

O GRANICACH OBSZARÓW STATECZNOŚCI PRĘTA POD DWUPARAMETROWYM OBCIĄŻENIEM NIEPOTENCJALNYM

WOJCIECH GLABISZ

Politechnika Wroclawska

W pracy wyznaczono obszary stateczności pręta wspornikowego poddanego działaniu niezależnych obciążeń potencjalnych i niepotencjalnych. Podano sposoby konstruowania obszarów stateczności, a także ustosunkowano się do wpływu na ich kształt dwuparametrowego podłoża sprężystego.

1. Wprowadzenie

Problematyką stateczności układów niekonserwatywnych jako jeden z pierwszych zajął się w latach dwudziestych E.L.Nikolai, a następnie – w latach pięćdziesiątych – H.Ziegler. Istotnym wydarzeniem w rozwoju badań nad statecznością układów niekonserwatywnych było opublikowanie przez Bolotina [3] monografii dotyczącej zagadnień stateczności niekonserwatywnych układów sprężystych, której obszerna część poświęcona została analizie układów prętowych zginanych jak i skręcanych. Analizą wpływu siły tnącej i bezwładności obrotu na wartość obciążenia krytycznego w układach prętowych zajął się Nemat-Nasser [10], który między innymi badał wpływ wspomnianych efektów dla wspornikowego pręta (z materiału Kelvina) obciążonego na swobodnym końcu siłą śledzącą (kolumna Becka). Stwierdził on, że wraz ze zmniejszaniem się smukłości efekt ścinania i bezwładności obrotu staje się bardziej znaczący. Kounadis i Katsikadelis [7] badali efekt ścinania i bezwładności obrotu dla kolumny Becka z różnymi charakterystykami podparcia (podparcie sprężyste wraz ze skupioną masą w miejscu zamocowania). Autorzy ci – wykorzystując podany przez Cowpera [5] sposób wyznaczania współczynnika ścinania Timoshenki – między innymi pokazali, że redukcja obciążenia krytycznego powodującego flutter pręta o smukłości $S = 60$ jest rzędu 10% (dla pręta krępego) i 30% (dla pręta cienkościennego). Sundararamaiah i Venkateswara Rao [14] badali – wykorzystując metodę elementów skończonych

– efekt ścinania i bezwładności obrotu dla kolumny Becka jak i pręta wspornikowego obciążonego równomiernie rozłożonym obciążeniem śledzącym (kolumna Leipholza). Stwierdzili oni, że dla małych smukłości obniżenie obciążenia krytycznego badanych prętów spowodowane wspomnianymi efektami jest znaczące. Analizę wpływu podłoża sprężystego na stateczność układów niekonserwatywnych zajął się Smith i Herrmann [11]. Badając kolumnę Becka stwierdzili oni, że dwustronne podłoże sprężyste typu Winklera nie zmienia krytycznego obciążenia typu flatter, a jedynie podnosi wartości częstości drgań pręta. Sundararajan [13] uogólnił wyniki pracy [11] formułując twierdzenie: "obciążenie krytyczne nietlumionych, liniowosprężystych kolumn poddanych stacjonarnym siłom (zachowawczym lub niezachowawczym) nie zmniejsza się po przyłożeniu podłoża sprężystego typu Winklera mającego moduł sprężystości rozłożony geometrycznie podobnie do rozkładu masy kolumny". Ten sam autor wraz z Venkateswara Rao [15] badał metodą elementów skończonych efekt ścinania i bezwładności obrotu dla krótkich kolumn Becka i Leipholza spoczywających na podłożu sprężystym Winklera. W pracy wykazano, że obciążenie krytyczne tych kolumn rośnie wraz ze wzrostem smukłości, a dla smukłości ustalonej maleje wraz ze wzrostem stałej charakteryzującej podłoże. Uwzględniając stabilizujące tłumienie lepkie w analizie stateczności kolumny Becka na podłożu sprężystym Winklera Wahed [16] wykazał, że podłoże to zwiększa działanie tego typu tłumienia. Anderson [1] badał pręty o różnych sposobach podparcia spoczywające na podłożu typu Wieghardta i poddane działaniu śledzących obciążeń rozłożonych. Celep [4] analizował – metodą Galerkiną – stateczność wąskich, prostokątnych belek wspornikowych poddanych działaniu zginających, równomiernie rozłożonych obciążeń pionowych i śledzących. W pracy tej założono, że analizowane belki spoczywają na podłożu typu Winklera o reakcjach proporcjonalnych do ich ugięcia i obrotu; pokazano, że w zależności od stałych opisujących podłoże, obciążenie krytyczne pręta może ulec zwiększeniu lub zmniejszeniu. Sugiyama i Kawagoe [12] metodą różnic skończonych badali drgania i stateczność sprężystych kolumn o różnych warunkach brzegowych, które poddane były równomiernie rozłożonym siłom śledzącym. Obszerny przegląd literatury w zakresie analizy stateczności kolumn obciążanych siłami śledzącymi wraz z syntezą tego tematu można znaleźć w pracy Bogacza i Janiszewskiego [2]. Jak wykazał Życzkowski [19,20] obciążenie krytyczne pręta wspornikowego pod działaniem siły ustalonej materialnie może być - w zależności od wartości parametru śledzenia - wielokrotnie większe od krytycznego obciążenia ustalonego przestrzennie (obciążenie potencjalne). Tak więc, poddając pręt jednoczesnemu działaniu obciążenia potencjalnego i niepotencjalnego można uzyskać - z uwagi na utratę stateczności - znacznie większy poziom krytycznego obciążenia potencjalnego.

W pracy zajęto się analizą stateczności pręta wspornikowego spoczywającego na dwuparametrowym podłożu sprężystym, które jest charakteryzowane stałymi r i k . Jest to podłoże inne od tego, które analizował Celep [4]. Założono, że reakcja

$R(x)$ podłoża opisana jest równaniem:

$$R(x) = kw(x) - 2rw''(x), \quad (1.1)$$

gdzie $w(x)$ jest przemieszczeniem punktu pręta, którego położenie opisuje zmienna niezależna x (rys.1). Przyjęty model podłoża jest tak zwanym modelem "ciągnowym" i należy do najczęściej stosowanych modeli dwuparametrowych [8]. Pozwala on – w przeciwieństwie do modelu Winklera ($k \neq 0, r = 0$), który sprowadza oddziaływanie podłoża do reakcji szeregu samodzielnych sprężyn – na aproksymację zachowania ciągłości odkształceń dzięki wprowadzeniu dodatkowego składnika proporcjonalnego do drugiej pochodnej ugięć. Składnik ten – jak piszą Własow i Leontiew [17] – uwzględnia wpływ naprężeń stycznych powstających w podłożu sprężystym.

Celem pracy jest:

– wyznaczenie obszarów stateczności pręta wspornikowego poddanego działaniu statycznego obciążenia ustalonego przestrzennie i materialnie dla różnych parametrów śledzenia i stałych charakteryzujących podłoża sprężyste,

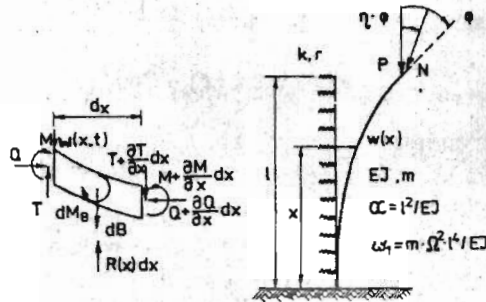
– podanie sposobów konstruowania obszarów stateczności w przestrzeni obciążeń potencjalnych i niepotencjalnych,

– określenie granic stosowalności statycznego kryterium stateczności w funkcji parametrów podłoża r i k (wyznaczenie granicznych parametrów śledzenia) dla pierwotnych i wtórnych obciążeń krytycznych.

2. Sformułowanie problemu

W rozważaniach przyjęto dynamiczne kryterium utraty stateczności [3,19,20], które pozwala uzyskać rozwiązanie w przypadku utraty stateczności przez bifurkację jak i przez flutter. Równanie drgań poprzecznych belki Timoshenki znaleźć można między innymi w pracach [7,18]; niżej równanie to uogólnia się na przypadek belki spoczywającej na podłożu sprężystym o reakcji opisanej relacją (1.1). Pomijając tłumienie i formułując problem jako geometrycznie i fizycznie liniowy, równanie falowe drgań poprzecznych krępego pręta otrzymać można rozpatrując warunki równowagi wyciętego elementu (rys.1). Kąt jaki tworzy odkształcona oś belki z osią x składa się z kąta $\psi(x,t)$ (t jest czasem) odpowiadającego odkształceniu wynikającemu z czystego zginania momentem $M(x,t)$ i z kąta $\gamma(x,t)$, który wynika z odkształcenia postaciowego spowodowanego ścinaniem siłą $T(x,t)$ [6]. Związek między przemieszczeniem poprzecznym pręta $w(x,t)$ a kątem zawartym między nieodkształconą i odkształconą jego osią podłużną, ma postać:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \psi(x,t) + \gamma(x,t). \quad (2.1)$$



Rys. 1. Schemat pręta

Jak wiadomo [6] związki między kątem $\gamma(x, t)$ a siłą tnącą oraz między kątem $\psi(x, t)$ a momentem zginającym są opisane równaniami:

$$\gamma(x, t) = n \frac{T(x, t)}{GA}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(x, t)}{\partial x} = -\frac{M(x, t)}{EI}, \quad (2.3)$$

gdzie n jest współczynnikiem zależnym od kształtu poprzecznego pręta [6], przez G oznaczono moduł odkształcalności postaciowej Kirchoffa, E jest modułem Younga, A jest polem przekroju poprzecznego pręta, a I jego momentem bezwładności.

Uwzględniając, że:

$$dM_B = -\rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} dx, \quad dB = -m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} dx$$

warunki równowagi momentów względem środka elementu dx i równanie równowagi rzutów wszystkich sił na oś prostopadłą do osi x przyjmą odpowiednio postać:

$$T(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - Q \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + kw(x, t) - 2r - \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

W równaniach tych przez ρ oznaczono gęstość materiału belki, m jest masą jednostki długości pręta ($m = \rho A$), a Q całkowitą siłą osiową ($Q = P + N$). Po uwzględnieniu równań (2.1), (2.2) i (2.3) w równaniu (2.4) i zrózniczkowaniu otrzymanej równości oraz podstawieniu do (2.5) otrzymamy falowe równanie drgań poprzecznych belki:

$$EI(1 + \frac{2nr}{GA}) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - (\frac{EInm}{GA} + \rho I + \frac{2rn\rho I}{GA}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{mn\rho I}{GA} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + (Q - \frac{nkEI}{GA} - 2r) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\frac{kn\rho I}{GA} + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw = 0. \quad (2.6)$$

Jest to uogólnione równanie falowe drgań poprzecznych belki Timoshenki spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym. Poszukując rozwiązania równania (2.6) w postaci [3]:

$$w(x, t) = W(x)e^{i\Omega t}, \quad (2.7)$$

i wprowadzając bezwymiarowy parametr $\xi = \frac{x}{l}$ (l jest długością pręta) otrzymujemy jednorodne równanie różniczkowe:

$$W^{IV}(\xi) + \beta W''(\xi) + \omega^2 W(\xi) = 0, \quad (2.8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{l^2}{EI(1 + \frac{2nr}{GA})} \left[\Omega^2 \left(\frac{EInm}{GA} + \rho I + \frac{2r\rho I}{GA} \right) + Q - \frac{EInk}{GA} - 2r \right], \\ \omega^2 &= \frac{l^4}{EI(1 + \frac{2nr}{GA})} \left[-\Omega^4 \frac{mn\rho I}{GA} + \Omega^2 \left(\frac{kn\rho I}{GA} + m \right) - k \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Warunki brzegowe pręta wspornikowego (rys.1) mają postać:

$$\begin{aligned} \xi = 0 : W(0)l^3 = W'(0)l^2 = 0, \\ \xi = 1 : W'''(1)l = 0, \quad W'''(1) + [P + (1 - \eta)N]\alpha W'(1) = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

gdzie $\alpha = \frac{l^2}{EI}$.

Z uwagi na realizację głównego celu pracy jakim jest wyznaczenie obszarów stateczności pręta w dwuparametrowej przestrzeni obciążeń P i N , warunki brzegowe (2.10) zapisano wykorzystując parametry P , N i η , chociaż – w tym zadaniu – są tylko dwa parametry niezależne. Parametrami tymi są: siła Q i jej parametr śledzenia $\bar{\eta}$. Wykorzystując parametry niezależne warunki brzegowe dla analizowanego pręta zapisać można jako:

$$\begin{aligned} \xi = 0 : W(0)l^3 = W'(0)l^2 = 0, \\ \xi = 1 : W'''(1)l = 0, \quad W'''(1) + Q(1 - \bar{\eta})\alpha W'(1) = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdzie: $Q = P + N$, a $\bar{\eta} = \eta \frac{N}{P+N}$.

Uwzględnienie warunków brzegowych (2.10) w równaniu charakterystycznym równania (2.8) prowadzi do układu czterech jednorodnych równań algebraicznych na stałe całkowania [3,19,20]. Warunek nietrywialnego rozwiązania tego układu – w postaci relacji wyrażającej zerowanie się wyznacznika – daje równanie, które pozwala śledzić wartości częstości drgań własnych pręta w zależności od poziomów obciążeń charakteryzowanych niezależnymi parametrami oraz parametru η i stałych podłoża sprężystego. W przypadku zerowania się częstości drgań własnych ω mamy do czynienia z utratą stateczności przez bifurkację, a gdy dwie z tych częstości zrównają się, to pręt traci stateczność przez flutter [3,19,20].

3. Wyniki testów numerycznych

Otrzymana w punkcie poprzednim relacja pozwala na wyznaczanie obszarów stateczności w przestrzeni obciążeń – potencjalnego (P) i niepotencjalnego (N) – charakteryzowanych niezależnymi parametrami. Przeprowadzona – między innymi – w pracach [14,15] analiza wpływu bezwładności obrotu i odkształcalności postaciowej na wartości obciążeń krytycznych wykazała, że wpływ tych efektów szybko maleje wraz ze wzrostem smukłości i w prętach krępych jest znacznie mniejszy niż w prętach cienkościennych [7]. Tak więc dla realnie spotykanych smukłości krępych prętów, których drgania opisać można równaniem (2.6), nie popełnia się istotnego błędu prowadząc analizę tak jak dla modelu belki Eulera. Błąd ten dla prętów o smukłości $S > 50$ nie przekracza kilku procent.

Na rys. 2 – 6¹ przedstawiono przykładowe obszary stateczności pręta; linią ciągłą oznaczono granice obszarów wyznaczone przez krytyczne obciążenie bifurkacyjne, linia przerywana wyznacza wartości obciążeń, przy których pręt traci stateczność przez flutter. Celem uniezależnienia się od konkretnych stałych charakteryzujących podłoże sprężyste przyjęto, że stałe te dla podłoża Winklera ($k \neq 0, r = 0$) mogą zwiększać pierwszą częstość drgań własnych pręta $s\%$, a dla podłoża o stałej $k = 0$ zmniejszać tę częstość o $z\%$. Obszary stateczności wyznaczono znajdując wartości krytycznych obciążeń potencjalnych P dla ustalonych wartości poziomego obciążenia niepotencjalnego N i danego parametru śledzenia η . Okazuje się, że tak wyznaczone obszary stateczności można otrzymać na drodze prostej, nie tak żmudnej analizy numerycznej. Podstawę w tym przypadku stanowią wykresy zależności wartości obciążeń krytycznych pręta w funkcji wartości parametru śledzenia (rys. 7,8,9). Jak pokazano w pracach [19,20] wykresy te pozwalają na określenie granic stosowalności kryterium statycznego stateczności. Na rys.7 przedstawiono przykładowe – dla stałych $r = 0$ i $k = 0$ – poziome wartości obciążeń bifurkacyjnych (możliwych do wyznaczenia przy zastosowaniu statycznego kryterium stateczności) i obciążeń, przy których pręt traci stateczność przez flutter (możliwych do wyznaczenia jedynie przy zastosowaniu dynamicznego kryterium stateczności) w funkcji parametru śledzenia [19,20]. Obszary stateczności w przestrzeni sił P i N otrzymać można przez prostą dekompozycję wektora $F(\bar{\eta})\alpha$ (rys.7) na kierunek obciążenia P i kierunek obciążenia niezachowawczego N wyznaczony przez zadaną z góry wartość parametru $\eta = \eta^0$. Położenie wektora $F(\bar{\eta})\alpha$ jest określone przez parametr $\bar{\eta}$, który przyjmuje wartości z zakresu $0 \leq \bar{\eta} \leq \eta^0$. Na rys.7 pokazano przykładowo trzy proste, które prowadzą do zasadniczo różnych konfiguracji obszarów stateczności. Jeżeli parametr $\bar{\eta}$ opisujący położenie wektora $F(\bar{\eta})\alpha$ nie przekracza wartości η wyznaczonej przez prostą a – a to, jak widać, mamy do czynienia jedynie z bifurkacyjnym charakterem utraty stateczności, a odpowiednikiem tej sytuacji jest na przykład obszar stateczności przedstawiony

¹Rysunki na końcu pracy

na rys.6 dla $\eta^0 = 0.5$ (obszar ten wyznaczony jest dla stałych podłoża różnych od zera). Prosta $c - c$ wyznacza takie wartości parametru $\bar{\eta}$, dla których kształt obszarów stateczności przyjmuje postać podaną – między innymi – przykładowo na rys.2 i 3. W tym przypadku koniec wektora $F(\bar{\eta})\alpha$ przesuwa się zgodnie z obiegiem zaznaczonym strzałkami (rys.7), najpierw po wartościach obciążeń bifurkacyjnych (linia ciągła na wykresach obszarów stateczności), a później – po osiągnięciu punktu A – po krzywej możliwej do wyznaczenia jedynie przy użyciu kryterium dynamicznego, o wartościach, przy których pręt traci stateczność przez flutter (linia przerywana na wykresach obszarów stateczności). Sytuację pośrednią otrzymujemy dla prostej $b - b$; przykładowy obszar stateczności ma postać przedstawioną na rys.4 dla $\eta^0 = 0.5$. Tak więc, obszary stateczności można w stosunkowo prosty sposób otrzymać analizując obszary stosowności kryterium statycznego i dynamicznego. Dla pręta Eulera nie spoczywającego na podłożu sprężystym ścisły matematyczny opis krzywych z rys.7 podano w pracy [19]; jak łatwo sprawdzić obszary stateczności otrzymane z podanych w [19] równań mają identyczny charakter z obszarami prezentowanymi tutaj. W szczególności równania te potwierdzają charakter otrzymanych, zmiennych wypukłości obszarów stateczności. Na rys.8 i 9 przedstawiono – na tle prezentowanych w pracach [19,20] – wykresy zakresów stosowności kryterium statycznego stateczności dla pierwotnych i wtórnych wartości obciążeń krytycznych przy różnych wartościach stałych opisujących podłożę sprężyste. Na rys.10 i 11 pokazano wartości parametru śledzenia – na granicy stosowności statycznego kryterium stateczności – w funkcji wartości stałych podłoża sprężystego; linią ciągłą oznaczono wartości parametru śledzenia dla pierwotnych, a linią przerywaną dla wtórnych wartości obciążeń krytycznych. Na rys.12 i 13 prezentowana jest zależność częstości drgań własnych podczas flutteru w funkcji parametru śledzenia dla różnych stałych podłoża sprężystego; wyższe częstości na obu rysunkach odpowiadają wtórnym wartościom obciążeń krytycznych, dla których pręt traci stateczność przez flutter. Postać wybożenia pręta ściśle związana jest z wartościami stałych opisujących podłożę sprężyste. Relacja, która wiąże liczbę półfal przy wybożeniu z parametrami podłoża jest – dla badanego tu przypadku pręta – rozwinięciem wyznacznika z macierzy współczynników czterech jednorodnych równań algebraicznych. Z uwagi na to, że – w zależności od poziomu obciążenia i stałych podłoża – relacja ta zawiera iloczyny funkcji trygonometrycznych lub trygonometrycznych i hiperbolicznych [3,19,20] jej postać jest trudna w ścisłej analizie. Dla prostszych w analizie przypadków podparcia (pręt obustronnie podparty przegubowo oraz pręt o jednym końcu swobodnym a drugim w nieskończoności) relacje takie pokazano w pracy [20]. Nageswara Rao i Venkateswara Rao [9] analizowali numerycznie postacie wybożenia dla pręta wspornikowego na podłożu Winklera przy wybranych parametrach śledzenia. Tutaj – na rys.14 i 15 – pokazano przykładowe, unormowane w granicach $\langle -1; 1 \rangle$ postacie wybożenia pręta odpowiadające pierwszemu, krytycznemu obciążeniu pręta dla różnych

stałych podłoża i dla różnych parametrów śledzenia. Na rys.14a pokazano postacie wyboczenia pręta spoczywającego na podłożu Winklera o różnych wartościach stałej k w przypadku obciążenia potencjalnego. Rys.14b przedstawia formy wyboczenia analogicznego pręta obciążonego siłą niepotencjalną. Rys.15a prezentuje postacie wyboczenia dla pręta na podłożu o stałej $r \neq 0$ ($k = 0$) obciążonego siłą potencjalną; rys.15b pokazuje formy wyboczenia pręta spoczywającego na dwuparametrowym podłożu sprężystym dla różnych, krytycznych obciążeń potencjalnych i śledzących.

4. Podsumowanie

W pracy wyznaczono obszary stateczności pręta wspornikowego spoczywającego na dwuparametrowym podłożu sprężystym, którego reakcja proporcjonalna jest do ugięcia i krzywizny pręta. Jednoczesne obciążenie pręta niezależnymi siłami potencjalnymi i niepotencjalnymi prowadzić może do wielokrotnego zwiększenia jego obciążenia krytycznego uzyskanego w przypadku działania jedynie sił ustalonych przestrzennie (zadanie klasyczne). Wartość tego zwielokrotnienia jest funkcją parametru śledzenia; dla $\eta \geq 0.75$ działanie sił niepotencjalnych nie obniża poziomu krytycznego obciążenia bifurkacyjnego uzyskiwanego w zadaniu klasycznym. Granice obszarów stateczności przy obciążeniu dwuparametrowym wyznaczone są na ogół przez wartości krytycznych obciążeń bifurkacyjnych, a po osiągnięciu lokalnego bądź globalnego maksimum przez wartości przy których pręt traci stateczność przez flutter. Wartości lokalnych (globalnych) maksimum obszarów stateczności zmieniają swoje położenie w funkcji parametru śledzenia, lecz dla każdego η leżą na tej samej prostej (rys.2). W zakresie bifurkacyjnych obciążeń krytycznych obszary stateczności są wypukłe; wtedy, gdy granice obszarów wyznaczone są przez obciążenia, którym towarzyszy flutter, obszary są początkowo (dla $\eta < 1$) wypukłe, a dla $\eta > 1$ wklęsłe.

Do prostego konstruowania obszarów stateczności w układzie osi $P - N$ służyć mogą wykresy stosowalności statycznego kryterium stateczności (rys. 7,8 i 9) oraz prosta dekompozycja siły o kierunku ustalonym parametrem śledzenia $\bar{\eta}$ (rys.7). Wartości granicznych parametrów śledzenia – oddzielające obszar w którym można stosować kryterium statyczne stateczności od obszaru w którym rozwiązanie jest jedynie możliwe przy użyciu kryterium dynamicznego stateczności – są funkcjami parametrów podłoża sprężystego. Dla podłoża Winklera ($k \neq 0$, $r = 0$) funkcje opisujące zmiany parametru granicznego są monotonicznie malejące zarówno dla pierwotnych jak i wtórnych obszarów stateczności; w przypadku podłoża dla którego tylko stała r jest różna od zera, funkcje te są monotonicznie rosnące. Tak w jednym jak i drugim przypadku opisane funkcje mają różne wypukłości dla pierwotnych i wtórnych obciążeń krytycznych (rys.12 i 13).

Charakter zmian obszarów stosowalności statycznego kryterium stateczności (rys.8 i 9) pod wpływem podłoża sprężystego jest różny dla pierwotnych i wtórnych obciążeń krytycznych.

Dla pierwotnych obciążeń krytycznych częstości drgań podczas flatteru są funkcjami parametru śledzenia i asymptotycznie rosną do wartości zależnej od stałych podłoża sprężystego. W przypadku wtórnych obciążeń krytycznych częstości te rosną osiągając dla parametru $\eta = 1$ globalne maksimum, po czym asymptotycznie maleją do wartości, która – jak wyżej – zależna jest od stałych podłoża. Formy wyboczenia pręta odpowiadające pierwszym, bifurkacyjnym obciążeniom krytycznym są funkcjami stałych podłoża i parametrów śledzenia obciążenia niepotencjalnego. Dla podłoża Winklera liczba półfal ściśle związana jest z wartościami stałej k i rośnie wraz z jej wzrostem (rys.14). Podłoże o stałej $r \neq 0$ ($k = 0$) – w analizowanym zakresie – nie wpływa w istotny sposób na postać wyboczenia pręta (rys.15a).

Literatura

1. ANDERSON G.L., *The influence of a Wieghardt type elastic foundation on the stability of some beams subjected to distributed tangential forces*, J.Sound and Vib., 44, 1, 103-118, 1976
2. BOGACZ R., JANISZEWSKI R., *Zagadnienia analizy i syntezy kolumn obciążonych siłami śledzącymi ze względu na stateczność*, Prace IPPT PAN 6/1986
3. BOLOTIN V.V., *Nonconservative problems in the theory of elastic stability*, Pergamon Press, New York 1963
4. CELEP Z., *Stability of a beam on elastic foundation subjected to a nonconservative load*, J.Appl.Mech., 47, 116-120, 1980
5. COWPER G.R., *The shear coefficient in Timoshenko's beam theory*, J.Appl.Mech., 33, 335-340, 1966
6. *Drgania i fale*, Praca pod redakcją S.Kaliskiego, Warszawa PWN 1966
7. KOUNADIS A.N., KATSIKADELIS J.T., *Shear and rotatory inertia effect on Beck's columns*, J.Sound and Vib., 49, 2, 171-178, 1976
8. LISOWSKI A., *Obliczanie konstrukcji na ciągłym podłożu sprężystym*, Warszawa PWN, 1974
9. NAGESWARA RAO B., VENKATESWARA RAO G., *Stability of a cantilever column resting on an elastic foundation subjected to a subtangential follower force at its free end*, J.Sound and Vib., 125, 3, 570-577, 1988
10. NEMAT-NASSER S., *Instability of a cantilever under a follower force according to Timoshenko beam theory*, J.Appl.Mech., 34, 484-485, 1967
11. SMITH T.E., HERRMANN G., *Stability of a beam on an elastic foundation subjected to a follower force*, J.Appl.Mech., 39, 628-629, 1972

12. SUGIYAMA Y., KAWAGOE H., *Vibration and stability of elastic columns under the combined action of uniformly distributed vertical and tangential forces*, J.Sound and Vib., 38, 3, 341-355, 1975
13. SUNDARARAJAN C., *Stability of columns on elastic foundations subjected to conservative forces*, J.Sound and Vib., 37, 1, 79-85, 1974
14. SUNDARARAMAIAH V., VENKATESVARA RAO G., *Effect of shear deformation and rotatory inertia on the stability of Beck's and Leipholz's columns*, AIAA J., 18, 1, 124-125, 1980
15. SUNDARARAMAIAH V., VENKATESVARA RAO G., *Stability of short Beck and Leipholz columns on elastic foundation*, AIAA J., 21, 7, 1053-1054, 1983
16. WAHED I.F.A., *The stability of a cantilever on elastic foundation under influence of a follower force*, J.Mech.Engng., 17, 219-222, 1975
17. Власов В.З., Леонтев Н.Н., Балки и оболочки на упругом основании, Физматгиз, Москва, 1960
18. Зорий Л.М., Об устойчивости стержня при неконсервативной нагрузке, Научные Записки Института Машиноведения и Автоматики, 10, 1964
19. ŻYCZKOWSKI M., *Stability of elastic structures, Part III*, ed. H.H.E.Leipholz, Springer-Verlag, Wien - New York, 1978
20. ŻYCZKOWSKI M., *Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji*, Praca zbiorowa pod red. Z. Waszczyszyna, Ossolineum, Wrocław, 1981

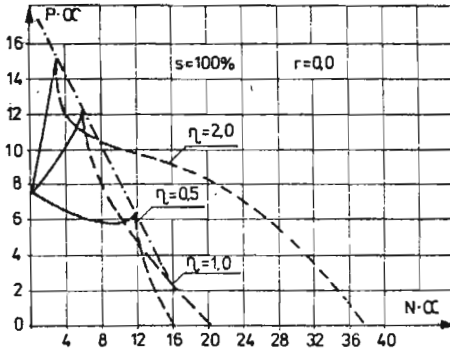
Summary

Stability regions for a cantilever bar under independent potential and non-potential loading have been determined. The methods of construction of stability regions have been considered as well as the influence of a two-parameter elastic foundation on the stability regions shape.

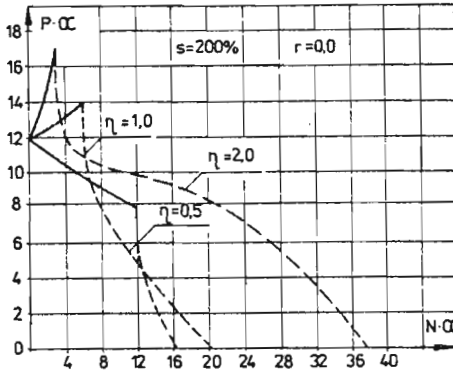
Резюме

В работе определены области устойчивости консольного стержня, подвергнутого действию независимых потенциальных и непотенциальных нагрузок. Представлены способы конструирования областей устойчивости, а также предусмотрено влияние двухпараметрового упругого основания на их форму.

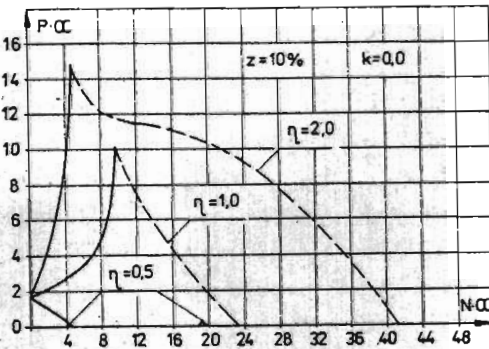
Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 lutego 1988 roku



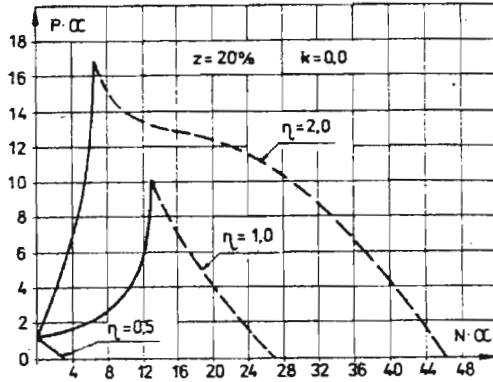
Rys. 2. Obszary stateczności pręta dla $r = 0.0$, $s = 100\%$



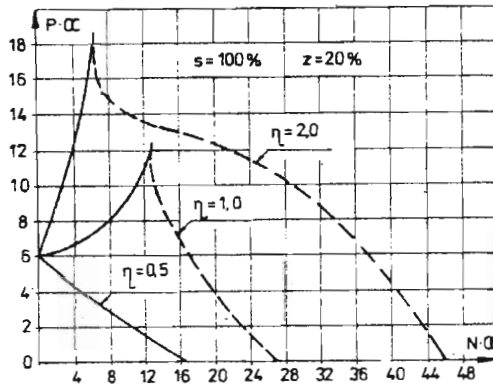
Rys. 3. Obszary stateczności pręta dla $r = 0.0$, $s = 200\%$



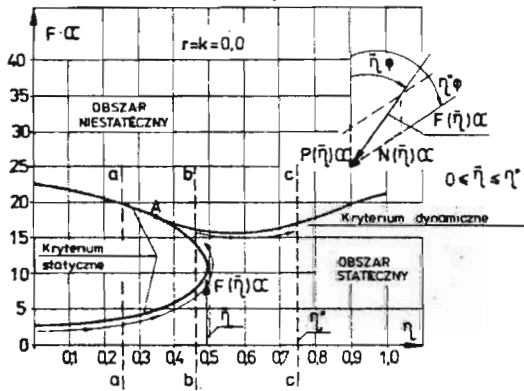
Rys. 4. Obszary stateczności pręta dla $k = 0.0$, $z = 10\%$



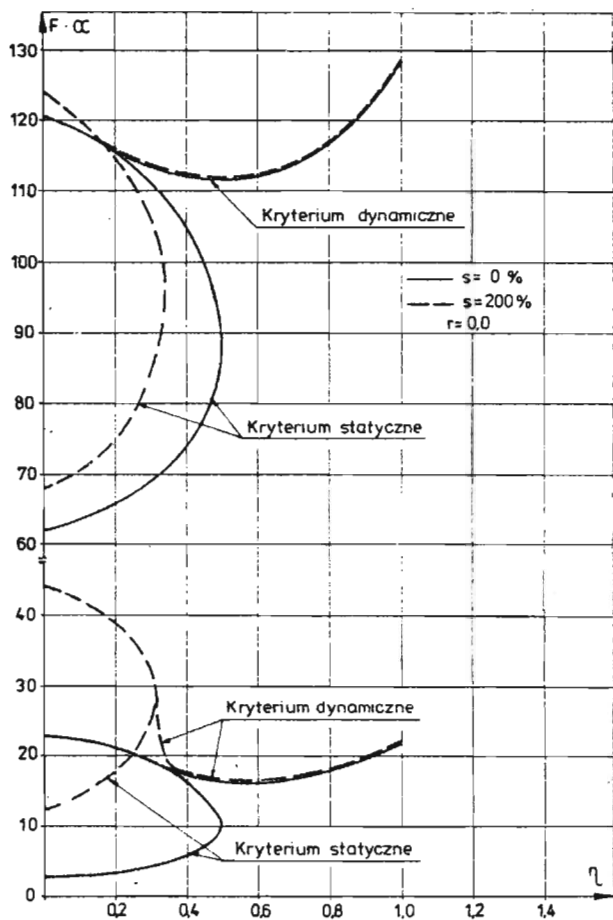
Rys. 5. Obszary stateczności pręta dla $k = 0,0$, $z = 20\%$



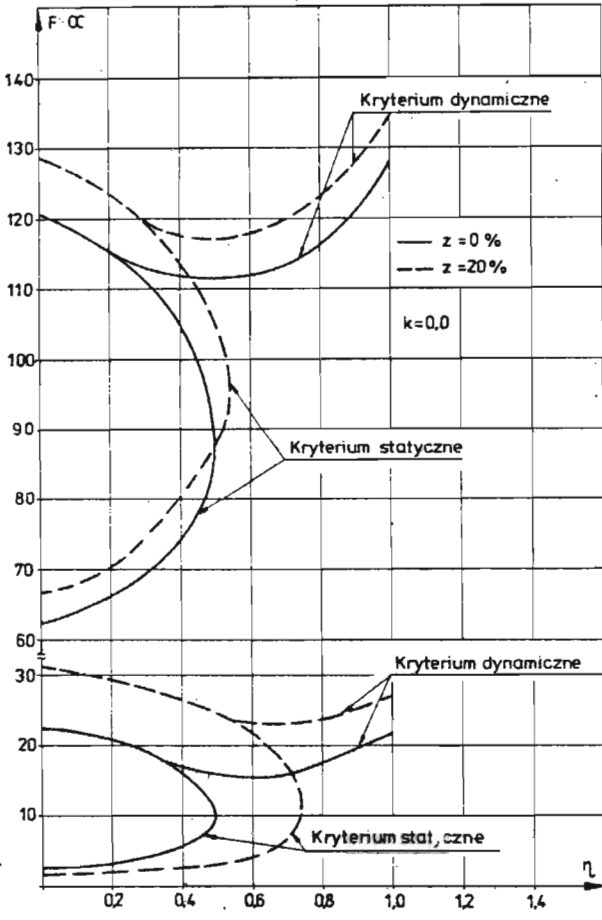
Rys. 6. Obszary stateczności pręta dla $s = 100\%$, $z = 20\%$



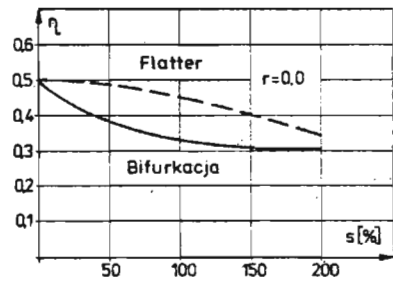
Rys. 7. Sposób konstruowania obszarów stateczności



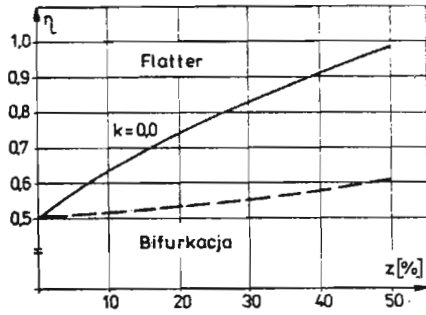
Rys. 8. Wartości pierwotnych i wtórnych obciążeń krytycznych pręta dla $r = 0.0$ oraz $s = 0\%$ i $s = 200\%$



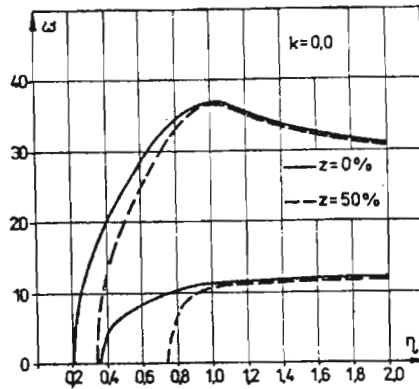
Rys. 9. Wartości pierwotnych i wtórnych obciążeń krytycznych pręta dla $k = 0,0$ oraz $z = 0\%$ i $z = 20\%$



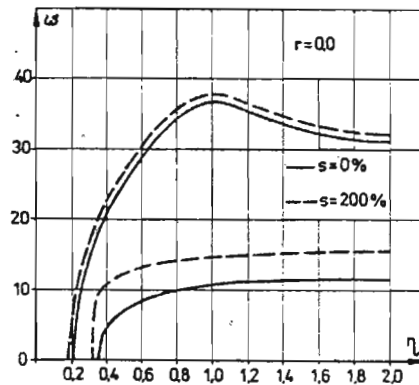
Rys. 10. Zakresy stosowalności statycznego kryterium stateczności dla podłoża sprężystego o stałej $r = 0,0$



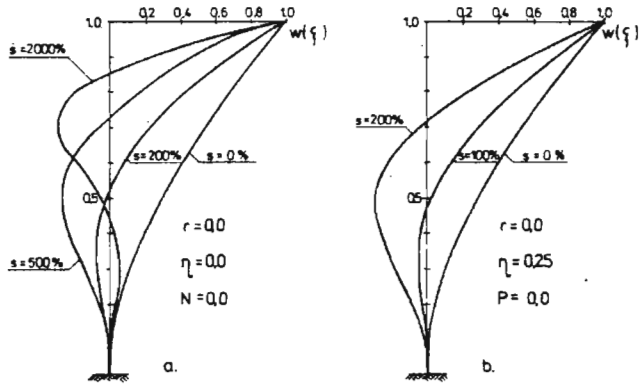
Rys. 11. Zakresy stosowalności statycznego kryterium stateczności dla podłoża sprężystego o stałej $k = 0.0$



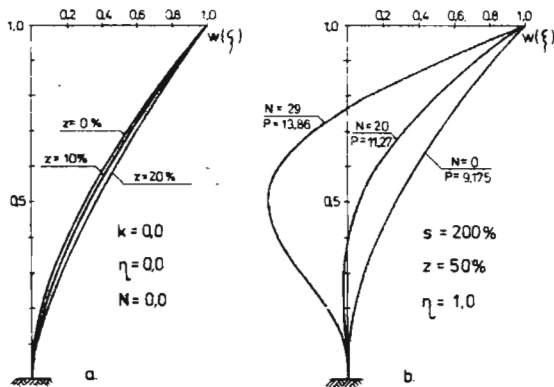
Rys. 12. Zależność częstości flatteru w funkcji parametru śledzenia dla dla podłoża o stałej $k = 0.0$



Rys. 13. Zależność częstości flatteru w funkcji parametru śledzenia dla dla podłoża o stałej $r = 0.0$



Rys. 14. Formy wybożenia pręta spoczywającego na podłożu Winklera



Rys. 15. Formy wybożenia pręta spoczywającego na jedno i dwuparametrowym podłożu sprężystym