

WPLYW NIEJEDNORODNOŚCI STRUKTURY OŚRODKA POROWATEGO TYPU WŁÓKNISTEGO NA WSPÓŁCZYNNIK PRZEPUSZCZALNOŚCI DARCY'EGO

JAN ADAM KOŁODZIEJ

Politechnika Poznańska, Poznań

Dyskutuje się przepuszczalność włóknistego ośrodka porowatego. Ośrodek składa się z równoległych losowo rozmieszczonych włókien. Model uwzględnia niejednorodne rozłożenie włókien w realnych ośrodkach porowatych. Określa się tensor przepuszczalności dla takiego anizotropowego ośrodka porowatego w oparciu o uogólniony model komórkowy hydrodynamiki. Otrzymane składowe tensora przepuszczalności zawierają trzy parametry: udział objętościowy włókien, udział objętościowy kawern (obszarów pozbawionych włókien), średni bezwymiarowy promień kawern. Dyskutuje się wpływ wartości tych parametrów na składowe tensora przepuszczalności. W oparciu o wybrane dane eksperymentalne określa się wartości udziału objętościowego i średniego promienia kawern przy pomocy metody najmniejszych kwadratów.

1. Wprowadzenie

W wielu sytuacjach spotykanych w praktyce wiązka równoległych włókien opływana płynem może być traktowana jako filtracyjny ośrodek porowaty. Dla przykładu taki ośrodek porowaty był używany do badania efektów hydrodynamicznych w procesie przędzenia włókien sztucznych [1] lub badaniu efektywności osadzania się cząstek i spadku ciśnienia w filtrach włóknistych [2]. W takim przypadku z powodu włóknistej struktury ośrodek porowaty jest anizotropowy ze względu na własności filtracyjne. Zwykle do opisu makroskopowego przepływu przez anizotropowy ośrodek porowaty stosuje się prawo Darcy'ego w postaci:

$$q = -\frac{K}{\mu} \text{grad} P, \quad (1.1)$$

gdzie: q – prędkość filtracji, P – ciśnienie płynu, μ – współczynnik lepkości, oraz K – tensor przepuszczalności.

W pracach [3–4] udowadnia się, że tensor przepuszczalności jest symetryczny. Jeśli układ współrzędnych (x, y, z) jest obrany w ten sposób, że oś z jest równoległa

do osi włókien to wówczas macierz przepuszczalności ma postać:

$$|K_{ij}| = \begin{vmatrix} K_{\perp x} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\perp y} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel} \end{vmatrix}. \quad (1.2)$$

Zwykle zakłada się, że własności filtracyjne wiązki w każdym kierunku prostopadłym do osi z są sobie równe, co oznacza, że $K_{\perp x} = K_{\perp y} = K_{\perp}$ i w rezultacie dwie wielkości skalarne K_{\parallel} i K_{\perp} charakteryzują przepuszczalność takiego ośrodka porowatego [5].

Obecnie istnieje wiele teoretycznych i doświadczalnych badań dotyczących określania przepuszczalności w takim ośrodku. Obszerny przegląd prac dotyczących równoległego przepływu względem wiązki (określenie K_{\parallel}) jest dany w pracy [6], podczas gdy taki przegląd dotyczący przepływu prostopadłego (określenia K_{\perp}) jest dany w pracy [7]. Znany jest fakt rozbieżności wyników prac doświadczalnych z wynikami prac teoretycznych dotyczących K_{\parallel} i K_{\perp} dla wiązek włókien. Badania eksperymentalne wskazują na większą wartość przepuszczalności (mniejszy opór przepływu) w porównaniu z wynikami uzyskiwanymi przez prawie wszystkie modele teoretyczne. Fakt ten może być wyjaśniany tym, że w badaniach doświadczalnych z realnymi włóknami trudno jest zachować jednorodne rozłożenie włókien, które zakłada się w badaniach teoretycznych. W rzeczywistych wiązkach doświadczalnych rozłożenie włókien jest w mniejszym lub większym stopniu niejednorodne i istniejące obszary o mniejszej gęstości upakowania włókien mogą znacznie zredukować opór przepływu.

Celem niniejszej pracy jest propozycja modelu teoretycznego dotyczącego losowego rozłożenia równoległych włókien, który uwzględni niejednorodne rozłożenie włókien jakie występuje w realnych ośrodkach porowatych. W oparciu o uogólniony model komórkowy [8] określa się składowe tensora przepuszczalności K_{\parallel} i K_{\perp} , a więc rozważa się zarówno przepływ podłużny jak i poprzeczny. Składowe tensora K_{\parallel} i K_{\perp} , oprócz gęstości upakowania włókien, zależą dodatkowo od dwóch parametrów modelu. Są nimi udział objętościowy obszarów pozbawionych włókien, które to obszary z założenia są cylindryczne oraz bezwymiarowy promień tych obszarów. Dyskutuje się wpływ wartości tych parametrów na składowe tensora przepuszczalności. W oparciu o przykładowe dane doświadczalne metodą najmniejszych kwadratów określa się wartości tych parametrów. Proponowany model z jednej strony przemawia za wspomnianą wyżej hipotezą tłumaczenia rozbieżności wyników prac teoretycznych i doświadczalnych, a z drugiej strony proponuje nowe wzory na składowe tensora przepuszczalności ośrodka porowatego w postaci równoległych wiązek włókien. Zaletą proponowanego modelu jest prostota.

2. Uogólniony model komórkowy w zastosowaniu do niejednorodnych wiązek włókien

Na poziomie mikrostruktury przepływ płynu w ośrodkach porowatych jest rządzone przez równania Naviera-Stokesa dla przepływu płynu lepkiego uproszczone przez pominięcie członu bezwładnościowego z uwagi na małe liczby Reynoldsa. Jednak na przepływ wokół pojedynczego włókna ma wpływ obecność otaczających włókien. Ten fakt z jednej strony daje większy opór przepływu, a z drugiej strony wprowadza istotną komplikację w rozwiązywaniu równań rządzących na poziomie mikrostruktury. Wspomniany efekt oddziaływania włókien był uwzględniany przy pomocy trzech różnych modeli.

W pierwszym modelu zakłada się, że włókna we wiązce są rozmieszczone w regularny sposób według którejś z regularnych siatek. Przepływ wyznacza się wówczas w powtarzającym się elemencie układu, a oddziaływania pomiędzy włóknami uwzględnia się poprzez odpowiednie warunki brzegowe (warunki symetrii) na granicy powtarzającego się układu, np. [9-10]. W drugim modelu oddziaływania są uwzględniane poprzez dodanie do równań rządzących tłumiącej siły masowej proporcjonalnej do prędkości przepływu, np. [2,11]. W trzecim modelu, tj. modelu komórkowym, zakłócenie przepływu spowodowane oddziaływaniem jest modelowane przez wprowadzenie wymyślnego cylindra okrążającego koncentrycznie każde włókno [12-13].

Model komórkowy dla jednorodnej wiązki z losowo rozmieszczonymi włóknami przy przepływie podłużnym względem włókien był stosowany przez Happela [12]. Zgodnie z wynikami tego autora przepuszczalność w kierunku równoległym wynosi:

$$\frac{K_{\parallel}}{a_2} = \frac{1}{4\varphi} \left(\ln \frac{1}{\varphi} - 1.5 + 2\varphi - \frac{\varphi^2}{2} \right), \quad (2.1)$$

gdzie φ jest udziałem objętościowym włókien w układzie, a – promieniem włókien.

Przy przepływie poprzecznym dla jednorodnej wiązki model ten był stosowany przez Happela [12] i Kuwabarę [13]. Autorzy ci w komórce rozwiązywali dwuwymiarowy problem brzegowy z równaniem Stokesa, ale wykorzystywali różne warunki brzegowe na zewnętrznej granicy komórki. Konkretnie Kuwabara zakładał znikanie wirowości, podczas gdy Happel znikanie naprężeń stycznych na zewnętrznej granicy komórki. Z tego powodu wzory na przepuszczalność otrzymane przez tych autorów różnią się między sobą. Zgodnie z wynikami Kuwabary przepuszczalność w kierunku poprzecznym do włókien wynosi:

$$\frac{K_{\perp}}{a_2} = \frac{1}{8\varphi} \left(\ln \frac{1}{\varphi} - 1.5 + 2\varphi - \frac{\varphi^2}{2} \right), \quad (2.2)$$

podczas gdy z wyników Happela otrzymujemy:

$$\frac{K_{\perp}}{a_2} = \frac{1}{8\varphi} \left(\ln \frac{1}{\varphi} + \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2 + 1} \right). \quad (2.3)$$

Kirch i Fuks [14] badali eksperymentalnie poprawność wzorów Happela i Kuwabary używając trójkątnej siatki prętów. Ich eksperyment polegał na badaniu kształtu linii prądu w otoczeniu jednego z prętów i wskazywał na poprawność wyników Kuwabary.

Tablica 1. Wartości $K_{||}/a^2$ według różnych autorów

Gęstość upakowania włókien ξ	Wzór teoretyczny (2.1) Happela [12] przy $\varphi = \xi$	Wyniki eksperymentalne Sullivana [15]	Wyniki według wzoru (2.15) przy $\lambda^2 = 403.1$ $\phi = 0.0233$
0.0156	43.134	92.752	90.771
0.0167	39.305	83.186	82.698
0.018	35.461	74.211	74.593
0.0195	31.746	66.312	66.760
0.0213	28.068	57.817	59.010
0.0234	24.589	50.722	51.678
0.026	21.167	43.837	44.468
0.0292	18.629	37.796	37.603
0.0334	15.583	31.905	30.874
0.039	11.676	26.301	24.485
0.0408	10.906	22.961	22.865
0.0585	6.2137	14.118	12.999
0.0779	3.8674	8.4166	8.0720
0.0935	2.8140	6.2496	5.8627
0.1169	1.8678	4.2004	3.8812
0.156	1.0541	2.5536	2.1802

Porównanie wyników prac eksperymentalnych [15-17] dotyczących przepuszczalności wiązki przy przepływie podłużnym i poprzecznym z wartościami wynikającymi ze wzorów (2.1) i (2.2) podano w tablicy 1. Jak już wspomniano we wprowadzeniu wartości wynikające z tych wzorów, podobnie jak i innych wzorów teoretycznych, są mniejsze od wartości uzyskanych eksperymentalnie (patrz tab. 1 i 2).

Oznacza to, że realnie istniejące wiązki stawiają niższy opór dla przepływu niż wynika to z rozważań teoretycznych. Najbardziej przekonującą hipotezą tłumaczącą to zjawisko wydaje się istnienie niejednorodności w rozkładzie włókien podczas realnych przepływów. Aby uzyskać model teoretyczny dający wyniki bliższe wartościom eksperymentalnym skorzystamy niżej z idei po raz pierwszy zaproponowanej w pracy [8].

Podstawą proponowanego modelu są następujące założenia:

a) Wiązka równoległych włókien cylindrycznych, które posiadają jednakowe średnice $2a$, jest w pewien szczególny sposób niejednorodna.

b) Wspomniana niejednorodność polega na istnieniu kawern o średnicy $2R$ w jednorodnym materiale wiązki (rys. 1).

c) Kawerny są równoległe do włókien i są rozmieszczone losowo i jednorodnie, a gęstość upakowania czyli stosunek objętości kawern do objętości całkowitej wiązki wynosi Φ .

d) Przepływ filtracyjny w jednorodnym materiale wiązki podlega prawu Darce'ego z przepuszczalnością w kierunku podłużnym określoną wzorem (2.1) oraz przepuszczalnością w kierunku poprzecznym określoną wzorem (2.2). Promienie włókien są na tyle duże, że przepływ dyfuzyjny w materiale wiązki nie występuje.

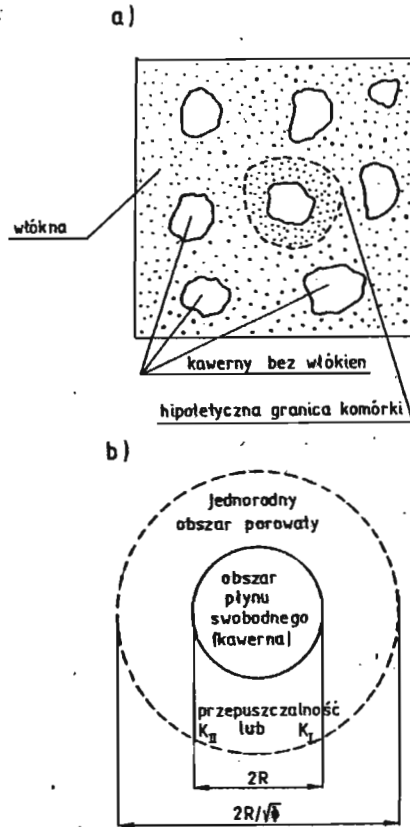
Tablica 2. Porównanie wartości teoretycznych i eksperymentalnych dla K_{\perp}/a^2

Gęstość upakowania włókien ξ	Wzór teoretyczny (2.2) przy $\varphi = \xi$	Wyniki eksperymentalne Billing [16]	Wyniki eksperymentalne Bounstark [17]
0.00833	49.562	73.333	
0.00889	45.573	55.000	
0.0111	33.997	44.000	
0.0122	29.955	40.000	
0.0144	23.940	33.846	
0.0156	21.651	27.510	
0.0167	19.717	29.333	
0.0267	10.207	15.172	
0.0278	9.624		16.926
0.0289	9.094	12.941	
0.0305	8.404		14.667
0.0322	7.755	10.476	
0.0344	7.028		12.222
0.0395	5.727		9.778
0.0461	4.521		7.857
0.0561	3.322		5.946

W jednorodnych wiązках włókien gęstość upakowania włókien φ jako stosunek objętości włókien do objętości całkowitej układu jest jedyną wielkością charakteryzującą udziały objętościowe faz. Jeśli jednak proponowana wiązka jest niejednorodna, tak jak w proponowanym modelu, sytuacja jest bardziej złożona i mamy do czynienia z trzema gęstościami upakowania, z których dwie są niezależne. Są to:

a) udział objętościowy kawern zdefiniowany jako:

$$\Phi = \frac{\text{objętość kawern w układzie}}{\text{całkowita objętość układu}}, \quad (2.4)$$



Rys. 1. Wiązka włókien jako niejednorodny obszar porowaty; a) postać niejednorodności, b) proponowany model komórkowy

b) gęstość upakowania włókien w jednorodnym materiale wiązki zdefiniowana jako:

$$\varphi = \frac{\text{objętość włókien w układzie}}{\text{objętość jednorodnego materiału wiązki}} \quad (2.5)$$

c) gęstość upakowania układu niejednorodnego zdefiniowana jako:

$$\xi = \frac{\text{objętość włókien w układzie}}{\text{całkowita objętość układu}} \quad (2.6)$$

Między tymi wielkościami istnieje związek:

$$\varphi = \frac{\xi}{1 - \Phi} \quad (2.7)$$

Jeśli więc wzory (2.1) i (2.2) mają opisywać przepuszczalność w jednorodnym materiale wiązki poza kawernami, to należy w nich w miejsce φ podstawić $\xi/(1 - \Phi)$.

2.1. Przepływ równoległy do włókien

W tym przypadku wewnętrzny obszar komórki (obszar płynu swobodnego) jest cylindryczną rurą zawierającą lepki płyn, dla którego równania Naviera-Stokesa redukują się do równania różniczkowego w postaci (przepływ Poiseullea):

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad \text{dla } 0 < r < R, \quad (2.8)$$

gdzie v_z jest prędkością przepływu w kierunku osi z , dp/dz stałym gradientem ciśnienia.

Przepływ w pierścieniowym obszarze porowatym wynika bezpośrednio z równania Darcy'ego. Prędkość przepływu w tym obszarze:

$$q_z = -\frac{K_{\parallel}}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad \text{dla } R < r < \frac{R}{\sqrt{\Phi}}. \quad (2.9)$$

Rozwiązanie równania (2.8) z warunkami brzegowymi:

$$v_z \text{ musi być skończone przy } r = 0, \quad (2.10)$$

$$v_z = q_z = -\frac{K_{\parallel}}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad \text{przy } r = R \quad (2.11)$$

ma postać:

$$\frac{v_z}{-\frac{K_{\parallel}}{\mu} \frac{dp}{dz}} = \frac{1}{4}(\lambda^2 - \rho^2) + 1, \quad (2.12)$$

gdzie: $\lambda = \frac{R}{a}$, $\rho = \frac{r}{a}$.

Wydatek przepływu przez obszar całej komórki wynosi:

$$Q = 2\pi \int_0^R v_z r dr + \pi q_z \left(\frac{R^2}{\Phi} - R^2 \right). \quad (2.13)$$

Prędkość filtracji w całej komórce traktowanej jako niejednorodny obszar porowaty wynosi:

$$q_z^{(n)} = -\frac{K_{\parallel}^{(n)}}{\mu} \frac{dp}{dz}, \quad (2.14)$$

gdzie $K_{\parallel}^{(n)}$ jest współczynnikiem przepuszczalności wiązki niejednorodnej przy przepływie podłużnym. Z drugiej jednak strony $q_z^{(n)} = Q/(\pi R^2/\Phi)$ co po wykonaniu całkowania prowadzi do wyniku:

$$\frac{K_{\parallel}^{(n)}}{a^2} = \frac{(1-\Phi)}{4\xi} \left[\ln \frac{1-\Phi}{\xi} - 1.5 + \frac{2\xi}{1-\Phi} - \frac{0.5\xi^2}{(1-\Phi)^2} \right] \left(\frac{\Phi\lambda^2}{8} + 1 \right). \quad (2.15)$$

2.2. Przepływ prostopadły do włókien

W tym przypadku wewnętrzny obszar komórki jest kołem zawierającym płyn swobodny, dla którego opisanie stosujemy równania przepływu pelzającego w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}, \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}, \quad (2.18)$$

dla $0 < r < R$,

gdzie v_r i v_θ są składowymi prędkościami, p jest ciśnieniem płynu.

Przepływ w pierścieniowym obszarze porowatym jest opisywany przez równanie Darcy'ego w postaci:

$$q_r = -\frac{K_\perp}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \quad \text{dla } R < r < \frac{R}{\sqrt{\Phi}}, \quad (2.19)$$

$$q_\theta = -\frac{K_\perp}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad \text{dla } R < r < \frac{R}{\sqrt{\Phi}}, \quad (2.20)$$

gdzie q_r i q_θ są składowymi prędkościami filtracji, P jest ciśnieniem w obszarze porowatym.

Na zewnętrznej granicy komórki zakładamy jednorodny przepływ filtracyjny z prędkością Q_0 , podczas gdy na granicy obszaru porowatego i obszaru przepływu swobodnego zakładamy ciągłość ciśnienia i prędkości. Prowadzi to do następujących warunków brzegowych

- przy $r = \frac{R}{\sqrt{\Phi}}$:

$$q_r = Q_0 \cos \theta, \quad (2.21)$$

- przy $r = R$:

$$q_r = v_r, \quad (2.22)$$

$$q_\theta = v_\theta, \quad (2.23)$$

$$P = p. \quad (2.24)$$

Rozwiązanie układu równań (2.16) - (2.20) przyjmujemy w postaci:

$$v_r = \left(A + \frac{1}{8}Br^2\right) \cos \theta, \quad (2.25)$$

$$v_\theta = \left(A + \frac{3}{8}Br^2\right) \sin \theta, \quad (2.26)$$

$$p = \mu Br \cos \theta, \quad (2.27)$$

$$P = \frac{\mu Q_0}{K_\perp} \left(\frac{C}{r} + Dr\right) \cos \theta, \quad (2.28)$$

gdzie A , B , C i D są dowolnymi stałymi.

Po spełnieniu warunków brzegowych (2.21) - (2.24) stałe te przyjmują postać:

$$A = \frac{3Q_0^2 R}{R^2 + R^2 \Phi + 8K_{\perp}}, \quad (2.29)$$

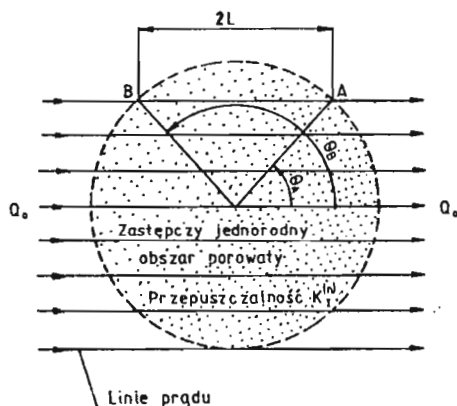
$$B = \frac{-8Q_0}{R^2 + R^2 \Phi + 8K_{\perp}}, \quad (2.30)$$

$$C = \frac{R^4}{R^2 + R^2 \Phi + 8K_{\perp}}, \quad (2.31)$$

$$D = -\frac{R^2 + 8K_{\perp}}{R^2 + R^2 \Phi + 8K_{\perp}}. \quad (2.32)$$

Jedyną informacją jaka jest wymagana do obliczenia przepuszczalności w modelowanym układzie jest rozkład ciśnienia na zewnętrznej granicy komórki ($r = R/\sqrt{\Phi}$). Podstawiając do wzoru (2.28) stałe C i D określone wzorami (2.31) - (2.32) na zewnętrznej granicy komórki otrzymujemy:

$$P_b = \frac{\mu Q_0 \Phi \left[R^3 \Phi - (R^2 + 8K_{\perp}) \frac{R}{\Phi} \right] \cos \Theta}{R^2 + R^2 \Phi + 8K_{\perp}}. \quad (2.33)$$



Rys. 2. Zastępczy "jednorodny" obszar porowaty

Przepuszczalność niejednorodnego obszaru porowatego może być wyznaczona z następującego rozumowania. Komórkę z kawerną o promieniu zewnętrznym $R/\sqrt{\Phi}$ przedstawioną na rys.2 traktujemy jako jednorodny obszar porowaty określony przepuszczalnością $K_{\perp}^{(n)}$. Spadek ciśnienia pomiędzy dowolną parą punktów A i B , z których każdy umieszczony jest na powierzchni komórki na tej samej linii prądu wynosi:

$$P_{bA} - P_{bB} = -\frac{Q_0 \mu L}{K_{\perp}^{(n)}}, \quad (2.34)$$

gdzie $L = 2(R/\sqrt{\Phi}) \cos \Theta_A$ oznacza odległość pomiędzy punktami A i B. Wykorzystując wzór (2.33) i uwzględniając przy tym, że $\cos \Theta_A = -\cos \Theta_B$, otrzymujemy:

$$\frac{K_{\perp}^{(n)}}{a^2} = \frac{K_{\perp}}{a^2} \frac{[\lambda^2(1 + \Phi) + 8\frac{K_{\perp}}{a^2}]}{[\lambda^2(\Phi - 1) - 8\frac{K_{\perp}}{a^2}]}, \quad (2.35)$$

gdzie K_{\perp}/a^2 określa wzór (2.2) przy założeniu, że $\varphi = \xi/(1 - \Phi)$.

3. Dyskusja wyników

W otrzymanych wzorach (2.15) i (2.35) określających przepuszczalność przy przepływie podłużnym i poprzecznym do niejednorodnych wiązek, prócz gęstości upakowania włókien ξ , występują dodatkowo dwa parametry. Są nimi udział objętościowy obszarów pozbawionych włókien Φ oraz bezwymiarowy promień tych obszarów λ , które to obszary z założenia są cylindryczne.

Tablica 3. Wartości $K_{\parallel}^{(n)}/a^2$ według wzoru (2.15) przy $\xi = 0.05$. Przepuszczalność wiązki jednorodnej według wzoru (2.1) przy $\varphi = 0.05$ wynosi $K_{\parallel}/a^2 = 7.9724114$

λ	$\Phi = 0.05$	$\Phi = 0.1$	$\Phi = 0.3$	$\Phi = 0.51$
1	7.4003	6.8341	4.6457	2.6498
2	7.5384	7.0872	5.1494	3.1175
3	7.7682	7.5091	5.9890	3.8968
4	8.0900	8.0997	7.1644	4.9879
5	8.5036	8.8590	8.6757	6.3908
6	9.0093	9.7871	10.523	8.1054
7	9.6068	10.884	12.106	10.132
8	10.296	12.150	15.224	12.470
9	11.079	15.187	21.269	18.081
10	11.951	15.187	21.269	18.081
100	25.741	40.498	71.644	64.843

Przechodząc do dyskusji wyników należy stwierdzić, że niejednorodność w układzie może zmniejszyć lub zwiększyć przepuszczalność wiązki. Widoczne to jest w tablicach 3 i 4 gdzie podano niektóre wartości przepuszczalności otrzymane ze wzoru (2.15) (przepływ podłużny) oraz w tablicach 5 - 7 gdzie podano także wartości otrzymane ze wzoru (2.35) (przepływ poprzeczny). Dla porównania podano tam wartości przepuszczalności dla wiązki jednorodnej. Dla względnie małych wartości promieni λ wartości przepuszczalności wiązek niejednorodnych są mniejsze od przepuszczalności wiązek jednorodnych, niezależnie od wartości

pozostałych parametrów.

Tablica 4. Wartości $K_{\parallel}^{(n)}/a^2$ według wzoru (2.15) przy $\xi = 0.2$. Przepuszczalność wiązki jednorodnej według wzoru (2.1) przy $\varphi = 0.2$ wynosi $K_{\parallel}/a^2 = 0.61179739$

λ	$\Phi = 0.05$	$\Phi = 0.1$	$\Phi = 0.3$	$\Phi = 0.51$
1	0.5461	0.4828	0.2572	0.0905
2	0.5563	0.5006	0.2851	0.1065
3	0.5970	0.5305	0.3316	0.1331
4	0.5970	0.5722	0.3967	0.1704
5	0.6275	0.6258	0.4804	0.2183
6	0.6648	0.6914	0.5827	0.2768
7	0.7089	0.7689	0.7036	0.3461
8	0.7598	0.8583	0.8430	0.4259
9	0.8175	0.9596	1.0010	0.3164
10	0.8819	1.0780	1.1780	0.6176
100	1.9000	2.8610	3.3870	2.2150

Dopiero po przekroczeniu pewnej krytycznej wartości promienia kawern, przepuszczalność wiązek niejednorodnych jest większa od przepuszczalności wiązek jednorodnych (wartości w ramach w tablicach 3 – 6). Należy jednak zauważyć, że ta krytyczna wartość promienia jest znacznie mniejsza przy przepływie podłużnym od takiej wartości przy przepływie poprzecznym. Ponadto dla przepływu poprzecznego nie dla każdej gęstości upakowania włókien jest możliwe uzyskanie większej wartości przepuszczalności wiązek niejednorodnych od przepuszczalności dla wiązki jednorodnej (patrz tablica 7). Dotyczy to szczególnie większych gęstości upakowania włókien.

Tablica 5. Wartości $K_{\perp}^{(n)}/a^2$ według wzoru (2.35) przy $\xi = 0.01$. Przepuszczalność wiązki jednorodnej według wzoru (2.2) przy $\varphi = 0.01$ wynosi $K_{\perp}/a^2 = 39.064$

λ	$\Phi = 0.05$	$\Phi = 0.1$	$\Phi = 0.3$	$\Phi = 0.51$
1	36.527	33.997	24.373	15.448
5	36.803	34.574	26.019	18.160
10	37.457	35.876	29.826	24.203
20	38.687	38.301	36.591	34.325
40	39.738	40.352	42.045	41.899
60	40.055	40.967	43.634	44.017
80	40.182	41.210	44.260	44.841
100	40.243	41.280	44.563	45.238
1000	40.357	41.550	45.120	45.964

Celem fizykalnego wytłumaczenia uzyskanych wyników weźmy pod uwagę wiązkę, która początkowo jest jednorodna. Wówczas na opór przepływu (przepuszczalność) ma wpływ opór stawiany przez każde włókno w równym stopniu.

Tablica 6. Wartości $K_{\perp}^{(n)}/a^2$ według wzoru (2.35) przy $\xi = 0.05$. Przepuszczalność wiązki jednorodnej według wzoru (2.2) przy $\varphi = 0.05$ wynosi $K_{\perp}/a^2 = 3.986$

λ	$\Phi = 0.05$	$\Phi = 0.1$	$\Phi = 0.3$	$\Phi = 0.51$
1	3.689	3.399	2.310	1.366
5	3.850	3.716	3.187	2.634
10	3.973	3.952	3.767	3.326
20	4.037	4.073	4.042	3.623
40	4.057	4.111	4.128	3.710
60	4.061	4.119	4.144	3.727
80	4.062	4.121	4.150	3.733
100	4.063	4.123	4.153	3.736
1000	4.064	4.125	4.158	3.741

Tablica 7. Wartości $K_{\perp}^{(n)}/a^2$ według wzoru (2.35) przy $\xi = 0.2$. Przepuszczalność wiązki jednorodnej według wzoru (2.2) przy $\varphi = 0.2$ wynosi $K_{\perp}/a^2 = 0.3059$

λ	$\Phi = 0.05$	$\Phi = 0.1$	$\Phi = 0.3$	$\Phi = 0.51$
1	0.0933	0.2801	0.2554	0.1679
5	0.1255	0.2975	0.2872	0.2245
10	0.1272	0.2993	0.2903	0.2288
20	0.1276	0.2998	0.2911	0.2299
40	0.1277	0.2999	0.2913	0.2301
60	0.1278	0.2999	0.2913	0.2302
80	0.1278	0.2999	0.2913	0.2302
100	0.1278	0.2999	0.2914	0.2302
1000	0.1278	0.2999	0.2914	0.2302

Załóżmy następnie, że z takiej jednorodnej wiązki powstała wiązka niejednorodna z cylindrycznymi kawernami i jednorodnym obszarem poza kawernami. Wówczas gęstość upakowania włókien w układzie ξ nie ulega zmianie, ale gęstość upakowania jednorodnego obszaru poza kawernami $\xi/(1 - \Phi)$ wzrasta. Obecnie przepuszczalność jest wypadkową przepuszczalności z dwóch obszarów, tj. obszaru jednorodnego poza kawernami i obszaru kawern. Z uwagi na wzrost gęstości upakowania w obszarze poza kawernami ten obszar powoduje wzrost oporu przepływu (zmniejszenie przepuszczalności), podczas gdy obszary kawern powodują zmniejszenie oporu (wzrost przepuszczalności). Oczywiście te wpływy są różne dla różnych parametrów gęstości upakowania układu, gęstości upakowania kawern i promienia kawern. Z wymienionych parametrów największy wpływ

ma promień kawern. Poniżej pewnych krytycznych wartości promienia kawern, wzrost oporu spowodowany zagęszczeniem obszaru poza kawernami jest większy od redukcji oporu wynikającej z istnienia kawern. Po przekroczeniu krytycznej wartości promienia, sytuacja się odwraca i przepuszczalność wiązki niejednorodnej staje się większa od przepuszczalności wiązki jednorodnej. Należy zauważyć, że wzrost oporu wynikający z zagęszczenia jednorodnego materiału wiązki przy przepływie poprzecznym jest znacznie większy od takiego wzrostu przy przepływie podłużnym.

Jak już wspomniano, jednym ze sposobów tłumaczenia rozbieżności wyników teoretycznych i eksperymentalnych jest istnienie niejednorodności podczas eksperymentu, podczas gdy w rozważaniach teoretycznych zakłada się jednorodność. Ponieważ badania eksperymentalne wskazują na wyższe wartości przepuszczalności w porównaniu do modeli teoretycznych, więc niejednorodność ma być przyczyną wzrostu przepuszczalności. Jak wykazano wyżej niejednorodność nie zawsze musi zwiększać przepuszczalność. Co więcej, okazuje się, że w ramach dyskusowanego modelu dla przepływu poprzecznego nie w każdym przypadku jest możliwe wytłumaczenie wzrostu przepuszczalności niejednorodnością w postaci kawern cylindrycznych. Aby to lepiej wyjaśnić, spróbujemy wyznaczyć parametry modelu λ i Φ w oparciu o dostępne dane doświadczalne podane w tablicach 1 i 2. Zakładając, że wzorem aproksymacyjnym wyniki doświadczeń jest wzór (2.15) lub (2.35) i stosując metodę najmniejszych kwadratów [18] otrzymuje się układ dwóch równań nieliniowych z niewiadomymi λ i Φ . Rozwiązując następnie ten układ zmodyfikowaną metodą Newtona [19] można wyznaczyć stałe λ i Φ dla danego zestawu danych eksperymentalnych, czyli otrzymać odpowiednie wzory aproksymacyjne. Dla przepływu równoległego do wiązki z danymi eksperymentalnymi podanymi w tablicy 1 udało się wyznaczyć stałe λ i Φ (patrz ostatnia kolumna w tablicy 1). Stosując tę samą procedurę postępowania dla przepływu poprzecznego, z danymi eksperymentalnymi z tablicy 2, nie udało się uzyskać zbieżności metody Newtona. Należy przypuszczać, że nie jest możliwa aproksymacja tych danych doświadczalnych przy pomocy wzoru (2.35). Tak więc, tłumaczenie wzrostu przepuszczalności w przepływie poprzecznym podczas eksperymentów przy pomocy niejednorodności w postaci cylindrycznych kawern wydaje się być wątpliwe.

Literatura

1. SZANIAWSKI A., ZACHARA A., *Hydrodynamic problems of multifilament spinning*, Chemické Vlakna, 26, 1-21, 1976
2. SPIELMAN L., GOREN S. L., *Model for predicting pressure drop and filtration efficiency in fibrous media*, Environmental Science and Technology, 2, 279-287, 1968
3. POREH M., ELATA C., *An analytical derivation of Darcy's law*, Israel J. Technology, 25, 214-230, 1966

4. NEUMAN S.P., *Theoretical derivation of Darcy's law*, Acta Mechanica, 25, 153-165, 1977
5. NEALE G., *Degrees of anisotropy for fluid flow and diffusion (electrical conduction) through anisotropic porous media*, AIChE Journal, 23, 56-61, 1977
6. KOŁODZIEJ J.A., *Opór filtracyjny układu prętów cylindrycznych przy podłużnym laminarnym przepływie*, Archiwum Budowy Maszyn, 27, 487-502, 1980
7. KOŁODZIEJ J.A., *Filtration resistance of a system of parallel cylinders at transverse creeping flow*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 24, 537-549, 1986
8. NEALE G., ANAKA H., HÄMPPEL D., *Transport phenomena in non-homogeneous porous media*, Canadian J.Chem.Eng., 53, 691-694, 1975
9. SPARROW E.M., LOEFFLER A.L., *Longitudinal laminar flow between cylinders arranged in regular array*, AIChE Journal, 5, 325-330, 1959
10. DRUMMOND J.E., TAHIR M.I., *Laminar viscous flow through regular arrays of parallel solid cylinders*, Int.J.Multiphase Flow, 10, 515-539, 1984
11. ITOH S., *The permeability of a random array of parallel infinite cylindrical rods*, J.Phys.Soc.Japan, 53, 1718-1727, 1984
12. HAPPEL J., *Viscous flow relative to arrays of cylinders*, AIChE Journal, 5, 174-177, 1959
13. KUWABARA S., *The force experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in a viscous flow at small Reynolds numbers*, J.Phys.Soc.Japan, 14, 527-532, 1959
14. KIRSCH A.A., FUCHS N.A., *The fluid flow in a system of parallel cylinders perpendicular to the flow direction at small Reynolds numbers*, J.Phys.Soc.Japan, 22, 527-532, 1967
15. SULLIVAN R.R., *Specific surface measurements on compact bundles of parallel fibers*, J.Appl.Phys., 13, 725-730, 1942
16. BILLING C.E., *Effect of particle accumulation in aerosol filtration*, PhD dissertation, California Institute of Technology, 1966
17. BAUMSTART J., *Upper atmospheric monitoring program*, Atomic Energy Commission, Report AECU-4280, 1959
18. HOLMAN J.P., GAJDA W.J.JR., *Experimental Methods for Engineers*, McGraw-Hill Book Company, 1978
19. GREENSPAN D., *Discrete Numerical Methods in Physics and Engineering*, Academic Press, 1974

Summary

A model of porous media consisting of random distribution of parallel fibers is proposed to account for nonuniform fiber spacing in a real porous media. Basing upon a generalized cell model of hydrodynamics, the tensor of permeability of this anisotropic media is determined. The components of permeability tensor contain two parameters which are determined basing upon some chosen experimental data by mean of the least squares approximation.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 listopada 1988 roku