_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) (rys.1). Należy wykonać operację polegającą na wycięciu w punktach  $r_i, \varphi_i$  fragmentu niedrożnego i zastąpieniu go sztucznym, trójsegmentowym rozgałęzieniem drożnym. W przypadku tym punkty zewnętrzne  $r_i, \varphi_i$  są ustalone, podczas gdy punkt węzłowy  $r, \varphi$  może zajmować dowolne położenie. Powstaje więc problem, jak chirurgicznie usytuować punkt węzłowy protezy  $r, \varphi$ ,

aby wprowadzone do organizmu rozgałęzienie sztuczne pracowało optymalnie. Poszukiwanie dla współrzędnych  $r$ ,  $\varphi$  wartości optymalnych jest niewygodne i niepraktyczne. Znacznie lepiej jest operować kątami chirurgicznymi  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  (rys.1). Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie dla kątów  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  takich wartości optymalnych, przy których w trójsegmentowym rozgałęzieniu chirurgicznym (rys.1) straty energii w przepływie pulsacyjnym oraz globalna siła styczna oddziaływująca na ścianki osiągną minimum.

### 3. Metoda rozwiązania

Niech  $l_0, l_1, l_2$  oznaczają długości segmentów tworzących trójsegmentowe rozgałęzienie chirurgiczne (rys.1). Przez  $e_j$ ,  $t_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) oznaczmy ilość energii dysypowanej, siłę styczną oddziaływującą na ścianki, przypadające na jednostkę długości oraz jednostkę czasu. Stąd całkowita ilość energii dysypowanej  $E$  w rozgałęzieniu chirurgicznym (rys.1), a także globalna siła styczna  $T$  oddziaływująca na to rozgałęzienie równają się:

$$G = g_0 l_0 + g_1 l_1 + g_2 l_2, \quad G = E, T, \quad g = e, t. \quad (3.1)$$

Wielkości  $G$  i  $g_i$  w dalszym tekście nazywać będziemy odpowiednio funkcją celu oraz gęstościami funkcji celu. Różniczkowanie (3.1) względem  $r$  i  $\varphi$  prowadzi do następujących związków:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \sum_{i=0}^2 g_i \frac{\partial l_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial G}{\partial \varphi} = \sum_{i=0}^2 g_i \frac{\partial l_i}{\partial \varphi}. \quad (3.2)$$

W układzie współrzędnych biegunowych  $r$ ,  $\varphi$  (rys.1) długości segmentów  $l_i$  równają się:

$$l_i = \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\varphi_i - \varphi)}. \quad (3.3)$$

Na podstawie (3.3) dostajemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_i}{\partial r} &= -\frac{r_i \cos(\varphi_i - \varphi) - r}{l_i} = -\cos \alpha_i, \\ \frac{\partial l_i}{\partial \varphi} &= -\frac{rr_i \sin(\varphi_i - \varphi)}{l_i} = r \sin \alpha_i, \end{aligned} \quad i = 0, 1, 2. \quad (3.4)$$

Po podstawieniu (3.4) do (3.2) i przyrównaniu lewych stron do zera otrzymujemy następujące zależności:

$$g_0 - g_1 \cos \alpha_1 - g_2 \cos \alpha_2 = 0, \quad g_1 \sin \alpha_1 + g_2 \sin \alpha_2 = 0, \quad (3.5)$$

stanowiące warunki konieczne istnienia minimum dla funkcji celu (3.1).

Warunki dostateczne dla istnienia minimum funkcji (3.1) określają następujące nierówności:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} > 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 > 0. \quad (3.6)$$

Podstawiając do (3.6) zależność (3.1) dostajemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} &= \sum_{i=0}^2 g_i \frac{\partial^2 l_i}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} &= \sum_{i=0}^2 g_i \frac{\partial^2 l_i}{\partial \varphi^2}, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \varphi} &= \sum_{i=0}^2 g_i \frac{\partial^2 l_i}{\partial r \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Na podstawie (3.3) mamy:

$$\frac{\partial^2 l_i}{\partial r^2} = \frac{\sin^2 \alpha_i}{l_i}, \quad \frac{\partial^2 l_i}{\partial \varphi^2} = r \cos \alpha_i + \frac{r^2}{l_i} \cos \alpha_i, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 l_i}{\partial r \partial \varphi} = - \left( \frac{r}{l_i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i + \sin \alpha_i \right). \quad (3.9)$$

Wstawiając (3.8) i (3.9) do (3.6) dostajemy po żmudnych obliczeniach:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = g_1 \frac{\sin^2 \alpha_1}{l_1} + g_2 \sin^2 \alpha_2 > 0, \quad (3.10)$$

$$\Delta = \frac{g_0 g_1}{l_0 l_1} \sin^2 \alpha_1 + \frac{g_0 g_2}{l_0 l_2} \sin \alpha_2 + \frac{g_1 g_2}{l_1 l_2} \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (3.11)$$

Gęstości funkcji celu  $g_i$  oraz długości segmentów  $l_i$  są dodatnie. Na tej podstawie formuły (3.10) – (3.11) stają się dla dowolnych wartości kątów  $\alpha_i$  dodatnio określone. A zatem warunki dostateczne istnienia minimum dla funkcji celu (3.1) są spełnione tożsamościowo. W ten sposób zostało dowiedzione, że funkcja celu (3.1) osiąga lokalne minimum wtedy, gdy kąty rozgałęzienia chirurgicznego (rys.1) spełniają związki (3.5). Rozwiązując (3.5) względem kątów  $\alpha_1, \alpha_2$  dostajemy formuły następujące:

$$\cos \alpha_1 = \frac{g_0^2 + g_1^2 - g_2^2}{2g_0 g_1}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{g_0^2 + g_2^2 - g_1^2}{2g_0 g_2}, \quad (3.12)$$

określające optymalne kąty chirurgiczne, przy których w trójsegmentowym rozgałęzieniu chirurgicznym (rys.1) odpowiednio dysypacja energii przepływu oraz globalna siła styczna oddziaływująca na ścianki rozgałęzienia osiągają minimum.

## 4. Przepływ pulsacyjny

Pod wpływem zmieniającego się harmonicznym gradientu ciśnienia:

$$-\frac{\Delta p(\tau)}{l} = \rho(\bar{A} + A \cos \omega\tau), \quad (4.1)$$

powstaje w rurze o stałym przekroju następujący przepływ pulsacyjny (Łojcjański, 1978):

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \frac{\bar{A}}{4v} f(r) + \frac{A}{\omega} [f_s(r) \sin \omega\tau + f_c(r) \cos \omega\tau], \\ f(r) &= R^2 - r^2, \\ f_s(r) &= 1 - \frac{\text{bei}(kr)\text{bei}(kr) - \text{ber}(kR)\text{ber}(kr)}{\text{ber}^2(kr) + \text{bei}^2(kR)}, \\ f_c(r) &= \frac{\text{bei}(kR)\text{ber}(kr) - \text{ber}(kR)\text{bei}(kr)}{\text{ber}^2(kR) + \text{bei}^2(kR)}, \\ k &= R\sqrt{\frac{\omega}{v}}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie  $r$ ,  $\omega$ ,  $v$ ,  $\rho$  oraz  $\text{ber}(z)$ ,  $\text{bei}(z)$  oznaczają odpowiednio promień rury, częstość pulsacji, lepkość kinematyczna, gęstość krwi oraz tak zwane funkcje Kelvina. Stąd zależy od czasu wydatek równa się:

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= \frac{\pi R^4}{8v} \bar{A} + \frac{2\pi A}{\omega} \sqrt{F_s^2(R) + F_c^2(R)} \cos(\omega\tau - \varphi), \\ \text{tg} \varphi &= \frac{F_s(R)}{F_c(R)}, \\ F_s(R) &= \frac{R^2}{2} + \frac{R}{k} \frac{\text{bei}(kR)\text{ber}'(kR) - \text{ber}(kR)\text{bei}'(kR)}{\text{ber}^2(kR) + \text{bei}^2(kR)}, \\ F_c(R) &= \frac{R}{k} \frac{\text{bei}(kR)\text{bei}'(kR) + \text{ber}(kR)\text{ber}'(kR)}{\text{ber}^2(kR) + \text{bei}^2(kR)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Wydatek (4.3) musi się równać następującemu, z góry danemu wydatkowi krwi:

$$Q(\tau) = Q[1 + \cos(\omega\tau - \varphi)]. \quad (4.4)$$

Porównując zależności (4.3) i (4.4) otrzymujemy związki:

$$\bar{A} = \frac{8vQ}{\pi R^4}, \quad A = \frac{Q\omega}{2\pi \sqrt{F_s^2(R) + F_c^2(R)}}, \quad (4.5)$$

określające gradient ciśnienia (4.1) w zależności od wydatku (4.4). Gęstość energii dysypowanej w odniesieniu do jednostki długości naczynia i jednostki czasu określa

następująca zależność:

$$e = \frac{\Delta p}{l} \rho = \rho \cdot \rho \left( 1 + \frac{F_s(R) \sin \omega \tau + F_c(R) \cos \omega \tau}{\sqrt{F_s^2(R) + F_c^2(R)}} \right) \left( \frac{8vQ}{\pi R^4} + \frac{Q\omega \cos \omega \tau}{2\pi \sqrt{F_s^2(R) + F_c^2(R)}} \right). \quad (4.6)$$

Uśredniając wzór (4.6) po czasie dostajemy wyrażenie:

$$e = \frac{\rho Q^2}{\pi} \left( \frac{8v}{R^4} + \frac{\omega}{4} \frac{F_c(R)}{F_s^2(R) + F_c^2(R)} \right), \quad (4.7)$$

określające średnie w cyklu straty energii przepływu przypadające na jednostkę długości naczyń wchodzących w skład badanego rozgałęzienia chirurgicznego (rys.1). Średnie w czasie naprężenia styczne oddziałujące na ściankę równają się:

$$t = 2\pi R \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial r} \Big|_R d\tau. \quad (4.8)$$

Podstawiając (4.2) do (4.8) otrzymujemy po prostych przekształceniach:

$$t = \frac{8\rho v Q}{R^2}. \quad (4.9)$$

Wzór (4.9) określa odniesioną do jednostki długości gęstość sił stycznych oddziałujących na ścianki naczyń tworzących rozgałęzienie chirurgiczne. Straty energii (4.7), siła oddziałująca na ścianki (4.9) są gęstościami funkcji celów  $g_i$ , które należy podstawić do wzoru (3.12), by w ten sposób otrzymać konkretne formuły na optymalne kąty chirurgiczne minimalizujące w ramach przyjętego modelu odpowiednio dysypację energii oraz globalną siłę styczną w trójsegmentowym rozgałęzieniu chirurgicznym.

## 5. Wyniki

Wprowadźmy związki (4.9) oraz (4.7) do zależności (3.12). Po prostych ale pracochłonnych obliczeniach dostajemy:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{1T} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_1^2}{q_1} - \frac{q_2^2 a_1^2}{q_1 a_2^4} + \frac{q_1}{a_1^2} \right\}, \\ \cos \alpha_{2T} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_2^2}{q_2} - \frac{q_1^2 a_2^2}{q_2 a_1^4} + \frac{q_2}{a_2^2} \right\}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{1E} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\eta(R_0) a_1^4}{\eta(R_1) q_1^2} - \frac{\eta(R_2) \eta(R_2) q_2^4 a_1^4}{\eta(R_0) \eta(R_1) q_1^2 a_2^8} + \frac{\eta(R_1) q_1^2}{\eta(R_0) a_1^4} \right\}, \\ \cos \alpha_{2E} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\eta(R_0) a_2^4}{\eta(R_2) q_2^2} - \frac{\eta(R_1) \eta(R_1) q_1^4 a_2^4}{\eta(R_0) \eta(R_2) q_2^2 a_1^8} + \frac{\eta(R_2) q_2^2}{\eta(R_0) a_2^4} \right\},\end{aligned}\quad (5.2)$$

gdzie wprowadziliśmy następujące zmienne bezwymiarowe:

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{Q_1}{Q_0}, & q_2 &= \frac{Q_2}{Q_0}, \\ a_1 &= \frac{R_1}{R_0}, & a_2 &= \frac{R_2}{R_0},\end{aligned}\quad (5.3)$$

oraz następującą funkcję:

$$\eta(R) = 1 + \frac{\omega R^4}{32\nu} \frac{F_c(R)}{F_s^2(R) + F_c^2(R)},\quad (5.4)$$

przy czym dla trójsegmentowego rozgałęzienia słuszna jest równość:

$$q_1 + q_2 = 1.\quad (5.5)$$

Formuły (5.1) i (5.2) określają optymalne kąty chirurgiczne, przy których w trójsegmentowym rozgałęzieniu chirurgicznym globalna siła styczna oddziałująca na ścianki (wzory(5.1)) oraz dysypacja energii w przepływie pulsującym (wzory(5.2)) osiągają minimum. Przyjmowanie przez prawe strony związków (5.1), (5.2) wartości bezwzględnie większych niż 1 oznacza nie osiąganie przez funkcję celu (globalna siła styczna, dysypacja energii) lokalnego minimum. W tym przypadku połączenie punktu  $r_0$ ,  $\varphi_0$  bezpośrednio z punktami  $r_1$ ,  $\varphi_1$  i  $r_2$ ,  $\varphi_2$  (rys.1) jest najlepszą konfiguracją dla wykonywanego połączenia chirurgicznego.

## 6. Przypadki graniczne

Rozważymy kilka przypadków granicznych zachowania się kątów chirurgicznych  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  określających optymalną konfigurację trójsegmentowego rozgałęzienia chirurgicznego:

(i) przypadek ustalonego przepływu Poiseulle'a  $\omega = 0$ ,  $\eta(R) = 1$

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{1E} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_1^4}{q_1^2} - \frac{q_2^4 a_1^4}{q_1^2 a_2^8} + \frac{q_1^2}{a_1^4} \right\}, \\ \cos \alpha_{2E} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_2^4}{q_2^2} - \frac{q_1^4 a_2^4}{q_2^2 a_1^8} + \frac{q_2^2}{a_2^4} \right\},\end{aligned}\quad (6.1)$$

(ii) przypadek częstości pulsacji dążącej do nieskończoności  $\omega = 0$ ,  
 $\eta(R_1)/\eta(R_0) = a_1$ ,  $\eta(R_2)/\eta(R_0) = a_2$

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{1E} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_1^3}{q_1^2} - \frac{q_2^4}{q_1^2} \frac{a_1^3}{a_2^6} + \frac{q_1^2}{a_1^3} \right\}, \\ \cos \alpha_{2E} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_2^3}{q_2^2} - \frac{q_1^4}{q_2^2} \frac{a_2^3}{a_1^6} + \frac{q_2^2}{a_2^3} \right\},\end{aligned}\tag{6.2}$$

(iii) przypadek trójsegmentowego rozgąlenia symetrycznego  $q_1 = q_2 = 0.5$ ,  
 $a_1 = a_2 = a$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $R_1 = R_2 = R$

$$\begin{aligned}\cos \alpha_T &= \left( \frac{R}{R_0} \right)^2, \\ \cos \alpha_E &= 2 \frac{\eta(R_0)}{\eta(R)} \left( \frac{R}{R_0} \right)^4.\end{aligned}\tag{6.3}$$

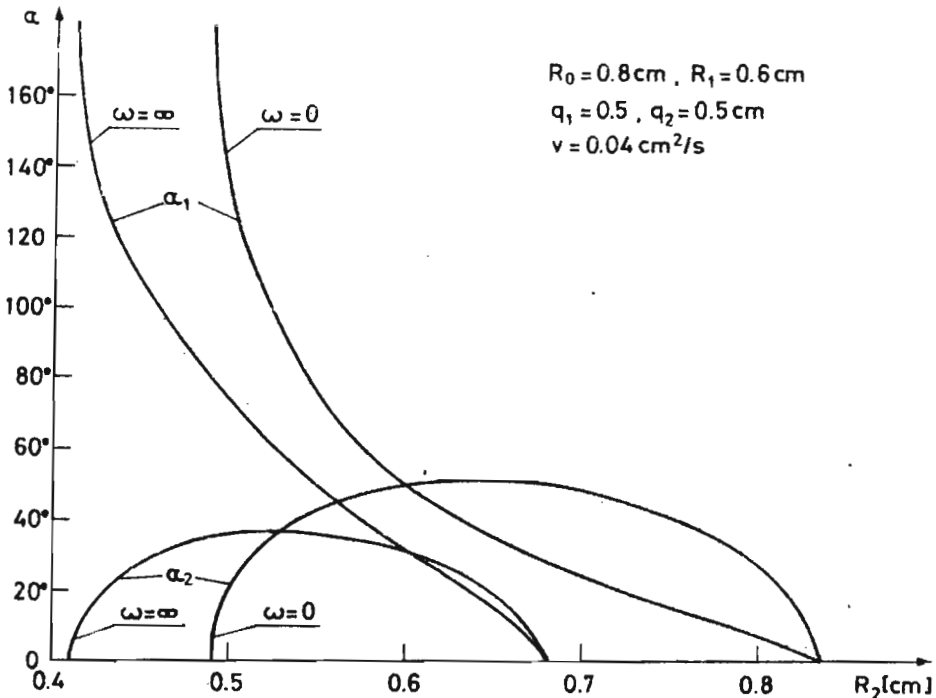
Na rysunki 2, 3, 4 naniesiono wykresy optymalnych kątów chirurgicznych wyznaczone ze związków (5.1), (5.2), (6.3).

## 7. Wnioski

Przyjmując za kryteria optymalizacji po pierwsze globalną siłę styczną oddziaływującą na ścianki naczyń, po drugie dysypację energii przedstawiono prostą metodę wyznaczania optymalnych kątów chirurgicznych dla trójsegmentowych rozgąleń stosowanych w chirurgii. Rozważania oparto na w pełni rozwiniętym przepływie pulsacyjnym, który w przypadku granicznym, dla częstości pulsacji dążących do zera, przechodzi w przepływ Poiseulle'a. W wyniku uzyskano formuły (5.1) i (5.2) określające wartości optymalnych kątów chirurgicznych. Formuła (5.1) nie zależy od częstości pulsacji i dlatego też może być otrzymana w oparciu o przepływ Poiseulle'a. Natomiast związek (5.2) zależy od częstości pulsacji, przy czym zależność tę w niektórych przypadkach można zaniedbać, w niektórych zaś staje się ważna i nie można jej pominąć (patrz rys. 2, 3, 4, 5). Opieranie więc analizy wyłącznie na przepływie Poiseulle'a może w niektórych zakresach kątów optymalnych prowadzić do dużych rozbieżności wyników i w konsekwencji być nieuzasadnione.

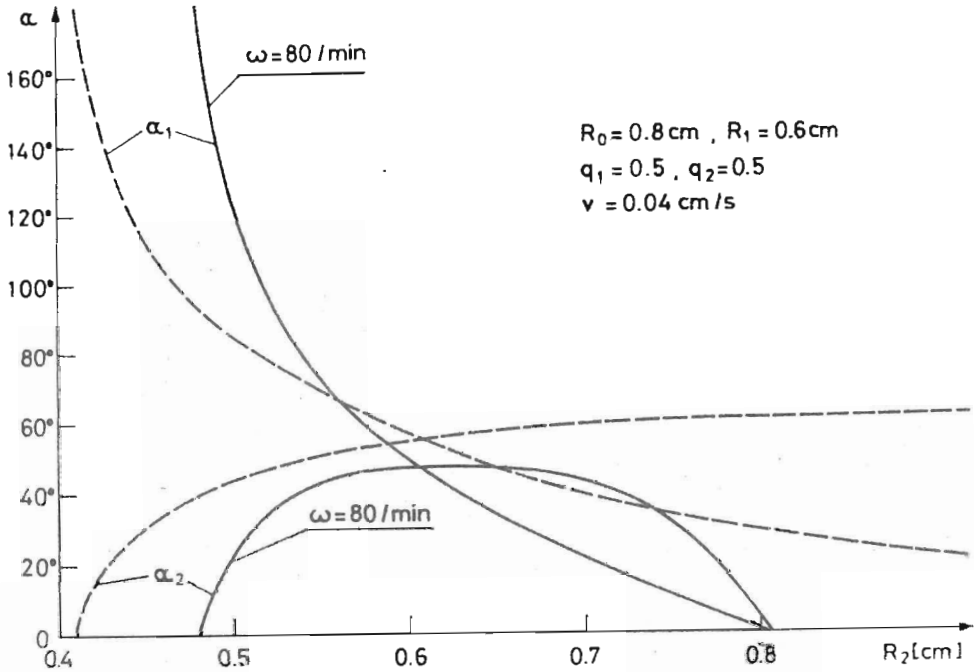
Proponowany w tej pracy sposób optymalizacji kątów dla trójsegmentowych połączeń chirurgicznych jest po pierwsze niezwykle prosty, po drugie daje formuły, które nie tylko w sensie jakościowym, ale w wielu przypadkach również i ilościowym sprawdzają się na przykładzie połączeń naturalnych funkcjonujących w układzie



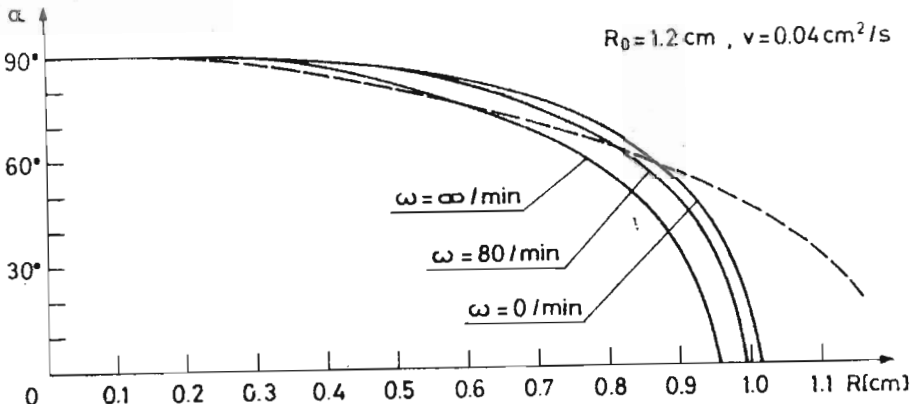


Rys. 2. Optymalne kąty dla trójsegmentowego rozgałęzienia chirurgicznego (kryterium strat energii)

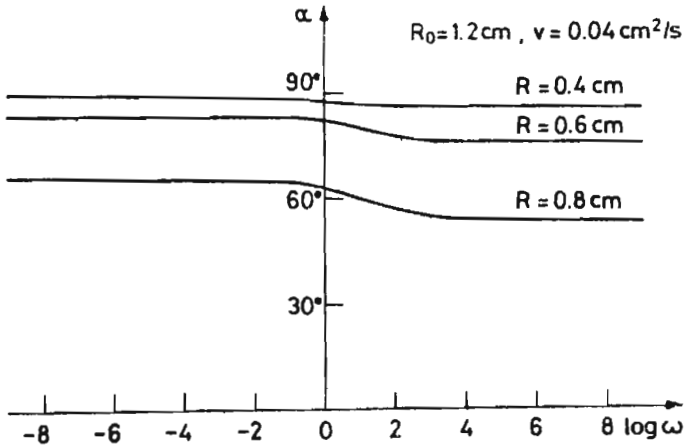
krwionośnym człowieka. Przykładem może tu być zdrowe, naturalne rozgałęzienie aorta brzuszna – tętnice biodrowe. Naturalne kąty tego rozgałęzienia mieszczą się w przedziale kątów chirurgicznych wyznaczonych w tej pracy i naniesionych na rysunki 2 i 3. Możliwe jest także przyjmowanie przez jeden z kątów trójsegmentowego rozgałęzienia chirurgicznego wartości optymalnych większych od  $90^\circ$  (patrz rys.2 i 3,  $R_2 < 0.5$ ). Aorta brzuszna – tętnice wieńcowe są przykładem takiego nietypowego, naturalnego rozgałęzienia naczyń krwionośnych. Także w praktyce chirurgicznej stosuje się w przeważającej większości z dobrym skutkiem dla pacjentów trójsegmentowe protezy aorta brzuszna – tętnice biodrowe o kątach chirurgicznych niewiele różniących się od wartości kątów naniesionych na rysunek 3. A zatem można powiedzieć, że wyniki teoretyczne uzyskane w tej pracy zalecają stosowanie tam, gdzie jest to możliwe kątów chirurgicznych bliskich kątom naturalnym, uzasadniając to potrzebą minimalizowania mocy potrzebnej do przepompowania krwi przez trójsegmentową protezę, bądź minimalizowania globalnej siły stycznej oddziałującej na ścianki protezy.



Rys. 3. Optymalne kąty dla trójsegmentowego rozgałęzienia chirurgicznego (kryterium strat energii — ; kryterium globalnej siły stycznej - - -)



Rys. 4. Optymalne kąty dla trójsegmentowego rozgałęzienia chirurgicznego (kryterium strat energii — ; kryterium globalnej siły stycznej - - -)



Rys. 5. Optymalne kąty chirurgiczne w trójsegmentowym rozgałęzieniu symetrycznym w zależności od częstości pulsacji

## 8. Uwagi końcowe

Zaniedbanie zmian strat energii i globalnej siły stycznej spowodowanych obecnością węzła, modelowanie protezy za pomocą sztywnych cylindrów, ograniczenie rozważań wyłącznie do pierwszej harmonicznej częstości pulsacji to główne założenia wprowadzane w tej pracy. Jednak mimo tak daleko idących uproszczeń stwierdzono dużą zbieżność i to nie tylko w sensie jakościowym, ale również ilościowym między kątami naturalnymi rozgałęzień, a uzyskanymi, optymalnymi kątami chirurgicznymi. Wpływ obecności węzła na wartości optymalnych kątów protez naczyniowych wydaje się być zaniedbywalny, tym niemniej poddany zostanie badaniom w następnych pracach.

## Literatura

1. CENTKOWSKI J., ADAMS P.F., HAQUE W.U., RODKIEWICZ Cz.M., *Badania wpływu zwężeń i niedrożności tętnic łuku aorty na dopływ krwi do mózgu*, Pol.Przeg.Chir., 55, 10 - 11, 871, 1983
2. KAMIYA A., TOGAWA T., *Optimal branching structure of the vascular tree*, Bull.Math.Biophys. 34, 431, 1972
3. ŁOJCJAŃSKI Ł.G., *Mechanika Żidkosti i Gaza*, 1978
4. MCLACHLAN N.W., *Funkcje Bessela dla Inżynierów*, Warszawa 1964
5. MURRAY C.D., *The physiological principle of minimum work. I. The vascular system and the cost blood volume*, Proc.Natn.Acad.Sci.U.S.A., 12, 207, 1926

6. MURRAY C.D., *The physiological principle of minimum work applied to the angle of branching arteries*, J.Gen.Physiol. 9, 835, 1926
7. RODKIEWICZ CZ.M., ROUSSEL C.L., *Fluid mechanics in a large arterial bifurcation*, ASME Paper No 72 - WA FE - 8, 1972
8. RODKIEWICZ CZ.M., *Localization of early atherosclerotic lesions in the aortic arch in the light of fluid flow*, J.Biom. 8, 149, 1975
9. RODKIEWICZ CZ.M., TOKARZEWSKI S., KENNEDY J.S., NIELUBOWICZ J., *On the flow characteristic of the renal artery transplants - model studies*, J.Biom., 97, 1988
10. UYLINGS H.B.M., *Optimization of diameters and bifurcations angles in lungs and vascular tree structures*, Bull.Math.Biol. 39, 509, 1977
11. ZAMIR M., *The role of shear forces in arterial branching*, J. Gen.Physiol. 67, 213, 1976
12. ZAMIR M., *Optimality principles in arterial branching*, J. Theor.Biol. 62, 227, 1976
13. ZAMIR M., *Cost analysis of arterial branching in the cardiovascular systems of man and animals*, J.Theor.Biology 120, 11, 1986
14. ZAMIR M., SINCLAIR P., *Roots and calibers of the human coronary arteries*, The Amer.J.of Anat. 183, 226, 1988
15. SHAH P., SCARTON H., TSAPOGAS M.J., *Geometric anatomy of the aorticcommon iliac bifurcation*, J.Anat. 126, 3, 451, 1978
16. MESCHAN I., *An atlas of anatomy basic to radiology*, W.B. Saunders Co., Phil., 1975

#### Summary

For some surgical junctions a method of optimization of the branching angles based on minimizing a cost function, such as energy losses and global drag force affecting vessel's walls, has been formulated. Numerical calculations of optimum angles has been carried out for abdominal aorta - common iliac surgical junction.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 maja 1989 roku*