

## PRZEGLĄD MODELI KONSTITUTYWNYCH DLA TKANEK ŻYWYCH

PIOTR KOWALCZYK

*Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa*

W pracy dokonano przeglądu modeli konstytutywnych, stosowanych obecnie w analizie mechanicznej tkanek żywych. Omówiono własności mechaniczne podstawowych składników mikrostruktury tkanek zwierzęcych (włókna tkanki łącznej, hydroksyapatyt, komórki mięśniowe). Następnie, na podstawie dostępnej literatury, przedstawiono szereg modeli konstytutywnych dla różnych rodzajów tkanek, klasyfikując je ze względu na rodzaje zależności konstytutywnych. Wyróżniono trzy zasadnicze grupy modeli: lepkosprężyste, nieliniowo-sprężyste oraz liniowo-sprężyste. Podano przykłady równań konstytutywnych, omawiając ich własności i zakres stosowania.

### Ważniejsze oznaczenia

$X_1, X_2, X_3$	- początkowe współrzędne kartezjańskie,
$x_1, x_2, x_3$	- aktualne współrzędne kartezjańskie,
$r, \varphi, z$	- współrzędne walcowe,
$\lambda$	- tensor gradientu deformacji: $\lambda_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ ,
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	- główne wydłużenia względne,
$I_1, I_2, I_3$	- niezmienniki tensora $\Lambda$ : $A_{ij} = \lambda_{ki} \lambda_{kj}$ , w szczególnym przypadku: $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2\}$ ,
$E$	- tensor odkształcenia Greena: $E_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda_{ki} \lambda_{kj} - \delta_{ij})$ ,
$E_1, E_2, E_3$	- odkształcenia główne Greena,
$J_1, J_2, J_3$	- niezmienniki tensora $E$ ,
$\epsilon$	- tensor odkształcenia Cauchy'ego: $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji} - 2\delta_{ij})$ ,
$T$	- I tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa,
$S$	- II tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa,
$\sigma$	- tensor naprężenia Eulera,
$\rho_0, \rho$	- gęstość początkowa i aktualna,
$p$	- średnie ciśnienie hydrostatyczne.

O ile nie zaznaczono inaczej, powtarzające się indeksy oznaczają sumowanie.

## 1. Wstęp

Tkanki biologiczne są materiałami zupełnie innymi niż te, z którymi inżynierowie zwykli spotykać się w technice. Wyróżniają się przede wszystkim różnorodnością oraz znacznie bardziej skomplikowanymi własnościami mechanicznymi. Mamy tu do czynienia z ośrodkami niejednorodnymi, wykazującymi anizotropię i nieliniowość zależności naprężeń od deformacji. Nieliniowość wiąże się z występowaniem skończonych odkształceń, niekiedy bardzo dużych, a także z nieliniową lepkością wynikającą głównie z obecności substancji płynnych w strukturze tkanek.

Własności mechaniczne tkanki są ponadto uzależnione od wielu czynników. Wymienić tu można m. in.:

- indywidualne cechy danego organizmu,
- umiejscowienie tkanki w ciele i funkcje jakie ona spełnia,
- wiek, wszelkiego rodzaju stany chorobowe, a także ciąża,
- procesy fizjologiczne zachodzące w tkance (np. kurczenie się mięśnia pod wpływem impulsu nerwowego),
- działanie środków farmakologicznych.

Należy tu jeszcze wspomnieć o tym, że własności mechaniczne tkanki biologicznej zmieniają się zwykle znacznie w chwili, gdy zostaje ona odłączona od żywego organizmu lub gdy nastąpi śmierć całego organizmu. Jest to o tyle istotne, że pomiary eksperymentalne dokonywane na tkankach lub ich próbkach są jedyną podstawą do określania ich własności mechanicznych. Tam, gdzie niemożliwe jest wykonanie pomiarów *in vivo*, trzeba się liczyć z wystąpieniem trudnego do oszacowania błędu w danych.

Z tej krótkiej charakterystyki materiałów biologicznych można już wywnioskować, że utworzenie możliwie dokładnego modelu konstytutywnego przydatnego w praktycznych obliczeniach wymaga od inżyniera uporania się z szeroką klasą problemów i pogodzenia licznych sprzeczności. I chociaż w literaturze fachowej napisano już na ten temat wiele i podano liczne przykłady bardziej lub mniej dokładnych modeli i równań konstytutywnych dla różnych biomateriałów, to trzeba przyznać, że wobec wielu kwestii w tej dziedzinie nauka do dziś pozostaje bezradna.

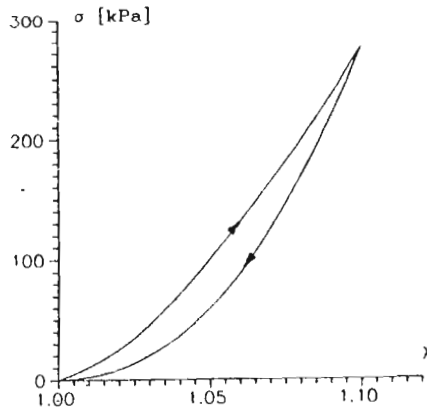
W niniejszej pracy dokonano przeglądu i krótkiego omówienia modeli konstytutywnych stosowanych obecnie dla żywych tkanek zwierzęcych (w tym określeniu mieszczą się również tkanki ludzkie). Podstawą była dostępna literatura fachowa. Mimo, że nie wszystkie pozycje zagraniczne są w kraju dostępne, to wydaje się, że poniższe zestawienie jest reprezentatywne dla obecnego stanu wiedzy na ten temat.

## 2. Własności mechaniczne podstawowych składników większości tkanek

Z histologicznego punktu widzenia tkanki zwierzęce dzielą się na: nabłonkową, łączną, mięśniową, nerwową oraz krew. W większości narządów występują wszystkie te rodzaje tkanek, przenikając się nawzajem i tworząc misterne i niezwykle skomplikowane struktury geometryczne. O własnościach mechanicznych tych struktur decydują głównie tkanka łączna i mięśniowa, a niekiedy również krew oraz napięcia powierzchniowe płynów pokrywających niektóre delikatne błony.

Tkanka łączna jako taka ma również dość skomplikowaną strukturę wewnętrzną. Składa się z pojedynczych komórek zawieszonych w substancji międzykomórkowej zawierającej siatkę różnego rodzaju włókien. Te ostatnie mają decydujące znaczenie dla własności mechanicznych tkanki. Dzielą się na tzw. włókna sprężyste, kolagenowe oraz retykulinowe. Pozostała przestrzeń wypełniona jest płynną zawiesiną mukopolisacharydów, a w przypadku tkanki kostnej i zębnej – osnową z twardych soli wapiennych (hydroksyapatyt), stanowiących również ważny składnik struktury z punktu widzenia własności mechanicznych.

Włókna kolagenowe, zwane też klejnorodnymi, występują w postaci pasm o średnicy  $1 \div 12 \mu\text{m}$ , składających się z wielu drobniejszych mikrowłókienek o średnicy rzędu  $0.1 \mu\text{m}$ . pod względem chemicznym są to splecione spiralnie łańcuchowe cząsteczki białka zwanego kolagenem. Są one dość sztywne (po osiągnięciu pewnego wydłużenia moduł Younga przy rozciąganiu jest rzędu 1 GPa) i wykazują znaczną nieliniowość zależności  $\sigma(\epsilon)$ . Typowy wykres tej funkcji dla jednoosiowego rozciągania przedstawia rys.1.



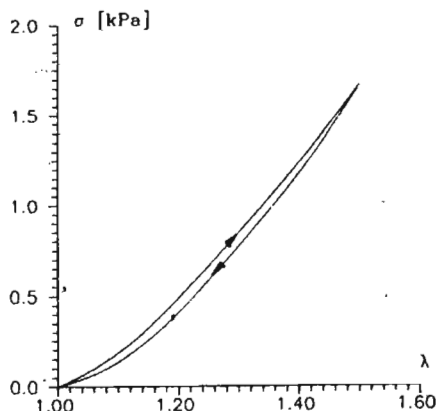
Rys. 1. Krzywa jednoosiowego rozciągania włókna kolagenowego (obciążanie i odciążanie)

Obserwuje się też silne własności lepkosprężyste: widoczną na rys. 1 histerezę,

zmiennosc przebiegu krzywej  $\sigma(\epsilon)$  w kolejnych cyklach obciazenia, a takze pelzanie i relaksacje naprezen. Wlasnosci te zwiazane sa zapewne z obecnościa plynów w substancji spajajacej włókienka.

Włókna retykulinowe mają podobną budowę chemiczną do włókien kolagenowych, są jednak od nich znacznie cieńsze i delikatniejsze. W literaturze trudno jest znaleźć przykłady badań własności mechanicznych tych włókien.

Włókna sprężyste są to nitki o średnicy  $0.2 \div 1 \mu\text{m}$ , złożone z cieńszych niteczek o średnicy ok.  $350 \text{ \AA}$ . Z chemicznego punktu widzenia są to wielocząsteczkowe łańcuchy białka zwanego elastyną. Łatwo rozciągają się, osiągając 2.5-krotne wydłużenie, po czym powracają do pierwotnego kształtu, wykazując nieznaczną histerezę. Typowy wykres  $\sigma(\epsilon)$  dla jednoosiowego rozciągania włókna sprężystego przedstawia rys. 2. Zjawiska lepkosprężyste, o których była mowa przy omawianiu włókien kolagenowych, występują tu w niewielkim stopniu. np. relaksacja naprężenia nie przekracza 10%. Zwykle traktuje się włókna sprężyste jako nieliniowo sprężyste w sensie mechaniki ciała stałego.

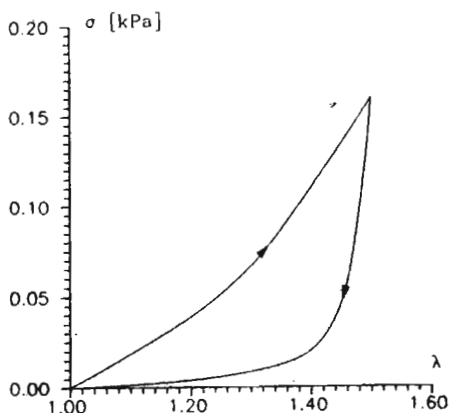


Rys. 2. Krzywa jednoosiowego rozciągania włókna sprężystego (obciążanie i odciążanie)

Nieorganiczna osnowa tkanki kostnej i zębnej wypełnia wraz z włóknami przestrzeń międzykomórkową tych tkanek. Składa się z kryształów hydroksyapatytu o siatce heksagonalnej wykazujących własności sprężyste poprzecznie izotropowe. Moduł Younga waha się w granicach  $130 \div 180 \text{ GPa}$ . Odkształcenia są tak małe że można je opisywać liniowym tensorem Cauchy'ego i posługiwać się pojęciami liniowej teorii sprężystości.

Tkanka mięśniowa składa się z silnie wydłużonych komórek mięśniowych zawierających liczne włókienka białkowe. Posiadają one zdolność kurczenia się pod wpływem impulsu elektrycznego, co jest równoznaczne z generacją siły obciążającej, jeżeli kurczenie jest w jakiś sposób blokowane. Komórki mięśniowe są oplecione i spojone ze sobą przez gęstą i delikatną sieć włókien tkanki łącznej,

dlatego nie można rozpatrywać własności mechanicznych tkanki mięśniowej niezależnie od owej włóknistej osnowy.



Rys. 3. Krzywa jednoosiowego rozciągania komórki mięśnia gładkiego (obciążanie i odciążanie)

Rys. 3. przedstawia typowy wykres rozciągania komórki mięśnia gładkiego w stanie rozluźnionym. Jest ona bardzo wiotka (sztywność ok. 10-krotnie mniejsza niż w przypadku elastyny) i wykazuje bardzo silne własności lepkosprężyste: rozległa histereza, prawie stuprocentowa relaksacja naprężeń.

Własności te zmieniają się znacznie gdy mięsień zostaje pobudzony do skurczu. Powstałe wtedy zmiany struktury obserwowane są już na poziomie budowy atomowej (kurczenie wiąże się z reakcjami chemicznymi w łańcuchach białkowych), mamy więc do czynienia z zupełnie nowym materiałem. Jak dotąd, nie udało się opracować modelu konstytutywnego opisującego w sposób zadowalający mechaniczne zachowanie się tkanki mięśniowej w zależności od stanu skurczenia.

Powyżej omówiono w skrócie własności mechaniczne podstawowych składników większości tkanek żywych. Każdą tkankę można traktować jako mikrostrukturę kompozytową. W skali makro zakłada się jednak, że stanowi ona ośrodek ciągły. Jego własności mechaniczne są wypadkową własności mechanicznych składników struktury na poziomie mikroskopowym (pewną rolę mogą też odgrywać wzajemne oddziaływania tych składników), stąd najbardziej naturalną drogą poszukiwania modelu konstytutywnego wydaje się analiza tej mikrostruktury a następnie przejście do poziomu makroskopowego. Ta metoda nastęrcza jednak wiele trudności wynikających z wysoce skomplikowanej geometrii struktury oraz jej niepowtarzalności w przestrzeni. Jedynie niewielu autorów podjęło trud pójścia tą drogą, m.in. [7,11,14,20,23]. Otrzymane przez nich wyniki zostały osiągnięte kosztem wprowadzenia wielu założeń upraszczających.

Większość autorów wybiera drogę łatwiejszą, choć bardziej oderwaną od rze-

czywistości, rozważając zależności konstytutywne biomateriałów bez wnikania w ich wewnętrzną strukturę.

### 3. Modele lepkosprężyste

Wszystkie tkanki biologiczne wykazują w mniejszym lub większym stopniu własności lepkosprężyste. Wynika to przede wszystkim z obecności substancji płynnych, wypełniających wolne przestrzenie w włóknistej mikrostrukturze tkanki łącznej oraz wnętrze wszelkiego rodzaju żywych komórek. Dlatego model konstytutywny mający opisywać zachowanie się tkanki z dużą dokładnością musi uwzględniać zależność własności mechanicznych od czasu i historii odkształcenia. Tylko wtedy bowiem możliwe jest wyjaśnienie za jego pomocą takich powszechnych w biomechanice zjawisk, jak pełzanie, relaksacja naprężeń, czy też zmienność zależności  $\sigma(\varepsilon)$  w kolejnych cyklach obciążenia.

Najogólniej równanie konstytutywne materiału lepkosprężystego można zapisać w postaci [5]:

$$S_{ij}(t) = \dot{Q}_{ij} \left( E_{kl}(\tau), E_{kl}(t) \right), \quad (3.1)$$

gdzie  $\mathbf{Q}$  – pewien funkcjonal całkowy o wartościach tensorowych a  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{E}$  – odpowiednio: I tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa i tensor odkształcenia Greena. Zamiast nich mogą być oczywiście użyte inne tensory opisujące stan naprężenia i odkształcenia, np. często używany przez autorów II tensor Pioli–Kirchhoffa  $\mathbf{T}$ , czy tensor gradientu deformacji  $\boldsymbol{\lambda}$ , który w układzie związanym z kierunkami głównymi odkształcenia wyraża się przez wydłużenia względne:

$$\boldsymbol{\lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

W praktyce zakłada się funkcjonal  $\mathbf{Q}$  w postaci liniowej:

$$S_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t - \tau) \frac{\partial E_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (3.2)$$

lub quasi-liniowej [9]:

$$S_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G^*(t - \tau) \frac{\partial S_{ij}^c(\mathbf{E}(\tau))}{\partial \tau} d\tau, \quad (3.3)$$

gdzie  $\mathbf{S}^c(\mathbf{E})$  – tzw. odpowiedź sprężysta (jeżeli jest ona liniowa, to (3.3) jest jednym z przypadków modelu liniowego (3.2)).  $\mathbf{G}(t)$  i  $\mathbf{G}^*(t)$  są to odpowiednio tensorowa i zredukowana funkcja relaksacji. Funkcje te są określone na całym zbiorze liczb rzeczywistych, ale zakłada się, że przyjmują wartości niezerowe tylko dla dodatnich wartości  $t$ .

Jeżeli historia odkształcenia zaczyna się w chwili  $t = 0$ , tzn. daje się opisać funkcją  $\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{1}(t)$  ( $\mathbf{1}$  – funkcja Heaviside'a), to całkę po czasie w równaniach (3.2) i (3.3) można rozbić na dwa człony i zapisać w postaci:

$$S_{ij}(t) = G_{ijkl}(t) \cdot E_{kl}(0) + \int_0^t G_{ijkl}(t - \tau) \frac{\partial E_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (3.4)$$

lub:

$$S_{ij}(t) = G^*(t) \cdot S_{ij}^e(\mathbf{E}(0)) + \int_0^t G^*(t - \tau) \frac{\partial S_{ij}^e(\mathbf{E}(\tau))}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.5)$$

Powyższe równania wymagają dodatkowej modyfikacji jeżeli materiał jest traktowany jako nieściśliwy. W tym wypadku konieczne jest dodanie członu  $-pg_{ij}$  zależnego od ciśnienia hydrostatycznego  $p$ .  $\mathbf{g}$  jest tensorem metrycznym odpowiednim dla rodzaju używanego w równaniu konstytutywnym tensora naprężenia. Np. dla tensora  $\mathbf{S}$ :  $g_{ij} = \lambda_{ki}^{-1} \lambda_{kj}^{-1}$  a dla tensora  $\mathbf{T}$ :  $g_{ij} = \lambda_{ji}^{-1}$ .

Przykładem liniowego lepkosprężystego równania konstytutywnego jest podane przez Younga i in. [44] równanie ściany naczynia krwionośnego. Założyli oni, że w układzie współrzędnych walcowych tensor  $\mathbf{G}(t)$  przedstawia się jako macierz funkcji czasu w postaci:

$$a + b \cdot \exp(-ct^d), \quad (3.6)$$

gdzie  $a, b, c, d$  – dodatnie stałe materiałowe, różne dla różnych elementów  $G_{ijkl}$ . Stałe  $a$ , o wymiarze naprężenia, są modułami sztywności końcowej (tj. przy  $t \rightarrow \infty$ ),  $b$ , o podobnym wymiarze, obrazują różnicę pomiędzy sztywnością w chwili skokowego przyrostu odkształcenia a sztywnością końcową – przy naprężeniach zrelaksowanych. Stałe  $c$  i  $d$  stanowią o szybkości osiągnięcia stanu równowagi, w którym zmiana naprężenia w czasie przy stałym odkształceniu jest już niezauważalna.

Traktując naczynie krwionośne jako grubościenną, osiowosymetryczną rurę z materiału jednorodnego, anizotropowego i nieściśliwego i zakładając, że w większości przypadków rzeczywistego obciążenia kierunki główne odkształceń pokrywają się z osiami współrzędnych walcowych, autorzy [44] wykazali, że tensor  $\mathbf{G}(t)$  zawiera tylko cztery niezależne funkcje:

$$(S_\varphi - S_r)(t) = \int_{-\infty}^t [R_{\varphi\varphi}(t - \tau) \dot{E}_\varphi(\tau) + R_{\varphi z}(t - \tau) \dot{E}_z(\tau)] d\tau, \quad (3.7)$$

$$(S_z - S_r)(t) = \int_{-\infty}^t [R_{z\varphi}(t - \tau) \dot{E}_\varphi(\tau) + R_{zz}(t - \tau) \dot{E}_z(\tau)] d\tau,$$

gdzie  $R_{ij}$  ( $i, j = \varphi, z$ ) – funkcje postaci (3.6).

Eksperymenty przeprowadzone przez autorów na wycinkach aorty psa potwierdziły przydatność modelu do opisu tego rodzaju tkanek.

Inny przykład liniowego równania lepkosprężystego podał Moskowitz [29] dla śródsierdzia w stanie rozkurczu. Śródsierdzie jest jedną z warstw tworzących ściany serca, składającą się głównie z podłużnych, równoległe ułożonych komórek tkanki mięśniowej. Traktując tkankę jako jednorodną, nieściśliwą i lokalnie poprzecznie izotropową (w płaszczyźnie poprzecznej włókien mięśniowych) autor uprościł równanie (3.2) do postaci:

$$S_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \gamma_{ij}(t - \tau) \dot{E}_{ij}(\tau) d\tau - p \cdot \delta_{ij}, \quad (3.8)$$

gdzie:

$$\gamma_{ij}(t) = \begin{cases} 2\mu(t) & \text{dla } i, j = 1, 2 \\ 2\nu(t) & \text{dla } i = j = 3 \\ \mu(t) + \nu(t) & \text{dla } i = 3, j = 1, 2 \end{cases},$$

zaś funkcje  $\mu(t)$  i  $\nu(t)$  są postaci:

$$A_0 + \sum_{j=1}^n A_j e^{-\frac{t}{\tau_j}}. \quad (3.9)$$

Utworzenie modelu quasi-liniowego (w postaci (3.3)) wymaga założenia postaci dwóch funkcji:  $G^*(t)$  oraz  $S^*(E)$ .

Prostym, jednowymiarowym modelem tego typu jest model jednoosiowo rozciąganego włókna kolagenowego, podany przez Haut'a i Little'a [18]. Założyli oni kwadratową zależność naprężenia od odkształcenia:

$$a) \quad \sigma^e(\varepsilon) = c\varepsilon^2, \quad (3.10)$$

$$b) \quad G^*(t) = b(1 - \mu \ln t), \quad t > 0,$$

gdzie  $b, c, \mu$  – dodatnie stałe.

Stosowanie tego modelu jest możliwe tylko dla ograniczonych wartości  $t$  ( $G^*$  nie może być ujemne) i  $\varepsilon$ , jednak, jak wykazali autorzy, daje on dobre rezultaty w konfrontacji z danymi doświadczalnymi (cykliczne obciążanie). Pewne trudności mogą nastęrczać próby uogólnienia go na przypadek dwu- lub trójwymiarowy, ponieważ nie uwzględnia on oddziaływań tnących we włóknach i pomiędzy nimi. Warto zaznaczyć, że model ten jest jednocześnie uproszczonym modelem konstytutywnym ścięgna, składającego się niemal wyłącznie z równoległe ułożonych włókien kolagenowych.



Inną jednowymiarową postać funkcji odpowiedzi sprężystej podał m.in. Fung [12], posługując się pojęciami naprężenia  $T$  odniesionego do wymiarów początkowych oraz wydłużenia względnego  $\lambda$ . Jest to postać wykładnicza:

$$T^e(\lambda) = \beta(e^{\alpha(\lambda-\lambda_0)} - 1) + T_0 e^{\alpha(\lambda-\lambda_0)}, \quad (3.11)$$

gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$  – pewne stałe oraz  $T^e(\lambda_0) = T_0$ . Postać ta opiera się na stwierdzonej doświadczalnie dla wielu biomateriałów liniowej zależności sztywności  $dT/d\lambda$  od naprężenia  $T$ .

Fung [12] podał również przykłady zredukowanej funkcji relaksacji. Jedną z nich jest podana przez niego już wcześniej [9] funkcja:

$$G^*(t) = \frac{\sum_{i=1}^n c_i \exp(-\nu_i t)}{\sum_{i=1}^n c_i}, \quad t > 0, \quad (3.12)$$

gdzie  $c_i$ ,  $\nu_i$  – stałe materiałowe,  $\nu_i \geq 0$ . Funkcja przyjmuje wartość 1 dla  $t = 0$ , co oznacza, że naprężenie w tym momencie jest równe odpowiedzi sprężystej na skokowy przyrost odkształcenia. Fung ostrzega jednak, że stałe materiałowe dla tej postaci funkcji  $G^*$  są bardzo wrażliwe na nieznaczące różnice w danych eksperymentalnych, co może prowadzić do niejednoznaczności w opisie zachowania biomateriału.

Pewnym uogólnieniem postaci (3.12) jest zaproponowana przez Funga [9] funkcja:

$$G^*(t) = \frac{1 + \int_0^{\infty} S(\tau) e^{-\tau} d\tau}{1 + \int_0^{\infty} S(\tau) d\tau}, \quad t > 0, \quad (3.13)$$

gdzie  $S(\tau)$  – funkcja widmowa traktowana jako stała materiałowa. Chen i Fung [4] stosowali tę postać dla błony kreskowej królika, zakładając, że:

$$S(\tau) = \frac{c}{\tau} \quad \text{dla } \tau_1 < \tau < \tau_2, \quad (3.14)$$

$$S(\tau) = 0 \quad \text{dla pozostałych } \tau,$$

$c$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  – stałe, wówczas:

$$G^*(t) = \frac{1 + c \left[ E_2\left(\frac{t}{\tau_2}\right) - E_1\left(\frac{t}{\tau_1}\right) \right]}{1 + c \ln\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)}, \quad (3.15)$$

gdzie  $E_1$  – funkcja specjalna, tzw. całkowo-wykładnicza.

Tę samą postać funkcji relaksacji stosowali następnie Tanaka i Fung [35] dla różnych rodzajów naczyń krwionośnych. Wyniki w obu wypadkach były zadowalające w porównaniu z danymi doświadczalnymi. Fung [12] sugeruje, że tak przyjętą funkcję można stosować dla innych rodzajów tkanek miękkich. Szczególną jej zaletą jest mała wrażliwość zależności  $S(\mathbf{E}, t)$  na prędkość odkształcenia dla dużego przedziału tych prędkości. Jest to własność obserwowana dla większości biomateriałów, jeżeli tylko zostały wstępnie poddane kilku cyklom obciążenia (pre-condition). Proste modele lepkosprężyste (np. Voigta, Maxwella, czy standardowe ciało stałe Kelvina) nie uwzględniają tego zjawiska, stąd ich rzadkie stosowanie w biomechanice.

Simon i in. [32], badając lepkosprężyste własności chrząstek, porównywali następujące modele quasi-liniowe (jednowymiarowe):

$$T^e(\lambda) = \sum_{i=1}^n a_i (\lambda - 1)^i, \quad (3.16)$$

lub  $T^e(\lambda)$  – w postaci wykładniczej (3.11)

oraz

$$G^*(t) = 1 + b_1 (\exp(-b_2 t) - 1) \quad (\text{model Kelvina}) \quad (3.17)$$

lub  $G^*(t)$  – w postaci spektralnej (3.15).

Zestawienie tych modeli z wynikami doświadczeń pozwoliło m.in. wywnioskować, że dla  $\lambda < 1.15$  postać wielomianowa funkcji  $T^e(\lambda)$  może być z powodzeniem zredukowana do pierwszego członu ( $n = 1$ ), gdyż następnie niewiele zwiększają dokładność modelu. Przyjęcie funkcji relaksacji w postaci (3.17) powodowało znaczną wrażliwość pętli histerezy na prędkość odkształcenia w porównaniu z modelem zakładającym postać spektralną (3.15) (o czym wspomiano wyżej). Autorzy wskazują jednak na lepszą przydatność modelu Kelvina do opisu zachowania się chrząstki w doświadczeniach na pelzanie.

W literaturze poświęconej lepkosprężystym własnościom biomateriałów spotyka się również modele będące uogólnieniem równań (3.2) i (3.3). Przykładem może być uzależnienie funkcji relaksacji od tensora odkształcenia. Jenkins i Little [21] proponują następujący model dla jedoosiowo rozciąganej tkanki zbudowanej z równoległych włókien sprężystych (np. więzadło szyjne):

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G^*(\varepsilon(t - \tau), t - \tau) \frac{\partial \sigma^e[\varepsilon(\tau)]}{\partial \tau} \partial \tau, \quad (3.18)$$

gdzie:  $G^*(\varepsilon, t) = 1 - \mu \varepsilon^2 \ln t$ ,  $t > 0$ ,

oraz  $\sigma^e(\varepsilon) = c\varepsilon + d\varepsilon^2$ ,

$c, d, \mu$  – stałe materiałowe,  $c, \mu > 0$ .

Zestawienie z danymi doświadczalnymi (cykliczne obciążanie) dało zadowalające

rezultaty, oczywiście dla pewnego zakresu  $t$  (przy  $t \rightarrow \infty$   $G^*$  jest ujemne). Wartości stałej  $\mu$  były bardzo małe, co wiąże się z tym, że elastyna wykazuje w małym stopniu własności lepkosprężyste (przy  $\mu = 0$  model jest nieliniowo sprężysty).

Lakes i Katz [26], badając lepkosprężyste własności tkanki kostnej podali następującą zależność funkcji relaksacji od odkształcenia (przypadek jednowymiarowy – skręcanie):

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \int_{-\infty}^t G[t - \tau, \epsilon(\tau)] \cdot \dot{\epsilon}(\tau) d\tau, \\ G(t, \epsilon) &= G_0(t)[a_1 - a_2 \exp(-a_3 \epsilon^2)], \\ a_i, \quad i &= 1, 2, 3, \quad - \text{stałe.}\end{aligned}\tag{3.19}$$

Funkcja  $G_0(t)$  została przyjęta jako kombinacja liniowa kilku postaci spektralnych (3.15) o różnych wartościach par  $\tau_1$  i  $\tau_2$ .

Innym przykładem uogólnienia modelu liniowego jest podane przez Greena i Rivlina [17] rozwinięcie równania konstytutywnego w szereg całek wielokrotnych:

$$S_{ij}(t) = \sum_{k=0}^n Q_{ij}^{(k)}(t),\tag{3.20}$$

gdzie:

$$Q_{ij}^{(k)} = \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t G_{m_1 n_1 \dots m_k n_k}^{ij}(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k) \cdot \dot{E}_{m_1 n_1}(\tau_1) \cdot \dots \cdot \dot{E}_{m_k n_k}(\tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k.$$

Człon dla  $k = 0$  może być zerowy lub, w przypadku materiału nieściśliwego, może oznaczać ciśnienie hydrostatyczne. Powyższe równanie analizowali dla przypadku  $n = 2$  m. in. Young i in. [44] oraz Wu i Lee [42] dla ścian naczyń krwionośnych, przyjmując funkcje  $G$ -w postaci wykładniczej, analogicznej do (3.6). Wyniki niewiele się różniły od uzyskanych przy pomocy modelu liniowego ( $n = 1$ ), niemniej autorzy [44] uznają, że użycie modelu drugiego rzędu jest niezbędne w przypadku krytycznej analizy dokładności modelu liniowego.

#### 4. Modele nieliniowo-sprężyste. Koncepcja pseudosprężystości

Stosowanie modeli lepkosprężystych umożliwia opis mechaniczny biomateriałów z dużą dokładnością ale powoduje znaczne komplikacje w obliczeniach. Pość równań konstytutywnych zależnych od czasu i zawierających człony całkowite w

dużym stopniu utrudnia stosowanie metod numerycznych i czyni obliczenia żmudnymi i długotrwałymi. Naturalne jest więc poszukiwanie wszelkich możliwości uproszczenia modelu lepkosprężystego. Owocem tych poszukiwań jest np. koncepcja pseudosprężystości zaproponowana przez Funga, m.in. [9], [10].

Pomysł opiera się na obserwacji, że podczas wielokrotnego obciążania cyklicznego biomateriału lepkosprężystego krzywa  $\sigma(\varepsilon)$ , początkowo zmienna, po pewnej liczbie cykli ustala się i pozostaje praktycznie niewrażliwa na szybkość odkształcenia. Jakkolwiek nadal istnieje różnica między krzywą obciążania i odciążania (histereza), to można już posługiwać się kategoriami nieliniowej teorii sprężystości i traktować materiał jako sprężysty o różnych własnościach przy obciążaniu i odciążaniu. Fung zaproponował również istnienie funkcji energii odkształcenia  $W$ , znanej z teorii sprężystości, spełniającej warunek:

$$S_{ij} = \frac{\partial(\rho_0 W)}{\partial E_{ij}} \quad \text{lub} \quad T_{ij} = \frac{\partial(\rho_0 W)}{\partial \lambda_{ij}}, \quad (4.1)$$

a dla materiałów nieściśliwych:

$$S_{ij} = \frac{\partial(\rho_0 W)}{\partial E_{ij}} - p \lambda_{ki}^{-1} \lambda_{kj}^{-1}, \quad (4.2)$$

$$\text{lub} \quad T_{ij} = \frac{\partial(\rho_0 W)}{\partial \lambda_{ij}} - p \lambda_{ji}^{-1},$$

gdzie  $p$  – średnie ciśnienie hydrostatyczne. Każdy materiał odpowiadający powyższym założeniom ma więc dwie pseudo-funkcje energii odkształcenia: jedną dla obciążania a drugą dla odciążania.

Wybór sprężystego modelu konstytutywnego tak traktowanego biomateriału polega na przyjęciu określonej postaci funkcji energii odkształcenia i wyznaczenia wartości występujących w niej współczynników na podstawie danych eksperymentalnych.

Większość używanych w biomechanice funkcji  $W$  daje się sklasyfikować jako przypadki szczególne dwóch następujących postaci ogólnych:

$$W = \mathcal{P}_1^m(\mathbf{E}), \quad (4.3)$$

$$\text{lub} \quad W = \mathcal{P}_2^2(\mathbf{E}) + \mathcal{P}_3^2(\mathbf{E}) \cdot \exp(\mathcal{P}_4^n(\mathbf{E})), \quad (4.4)$$

gdzie oznaczenie  $\mathcal{P}^k(\mathbf{E})$  oznacza wielomian  $k$ -tego stopnia względem elementów tensora  $\mathbf{E}$ :

$$\mathcal{P}^k(\mathbf{E}) = a_0 + \sum_{p=1}^k \left( \alpha_{i_1 j_1 \dots i_p j_p} \cdot E_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot E_{i_p j_p} \right), \quad (4.5)$$

(wszystkie współczynniki  $\alpha$  są stałymi materiałowymi). Łatwo zauważyć, że obydwie postacie (4.3) i (4.4) można sprowadzić do uogólnionego prawa Hooke'a przez pozostawienie niezerowymi tylko współczynników  $\alpha_{ijkl}$  w wielomianach  $\mathcal{P}_1$  i  $\mathcal{P}_2$ .

Funkcja energii odkształcenia w postaci wielomianowej (4.3) znalazła zastosowanie m. in. w pracach [30,38] i [43] do opisu mechanicznego ścian naczyń krwionośnych. Zakładając, że materiał jest nieściśliwy oraz że przy większości obciążeń fizjologicznych kierunki odkształceń głównych pokrywają się z osiami współrzędnych walcowych, Patel i Vaishnav [30] zaproponowali taką dwuwymiarową postać funkcji  $W$ :

$$W^{(2)} = a_1 E_\varphi^2 + a_2 E_\varphi E_z + a_3 E_z^2 + a_4 E_\varphi^3 + a_5 E_\varphi^2 E_z + a_6 E_\varphi E_z^2 + a_7 E_z^3, \quad (4.6)$$

$a_1, \dots, a_7$  – stałe materiałowe. Autorzy przyjęli, że naprężenia w kierunku radialnym są pomijalnie małe. Vaishnav i in. [38] rozważali ponadto postać (4.6) rozszerzoną o człony czwartego stopnia, wykazując, że wyniki otrzymane tą drogą niewiele lepiej przybliżają dane eksperymentalne niż wielomian 3-go stopnia (4.6).

W i in. [43] zajmowali się trójwymiarowym stanem naprężenia w naczyniach krwionośnych, zakładając jednak poprzeczną izotropię. W tym wypadku, jak wykazano w [16], funkcja energii odkształcenia ma postać:

$$W = W(J_1, J_2, J_3, E_{33}, E_{13}E_{31} + E_{23}E_{32}), \quad (4.7)$$

zaś po pominięciu odkształceń postaciowych i przejściu do współrzędnych walcowych:

$$W = W(J_1, J_2, J_3, E_z). \quad (4.8)$$

Autorzy [43] założyli ponadto nieściśliwość materiału, tzn.  $J_3 = f(J_1, J_2)$ , i podali następującą postać  $W$ :

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{2} J_1^2 + 2\mu J_2 + 2a_1 J_1 E_z + a_2 E_z^2 + \frac{l + 2m}{2} J_1^3 + 2m J_1 J_2 + a_3 J_1^2 E_z + a_4 J_2 E_z + a_5 J_1 E_z^2 + a_6 E_z^3, \quad (4.9)$$

$\lambda, \mu, l, m, a_1, \dots, a_6$  – stałe materiałowe.

Postać wielomianowa (4.3) funkcji energii odkształcenia, choć wydaje się prostsza i "poręczniejsza" od postaci wykładniczej (4.4), nie znajduje wielu zwolenników. Jej podstawową wadą jest duża wrażliwość stałych współczynników na drobne różnice w danych doświadczalnych. Fung i in. [13] pokazali przykład dwóch identycznych eksperymentów na tej samej próbce aorty, w których otrzymano nieznacznie się różniące przebiegi  $\sigma(\varepsilon)$ , natomiast zestawy stałych materiałowych  $a_1, \dots, a_7$  (4.6) obliczone na ich podstawie są od siebie zupełnie różne. Co więcej, stałe  $a_1$  i  $a_3$ , odpowiadające modułom sprężystości liniowej w kierunkach  $\varphi$  i  $z$ , wyznaczone podobnie jak pozostałe stałe metodą najmniejszych kwadratów, przyjmowały dla niektórych doświadczeń wartości ujemne, co jest również godne podkreślenia.

Funkcja  $W$  w postaci wykładniczej okazuje się być bardziej przydatna w świetle omawianych wyżej problemów. Przy takich samych założeniach, jak w [30]

Fung i in. [13] podali alternatywną w stosunku do (4.6) postać funkcji energii odkształcenia:

$$W^{(2)} = \frac{c}{2} \exp(a_1 E_\varphi^2 + a_2 E_z^2 + 2a_4 E_\varphi E_z), \quad (4.10)$$

uzyskując podobną dokładność wyników przy znacznie większej stabilności współczynników  $a_1, a_2, a_4$  i  $c$  dla różnych eksperymentów.

Chuong i Fung [6] analizowali trójwymiarowy rozkład naprężeń w ściskanej radialnie tętnicy, opisując go równaniem analogicznym do (4.10):

$$W = \frac{c}{2} \exp(a_1 E_\varphi^2 + a_2 E_z^2 + a_3 E_r^2 + 2a_4 E_\varphi E_z + 2a_5 E_z E_r + 2a_6 E_r E_\varphi) \quad (4.11)$$

Autorzy wyznaczyli współczynniki  $a_1, \dots, a_6$  na podstawie danych doświadczalnych przy założeniu nieściśliwości oraz bez tego założenia. Otrzymane zestawy stałych różniły się od siebie, jednak rozkłady naprężeń w materiale wyznaczone obydwooma modelami były bardzo podobne.

Postać (4.10) funkcji  $W$  dla przypadku dwuwymiarowego znajduje również zastosowanie dla innych rodzajów tkanek. Tong i Fung [37], badając skórę królika założyli początkowo bardziej ogólną postać wykładniczą:

$$W = \frac{1}{2} (\alpha_1 E_{11}^2 + \alpha_2 E_{22}^2 + \alpha_3 (E_{12}^2 + E_{21}^2) + 2\alpha_4 E_{11} E_{22}) + \frac{c}{2} \exp(a_1 E_{11}^2 + a_2 E_{22}^2 + a_3 (E_{12}^2 + E_{21}^2) + 2a_4 E_{11} E_{22} + \gamma_1 E_{11}^3 + \gamma_2 E_{22}^3 + \gamma_4 E_{11}^2 E_{22} + \gamma_5 E_{22}^2 E_{11}). \quad (4.12)$$

Po dokonaniu analizy wyników autorzy uznali, że obecność członów trzeciego rzędu słabo poprawia dokładność modelu, a przy większych wartościach naprężeń i odkształceń można pominąć także człony ze współczynnikami  $\alpha_i$ . Wyrażając tak uproszczoną funkcję w odkształceniach głównych otrzymuje się postać (4.10).

Tej samej funkcji użył Fung [11] do opisu błony międzypęcherzykowej w tkance płucnej. Zakładając izotropię błony oraz że tworzy ona w płucu trójwymiarową, cienkościenną strukturę, której powtarzalnym elementem jest sześcienna skrzynka, wyprowadził on funkcję energii odkształcenia miękkiszu płucnego traktowanego makroskopowo jako ośrodek ciągły.

$$W = c \left[ \exp(a_1 (E_1^2 + E_2^2) + 2a_4 E_1 E_2) + \exp(a_1 (E_2^2 + E_3^2) + 2a_4 E_2 E_3) + \exp(a_1 (E_3^2 + E_1^2) + 2a_4 E_3 E_1) \right]. \quad (4.13)$$

Funkcja ta opisuje tylko własności sprężyste tkanki, nie uwzględniając obecności sił napięcia powierzchniowego płynu pokrywającego ścianki. W tym wypadku mają

one duże znaczenie. Fung [11] zaproponował taką postać rozkładu naprężenia w mięszu pochodzącego od tych sił:

$$\sigma_i = \frac{2\gamma_{ij}(\lambda_i\lambda_j)}{\lambda_k} + \frac{2\gamma_{jk}(\lambda_i\lambda_k)}{\lambda_j}, \quad (4.14)$$

$i, j, k = 1, 2, 3$ , cyklicznie  $\gamma_{\alpha\beta}$  – napięcie powierzchniowe podzielone przez długość boku sześciennego segmentu.

W pracy [14] Fung i in. kontynuowali te rozważania, zakładając tym razem, że pęcherzyki są początkowo izotropowymi sferami o średnicy  $\Delta$ . Wyprowadzili oni równanie funkcji energii odkształcenia mięszu płucnego, która jest sumą składowej pochodzącej od pseudosprężystości tkanki:

$$W = \frac{c}{2\Delta} \exp(\alpha J_1^2 + \beta J_2), \quad (4.15)$$

oraz od napięcia powierzchniowego, traktowanego jako zachowawcza siła wewnętrzna makroskopowego kontinuum:

$$W = C + \frac{6}{\Delta} \left\{ \gamma_{\min}(A - A_{\min}) + (\gamma - \gamma_{\min})(A_{\max} - A_{\min}) \left[ \frac{\xi^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n\pi} (\cos n\pi\xi - 1) \right] \right\}, \quad (4.16)$$

gdzie:

- $C, c, \alpha, \beta, c_n$  – stałe,
- $\gamma$  – napięcie powierzchniowe,
- $A$  – całkowite względne pole powierzchni pęcherzyków, przyjęte jako  $\frac{4}{3}(J_1 + J_2) - 1$ ,
- $\xi = (A - A_{\min}) / (A_{\max} - A_{\min})$ .

Indeksy "min" i "max" odnoszą się do minimalnej i maksymalnej objętości płuc w cyklu oddechowym.

Istnieje spora grupa modeli konstytutywnych opartych na postaci wykładniczej (4.4), utworzonych przy założeniu izotropii biomateriału. Jak wiadomo z teorii sprężystości [16], w takim wypadku funkcja energii odkształcenia zależy tylko od niezmienników tensora odkształcenia:

$$W = W(J_1, J_2, J_3), \quad (4.17)$$

lub inaczej:

$$W = W(I_1, I_2, I_3), \quad (4.18)$$

gdzie  $J_1, J_2, J_3$  – niezmienniki tensora  $\mathbf{E}$ , natomiast  $I_1, I_2, I_3$  – niezmienniki tensora  $\mathbf{\Lambda}$ :  $\Lambda_{ij} = \lambda_{ik}\lambda_{jk}$ .

Zwykle zakłada się za Shinozuoką [31], że energia odkształcenia jest sumą energii odkształcenia postaciowego i energii dylatacji:

$$W = W_1(I_1, I_2) + W_2(I_3), \quad (4.19)$$

przy czym  $W_2(I_3 \neq 1) = 0$  (brak zmiany objętości). Poniżej przedstawionych jest kilka modeli konstytutywnych będących szczególnymi przypadkami postaci (4.19):  
- Veronda, Westmann [40]:

$$W = c_1 \left( e^{\beta(I_1-3)} - 1 \right) + c_2(I_2 - 3) + g(I_3), \quad (4.20)$$

$$g(1) = 0, \quad c_1\beta > 0, \quad c_2 > 0,$$

- Demiray [8]:

$$W = c \left( e^{\beta(I_1-3)} - 1 \right), \quad c\beta > 0, \quad (4.21)$$

lub, uwzględniając tylko pierwszy człon rozwinięcia (4.21) w szereg potęgowy:

$$W = c\beta(I_1 - 3), \quad (4.22)$$

- Gou [15]:

$$W = c \exp[\beta I_1(I_1^2 - 3I_2)], \quad c\beta > 0, \quad (4.23)$$

- Tani i in. [36]:

$$W = c_1 \exp[\beta(I_1 - 3)^2] + c_2(I_2 - 2I_3 - 1), \quad (4.24)$$

- Snyder [33]:

$$W = \frac{c}{\beta} e^{\beta(Q-1)} - cQ, \quad (4.25)$$

$$Q = Q(I_1, I_2) = \frac{I_1 + \sqrt{I_1^2 - 3I_2}}{I_2}.$$

We wszystkich równaniach (4.20 - 4.25)  $c, c_1, c_2, \beta$  - stałe.

Trudno jest wypowiedzieć się, która z powyższych postaci funkcji energii odkształcenia jest "lepszą" a która "gorszą". Ich autorzy nie przeprowadzają w swych pracach szerszej dyskusji na temat porównania swojego modelu z innymi już istniejącymi. Pokazują natomiast przykłady zastosowania tego modelu bazując na danych doświadczalnych otrzymanych dla jakiejś konkretnej tkanki, stwierdzając zadowolające rezultaty. I tak Veronda i Westmann [40] rozważali dane dla skóry kota, Demiray [8] - dla mięśnia brodawkowego kota, Tani i in. [36] - dla mięszu płucnego, Snyder [33] - dla jednoosiowego rozciągania i skręcania włókna przedniego mięśnia goleniowego. Wszyscy autorzy (z wyjątkiem Tani'ego i in. [36], zajmujących się wyłącznie mięszem płucnym) zaznaczają, że podane przez nich



modele mogą być używane dla szerokiej klasy biomateriałów. Faktycznie, np. model Demiray'a (4.21) był stosowany z powodzeniem np. przez Tabera [34] dla błony gałki ocznej oraz przez Humphrey'a i Yina [20] dla międyzwłóknistej matrycy rozkurczonego mięśnia sercowego.

Izotropową funkcję energii odkształcenia opartą na postaci wielomianowej (4.3) podał Lai-Fook [25] dla mięszu płucnego. W odróżnieniu od Funga [11] nie wdawał się on w rozważania mikroskopowe dotyczące geometrii pęcherzyków i równań konstytutywnych poszczególnych składników mikrostruktury, lecz podał od razu równanie dla tkanki traktowanej jako makroskopowe kontinuum:

$$W = a_0 J_1 + a_1 J_2 + a_2 J_1^2 + a_3 J_1 J_2 + a_4 J_1^3 + a_5 J_3, \quad (4.26)$$

$a_0, \dots, a_5$  - stałe.

W oparciu o te same założenia Liu i Lee [28] zaproponowali postać (4.26) rozszerzoną o człony czwartego rzędu względem  $E_{ij}$ , nie przeprowadzając jednak porównania dokładności wyników swego modelu z modelem trzeciego rzędu.

Humphrey i in. [19] analizowali dane doświadczalne dla błony opłucnowej posługując się funkcją:

$$W = \mathcal{P}(E) + c(\exp(\mathcal{Q}(E)) - 1), \quad (4.27)$$

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  - wielomiany zawierające tylko człony drugiego stopnia względem  $E_{ij}$ . Rozważali trzy różne postacie pary funkcji  $\mathcal{P}$  i  $\mathcal{Q}$ :

a) materiał izotropowy

$$\mathcal{P} = 0, \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{2} a J_1^2 + b J_2, \quad (4.28)$$

b) materiał poprzecznie izotropowy

$$\mathcal{P} = 0, \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{2} a_1 (E_1^2 + E_2^2) + a_2 E_1 E_2 + a_3 (E_1 + E_2) E_3 + \frac{1}{2} a_4 E_3^2, \quad (4.29)$$

c) materiał izotropowy, model płaski

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} b_1 (E_1^2 + E_2^2) + b_2 E_1 E_2, \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{2} a_1 (E_1^2 + E_2^2). \quad (4.30)$$

Wnioski były następujące: w równaniu (4.29) stała  $a_3$  przyjmowała wartości bliskie zeru, zaś dla dużych odkształceń również człony ze stałymi  $a_2$  i  $a_4$  można było wykluczyć z modelu. W sumie najbardziej dokładne wyniki otrzymano stosując model płaski (4.30), w którym dla dużych odkształceń można pominąć człon ze stałą  $b_2$ .

Istnieje także grupa modeli konstytutywnych zakładających, że energia odkształcenia jest sumą energii odkształceń w trzech kierunkach głównych tensora odkształcenia. Ogólnie można to zapisać za Valanisem i Landelem [39]:

$$W = \sum_{i=1}^3 f(\lambda_i). \quad (4.31)$$

Przykłady postaci funkcji  $f$  zaproponowali Blatz i in. [2]:

$$f(\lambda_i) = c(\lambda_i^p - 1), \quad p \geq 2, \quad (4.32)$$

$$f(\lambda_i) = c\{\exp[\alpha(\lambda_i^2 - 1)] - 1\}. \quad (4.33)$$

Autorzy posłużyli się danymi doświadczalnymi dla różnych rodzajów mięśni oraz błony kreskowej, uzyskując różne wartości stałych  $c$  i  $\alpha$  w równaniu (4.33). Wartość  $\alpha$  wahała się w granicach od 8 do 18.

## 5. Modele liniowo-sprężyste

Tkankami, dla których można stosować liniowo-sprężyste modele konstytutywne, są kości oraz zęby. Są to kompozyty składające się z sieci włókien kolagenowych, wzdłuż których ułożone są kryształy twardych soli wapiennych o składzie chemicznym zbliżonym do hydroksyapatytu. Tkanki te są na tyle sztywne, że ich odkształcenia można opisać tensorem liniowym:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \quad (5.1)$$

gdzie  $u_i = x_i - X_i$ . Wobec tak małych odkształceń silnie nieliniowe własności kolagenu (rys.2.1) mogą być pominięte i równanie konstytutywne można zapisać w postaci:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (5.2)$$

Jakkolwiek doświadczalnie stwierdzono, że sztywność kości zmienia się wraz ze zmianą prędkości odkształcenia (dla szerokiego przedziału tych prędkości) [26], to w większości praktycznych zastosowań pomija się te nieznaczące zmiany i traktuje się elementy tensora  $C$  jako stałe materiałowe. Zależność (5.2) jest słuszna dla kości suchych (martwych) w całym zakresie odkształceń aż do zniszczenia, natomiast dla kości wilgotnych - w granicach  $|\varepsilon| < 0.004$  (dla jednoosiowego rozciągania - na podst. [12]). Powyżej tej wartości sztywność maleje. Jedynie dla odkształceń rzędu  $10^{-6}$  stwierdza się większe wartości modułu Younga (Katz, [22]), jednak te fluktuacje nie mają większego znaczenia dla dalszego przebiegu krzywej  $\sigma(\varepsilon)$ .

Jedyna nieliniowa własność równania (5.2) polega na tym, że stałe materiałowe różnią się dla ściskania i dla rozciągania. Wynika to z faktu, że włókna kolagenowe nie stawiają oporu przy ściskaniu.

Tkanka kostna i zębna są niejednorodne i anizotropowe. Anizotropia na poziomie mikroskopowym wiąże się z określonym ułożeniem włókien i kryształów w blaszce kostnej – podstawowym elemencie struktury kości. W tkance zębnej, zarówno w zębinie, jak i w szkliwie również obserwuje się kierunkowość ułożenia kryształów i włókien (szkliwo prawie nie zawiera włókien i składa się w 92% z nieorganicznych kryształów). W skali makro mamy do czynienia z niejednorodną, wysoce skomplikowaną geometrycznie strukturą blaszek (kość) lub krystalitów (ząb). Zwykle jednak traktuje się tę strukturę jako ośrodek makroskopowo ciągły, który w ogólnym przypadku również wykazuje własności anizotropowe.

Własności sprężyste kości zwartej, będącej podstawowym budulcem trzonów kości długich, badali m.in. Katz [23,24] oraz Bonfield i Grynpaś [3]. Z ich analiz wynika, że moduły Younga w kierunku radialnym i obwodowym są ponad dwukrotnie mniejsze niż w kierunku wzdłużnym. Sztywność w tym ostatnim przypadku jest rzędu 20 GPa przy rozciąganiu i 5 GPa przy ściskaniu.

Jeżeli chodzi o inne rodzaje kości, to można powiedzieć, że w każdym przypadku mamy do czynienia z innym rodzajem anizotropii. Wiąże się to ze specyficznym ułożeniem blaszek kostnych, ich wielkością i składem. W szczególności niektóre kości mogą w skali makro wykazywać własności izotropowe, tak, jak to zauważyli np. Ashman i in. [1] dla szczęki psa.

Lees i Rollins [27] wyznaczyli wartości pięciu stałych materiałowych dla tkanek twardych zęba (szkliwo i zębina) przy założeniu poprzecznej izotropii struktury. Dość dokładna analiza geometrii struktury zęba i własności jej składników została dokonana przez Watersa [41].

## Literatura

1. ASHMAN R.B., ROSINIA G., COWIN S.C., FONTENOT M.G., RICE J.C., *The bone tissue of the canine mandible is elastically isotropic*, J. of Biomechanics, 18, s.717-721, 1985
2. BLATZ P.J., CHU B.M., WAYLAND H., *On the mechanical behavior of elastic animal tissue*, Trans. Soc. Rheol., 13, s.83-102, 1969
3. BONFIELD W., GRYNPAŚ M.D., *Anisotropy of the Young's modulus of bone*, Nature, 270, s.453-454, 1977
4. CHEN Y.L., FUNG Y.C., *Stress-strain history relations of rabbit mesentery in simple elongation*, w: 1973 Biomechanics Symposium, ASME Publ. AMD-2, New York, s.9-10, 1973
5. CHRISTENSEN R.M., *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*, Academic Press, New York, 1971

6. CHUONG C.J., FUNG Y.C., *Compressibility and constitutive equation of arterial wall in radial compression experiments*, J. of Biomechanics, 17, s.35-40, 1984
7. CURREY J.D., *Three analogies to explain the mechanical properties of bone*, Bio-rheology, 2, s.1-10, 1964
8. DEMIRAY H., *A note on the elasticity of soft biological tissues*, J. of Biomechanics, 5, s.309-311, 1972
9. FUNG Y.C., *Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation*, w: Biomechanics: Its Foundations and Objectives, eds. Y.C.Fung, N.Perrone and M.Anliker, Prentice Hall, Englewood Cliffs, s.181-208, 1972
10. FUNG Y.C., *Biorheology of soft tissues*, Bio-rheology, 10, s.139-155, 1973
11. FUNG Y.C., *Stress, deformation and atelectasis of the lung*, Circulation Research, 37, s.481-496, 1975
12. FUNG Y.C., *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*, Springer-Verlag, New York, 1981
13. FUNG Y.C., FRONEK K., PATITUCCI P., *Pseudoelasticity of arteries and the choice of its mathematical expression*, Am. J. of Physiology, 237, nr 5, s.H620-H631, 1979
14. FUNG Y.C., TONG P., PATITUCCI P., *Stress and strain in the lung*, J. of the Engineering Mechanics Div. (Proc. of the ASCE), 104, s.201-224, 1978
15. GOU P.F., *Strain energy function for biological tissues*, J. of Biomchanics, 3, s.547-550, 1970
16. GREEN A.E., ADKINS J.E., *Large Elastic Deformations*, Clarendon Press, Oxford, 1970
17. GREEN A.E., RIVLIN R.S., *The mechanics of nonlinear materials with memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., 1, s.1-21, 1957
18. HAUT R., LITTLE R.W., *A constitutive equation of collagen fiber*, J. of Biomechanics, 5, s.423-430, 1972
19. HUMPHREY J.D., VAWTER D.L., VITO R.P., *Pseudoelasticity of excised visceral pleura*, Trans. of the ASME. J. of Biomech. Engineering, 109, s.115-120, 1987
20. HUMPHREY J.D., YIN F.C.P., *On constitutive relations and finite deformations of passive cardiac tissue: I. A pseudo strain energy function*, Trans. of the ASME. J. of Biomech. Engineering, 109, s.298-304, 1987
21. JENKINS R.B., LITTLE R.W., *A constitutive equation for parallel-fibered elastic tissue*, J. of Biomechanics, 7, s.397-402, 1974
22. KATZ J.L., *Young's modulus of compact bone*, J. of Biomechanics, 7, s.147-149, 1974
23. KATZ J.L., *The structure and biomechanics of bone*, w: The Mechanical Properties of Biological Materials, Symp. of the Soc. for Experimental Biology, Cambridge, s.137-168, 1980
24. KATZ J.L., *Anisotropy of Young's modulus of bone*, Nature, 283, s.106-107, 1980
25. LAI-FOOK S.J., *Lung parenchyma as a prestressed compressible material*, J. of Biomechanics, 10, s.357-366, 1977
26. LAKES R.S., KATZ J.L., *Viscoelastic properties of wet cortical bone: III. A nonlinear constitutive equation*, J. of Biomechanics, 12, s. 689-698, 1979
27. LEES S., ROLLINS F.R., *Anisotropy in hard dental tissues*, J. of Biomechanics, 5, s.557-566, 1972

28. LIU J.T., LEE G.C., *Static finite deformation analysis of the lung*, J. of Engineering Mechanics Div. (Proc. of the ASCE), 104, s.225-238, 1978
29. MOSKOWITZ S.E., *Constitutive stress-strain relations for the myocardium in diastole*, J. of Biomechanics, 18, s.177-188, 1985
30. PATEL D.J., VAISHNAW R.N., w: *Cardiovascular Fluid Dynamics*, ed. D.H.Bergel, Academic Press, New York, t.2, s.1-64, 1972
31. SHINOZUOKA M., FREUDENTHAL P.M., *Strain energy function for filled elastomers*, J. of Appl. Polymer Sciences, 9, s.2565-2579, 1965
32. SIMON B.R., COATS R.S., WOO S.L.Y., *Relaxation and creep quasilinear viscoelastic models for normal articular cartilage*, Trans. of the ASME. J. of Biomech. Engineering, 106, s.159-164, 1984
33. SNYDER R.W., *Large deformations of isotropic biological tissue*, J. of Biomechanics, 5, s.601-606, 1972
34. TABER L.A., *Large deformation mechanics of the enucleated eyeball*, Trans. of the ASME. J. of Biomech. Engineering, 106, s.229-234, 1984
35. TANAKA T.T., FUNG Y.C., *Elastic and inelastic properties of the canine aorta and their variation along the aortic tree*, J. of Biomechanics, 7, s.357-370, 1974
36. TANI J., NAKAMURA M., SASAKI H., ŌKUBO T., TAKASHIMA T., HILDEBRANDT J., *Mechanical behavior of lung parenchyma as a compressible continuum: A theoretical analysis*, Tohoku J. of Exp. Med., 137, s.125-136, 1982
37. TONG P., FUNG Y.C., *The stress-strain relationship for the skin*, J. of Biomechanics, 9, s.649-657, 1976
38. VAISHNAW R.N., YOUNG J.T., JANICKI J.S., PATEL D.J., *Nonlinear anisotropic properties of the canine aorta*, Biophysical J., 12, s. 1008-1027, 1972
39. VALANIS K.C., LANDEL R.F., *Strain-energy function of a hyperelastic material*, J. of Appl. Physics, 38, s.2997-3002, 1967
40. VERONDA D.R., WESTMANN R.A., *Mechanical characterization of skin. Finite deformations*, J. of Biomechanics, 3, s.111-124, 1970
41. WATERS N.E., *Some mechanical and physical properties of teeth*, w: The Mechanical Properties of Biological Materials. Symp. of the Soc. for Experimental Biology, Cambridge, s.99-135, 1980
42. WU S.G., LEE C.G., *On nonlinear viscoelastic properties of arterial tissue*, Trans. of the ASME. J. of Biomech. Engineering, 106, s.42-49, 1984
43. WU S.G., LEE C.G., TSENG N.T., *Nonlinear elastic analysis of blood vessels*, Trans of the ASME. J. of Biomech. Engineering, 106, s.376-383, 1984
44. YOUNG J.T., VAISHNAW R.N., *Nonlinear anisotropic viscoelastic properties of canine arterial segments*, J. of Biomechanics, 10, s.549-560, 1977

#### Summary

The paper presents a review of constitutive models recently applied in the mechanical analysis of living tissues. The mechanical properties of the basic microstructural components of animal tissues (connective tissue fibers, hydroxyapatite, muscular cells) are discussed. Next, on the basis of available literature, a series of constitutive models for various tissues is presented. The models are classified in regard to the type of constitutive relations. Three basic groups of models are distinguished: viscoelastic, nonlinearly-elastic and linearly-elastic. Examples of constitutive equations are provided, followed by the discussion of their properties and range of applicability.

*Praca wplynęła do Redakcji dnia 30 czerwca 1988 roku*